

## Épreuve de Sciences Industrielles PSI

Durée 5 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

---

**L'usage de calculatrices est autorisé.**

### AVERTISSEMENT

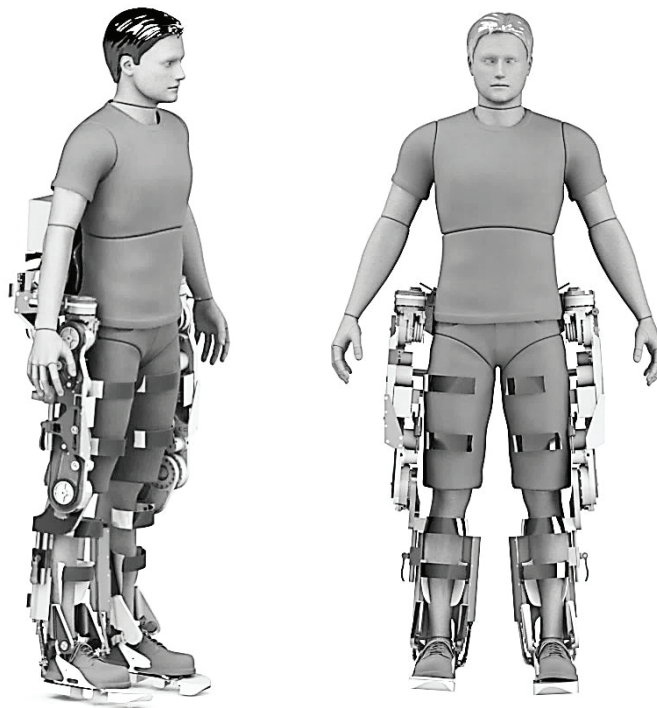
La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

**Les candidat(e)s devront porter l'ensemble de leurs réponses sur le cahier réponses, à l'exclusion de toute autre copie. Les résultats doivent être reportés dans les cadres prévus à cet effet.**

---

## Exosquelette Atalante

---



Le questionnaire est composé de quatre parties indépendantes :

- Partie I : Présentation du système
- Partie II : Etude de l'adaptabilité du système pour les personnes
- Partie III : Etude du passage de la position assise à la position debout
- Partie IV : Etude de la marche

Chaque partie est décomposée en sous-parties indépendantes les unes des autres pour la plupart des questions.

Il est précisé que le candidat devra porter l'ensemble de ses réponses sur le cahier de réponses prévu à cet effet.

# Partie I. Introduction

## I.1. Présentation du sujet

L'utilisation d'exosquelettes motorisés pour permettre à des personnes à mobilité réduite de se déplacer n'est pas nouvelle. Cependant, les exosquelettes existants ne permettent pas de stabiliser les utilisateurs, il faut donc les équiper de béquilles. Ainsi, les utilisateurs récupèrent l'usage de leurs jambes, mais perdent en partie celui de leurs mains. Or les mains sont indispensables dans la plupart de nos actions quotidiennes qui restent donc, actuellement, irréalisables pour les utilisateurs de fauteuil roulant (Figure 1).



- |                               |                                      |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1. MARCHER                    | 7. ENTRER DANS UN MAGASIN            |
| 2. TROTTOIR                   | 8. EMMENER SES ENFANTS À L'ÉCOLE     |
| 3. ESCALIER                   | 9. SE DÉPLACER À LA MAISON           |
| 4. PARLER SANS LEVER LES YEUX | 10. WC, SALLE DE BAINS, CUISINE      |
| 5. MÉTRO, BUS, TRAIN, PARKING | 11. PRENDRE UN LIVRE SUR UNE ÉTAGÈRE |
| 6. BUREAU, ÉCOLE, UNIVERSITÉ  |                                      |
| 7. ENTRER AU RESTAURANT       |                                      |

Figure 1 : 11 rêves de l'utilisateur de fauteuil roulant.

Fort de ce constat, l'entreprise Wandercraft a développé l'exosquelette *Atalante* pour offrir la possibilité à ses utilisateurs de se lever, s'asseoir, marcher dans toutes les directions et de monter quelques marches en toute autonomie et sans l'aide des mains.

Pour y parvenir, Wandercraft a eu recours à des techniques de marche humanoïde innovantes.

L'exosquelette détecte l'impulsion et l'inclinaison du buste de l'utilisateur, afin d'enclencher la marche dans la direction souhaitée. Incubée à l'École des Arts & Métiers Paristech et lauréate du Concours mondial d'innovation en 2017, l'entreprise Wandercraft a lancé des essais cliniques depuis décembre 2016 pour une commercialisation en 2018.

## I.2. Expressions des exigences

Les exigences principales associées à la conception de l'exosquelette *Atalante* sont données figure 2. Seules les exigences 1.1 (compatibilité) et 1.3 (mouvement) seront étudiées dans ce sujet. Le détail de leurs sous exigences est donné en annexe 1.

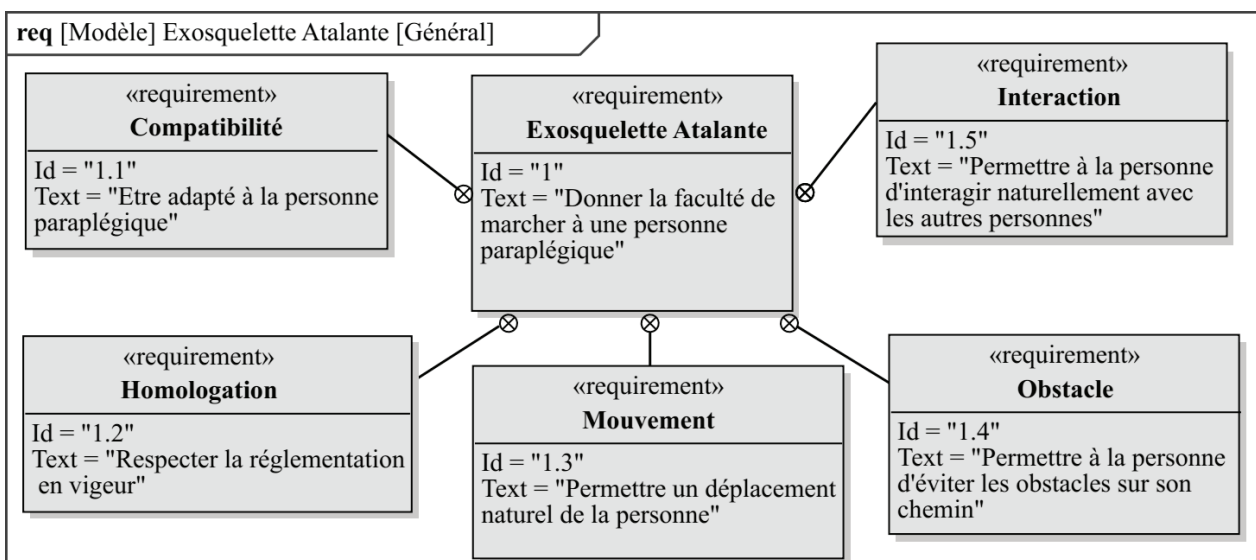


Figure 2 : exigences principales associées à l'exosquelette *Atalante*.

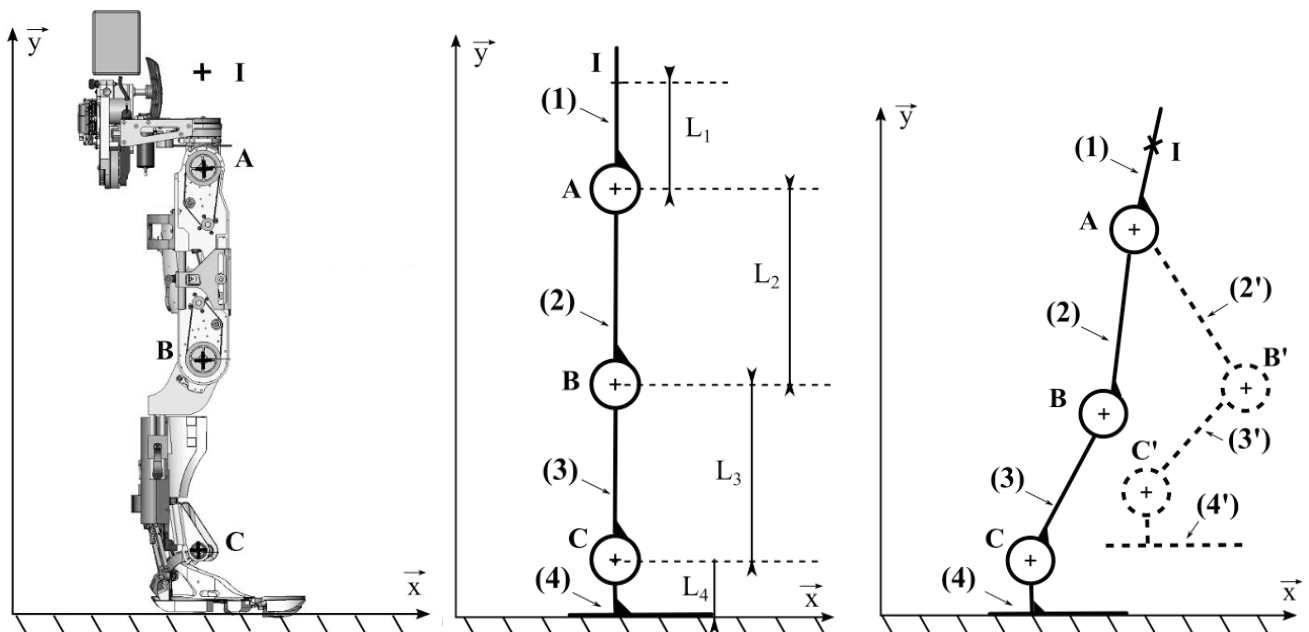
## Partie II. Compatibilité avec l'utilisateur (exigence Id 1.1)

L'exosquelette est conçu pour être utilisé quotidiennement pendant plusieurs heures d'affilée par une personne paraplégique qui ne ressent, par définition, pas la douleur au niveau des membres inférieurs. Ainsi, en cours de fonctionnement, les jambes de l'utilisateur pourraient être endommagées sans que ce dernier ne s'en rende compte à temps. Les traumatismes corporels possibles peuvent être de deux types :

- Musculaire et (ou) articulaire si les articulations de l'exosquelette se trouvent décalées par rapport aux articulations de l'utilisateur.
- Cutanées si la chair est cisailée par les fixations qui maintiennent l'utilisateur dans l'exosquelette.

**L'objectif de cette partie est de vérifier que la conception de l'exosquelette permet de garantir sa compatibilité avec l'utilisateur (exigence 1.1 de la Figure 2).**

Pour réaliser cette étude, un modèle cinématique simplifié de l'exosquelette est proposé **Figure 3**. Chaque jambe est composée trois solides : le fémur (2) ou (2'), le tibia (3) ou (3') et le pied (4) ou (4'). Ces solides sont reliés par des liaisons pivots situées au genou (point B) et à la cheville (point C). Le bassin (1) est également en liaison pivot à la hanche (point A) avec le fémur (2) ou (2'). Le point I représente la position théorique du nombril de l'utilisateur.



(a) maquette numérique.

(b) modèle en position verticale.

(c) modèle en position de marche.

Figure 3. modèle cinématique de l'exosquelette.

La compatibilité de l'exosquelette avec l'utilisateur se traduit par le fait que les articulations du premier doivent à chaque instant de fonctionnement être coaxiales aux articulations du second. Ceci implique :

- une mise en position initiale de l'exosquelette par rapport à l'utilisateur,
- un maintien au cours du temps de la position relative entre les articulations de l'utilisateur et celles de l'exosquelette.

## II.1. Mise en position initiale de l'exosquelette

### II.1.1. Dimensionnement du réglage

**Objectif :** s'assurer que l'exosquelette peut s'adapter à toute personne mesurant entre 1,50 m et 1,90 m (ld 1.1.1.1 de l'annexe 1).

Ainsi l'espacement entre les articulations de l'exosquelette doit être réglable. Ce réglage se fait via des liaisons glissières intégrées au fémur et au tibia de chaque jambe de l'exosquelette (Figure 4).

On note  $\Delta L2$  et  $\Delta L3$  les longueurs de réglage correspondantes :

$$\Delta L2 = \max(\overline{AB}) - \min(\overline{AB})$$

$$\Delta L3 = \max(\overline{BC}) - \min(\overline{BC})$$

**Question 1.** A l'aide de l'annexe 2, déterminer les longueurs de réglage minimales  $\Delta L2$  et  $\Delta L3$  que doit permettre l'exosquelette pour respecter le cahier des charges.

La figure 5 donne une première solution technologique pour réaliser les liaisons glissières de direction  $\vec{y}$  entre les solides (2.1) et (2.2) ainsi que (3.1) et (3.2). Elle consiste à employer deux contacts cylindriques.

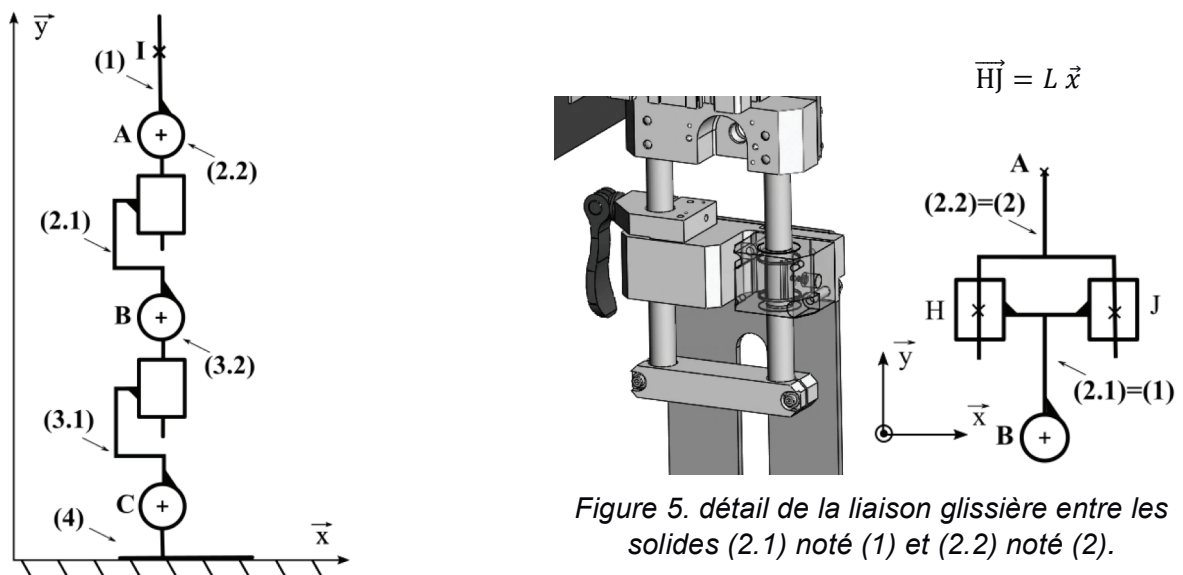


Figure 4. modèle cinématique du réglage des dimensions de l'exosquelette.

Figure 5. détail de la liaison glissière entre les solides (2.1) noté (1) et (2.2) noté (2).

Pour la question suivante, on note :

- $i$  et  $j$  les indices des solides. On notera (1) le solide (2.1) et (2) le solide (2.2),
- $n$ , le numéro de la liaison entre le solide (1) et le solide (2) : la liaison n°1 en H et la liaison n°2 en J.
- le torseur cinématique de la liaison  $n$  entre le solide  $i$  par rapport au solide  $j$  et le torseur des actions transmissibles du solide  $i$  sur le solide  $j$  par la liaison  $n$  :

$$\{v_{i/j}^n\} = \begin{Bmatrix} p_{ij}^n & u_{ij}^n \\ q_{ij}^n & v_{ij}^n \\ r_{ij}^n & w_{ij}^n \end{Bmatrix}_b \text{ et } \{\tau_{i \rightarrow j}^n\} = \begin{Bmatrix} X_{ij}^n & L_{ij}^n \\ Y_{ij}^n & M_{ij}^n \\ Z_{ij}^n & N_{ij}^n \end{Bmatrix}_b$$

Avec  $A$  est le point où le torseur est calculé et  $b$  la base dans lequel il est exprimé.

**Question 2.** Sur la figure 5, identifier les liaisons entre les solides (1) (ou (2.1)) et (2) (ou (2.2)).  
Démontrer par le calcul que la liaison équivalente entre ces deux solides est bien une liaison glissière.

**Question 3.** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle donné figure 5.

**Question 4.** Y-a-t-il des contraintes géométriques à respecter pour que le mécanisme réel puisse être assemblé correctement ? Si oui, lesquelles ?

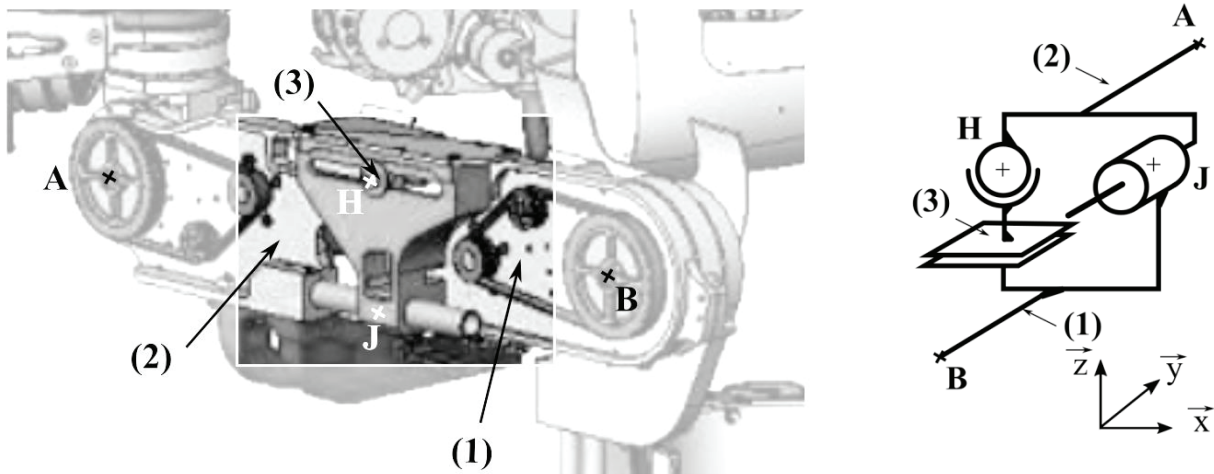
### II.1.2. Conception du mécanisme de réglage

*Pour des questions de confort de manipulation, le réglage des dimensions de l'exosquelette doit se faire sans difficulté pour l'utilisateur. Le respect de cette exigence passe par la nécessité d'avoir un minimum de contraintes géométriques entre les composants du mécanisme de réglage. Ainsi le modèle de ce dernier devra être isostatique (Id 1.1.2.2 de l'annexe 1).*

**Question 5.** En modifiant/remplaçant une liaison dans le modèle donné figure 5, proposer une solution isostatique pour le mécanisme de réglage étudié.

**Question 6.** Tracer le schéma cinématique spatial de ce nouveau modèle.

Le schéma cinématique du modèle de la solution choisie par l'entreprise Wandercraft est donné figure 6. Cette solution nécessite de rajouter une pièce intermédiaire notée (3) entre les solides (1) (ou (2.1)) et (2) (ou (2.2)).



(a) Maquette numérique

(b) Modèle cinématique

Figure 6. solution choisie par l'entreprise Wandercraft pour réaliser le réglage en longueur de l'exosquelette.

**Question 7.** Réaliser le graphe de liaison de cette solution.

**Question 8.** Donner, sans faire de calcul, le nom de la liaison équivalente entre les solides (1) et (2). Comparer cette solution à celle trouvée à la question 5 et expliquer son intérêt.



### II.1.3. Force maximale à exercer pour effectuer le réglage

**Objectif : s'assurer que l'exigence 1.1.1.2.1 du cahier des charges soit respectée. Ainsi, la force exercée par l'utilisateur pour régler les dimensions de l'exosquelette ne doit pas dépasser 150 N.**

Pour des raisons de sécurité, le réglage des dimensions de l'exosquelette est réalisé en position assise (Figure 7). C'est une tierce personne (différente de la personne tétraplégique) qui vient successivement régler puis verrouiller les différentes dimensions de l'exosquelette. Le réglage le plus critique est celui des dimensions du fémur (solides (2.1) et (2.2) de la figure 4). Il se fait avec celui du tibia (solides (3.1) et (3.2)) en position déverrouillée.

Pour simplifier l'étude, on considérera que :

- le bassin (1), la partie supérieure du fémur (2.2) et le pied (4) sont fixes par rapport à la chaise (ou le sol) noté (0),
- le jeu dans la liaison (déverrouillée) entre les solides (3.1) et (3.2) étant important on pourra considérer qu'il n'y a pas de contact entre ces deux solides,
- seuls les frottements dans la liaison entre les solides (2.1) et (2.2) sont pris en compte,
- le problème est plan de normale  $\vec{z}$ .

Le modèle cinématique simplifié de l'exosquelette dans cette phase est donné figure 8.

Pour simplifier les notations, on note :

- (1) la partie inférieure du fémur (2.1),
- (2) la partie supérieure du tibia (3.2),

L'action mécanique extérieure exercée sur la partie inférieure du fémur (1) pour effectuer le réglage est définie ci-dessous :

$$\{\tau_{ext \rightarrow 1}\} = {}_B \begin{Bmatrix} F \vec{x} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Paramètres du modèle :

Solide	Paramètres géométriques	Masses et inertie
Sol (0) + chaise + partie supérieure du fémur + bassin + pied		
Partie inférieure du fémur (2.1) notée (1)		Masse du fémur : $m_{21} = 6,4 \text{ kg}$ Le centre de gravité du solide (2.1) est assimilé au point B.
Partie supérieure du tibia (3.2) notée (2)	$\overrightarrow{BG_{32}} = -L_3 \vec{y}$ avec $L_3 = 280 \text{ mm}$	Masse partie haute du tibia : $m_{32} = 4,2 \text{ kg}$ . Le centre de gravité du solide (3.2) est noté $G_{32}$ .

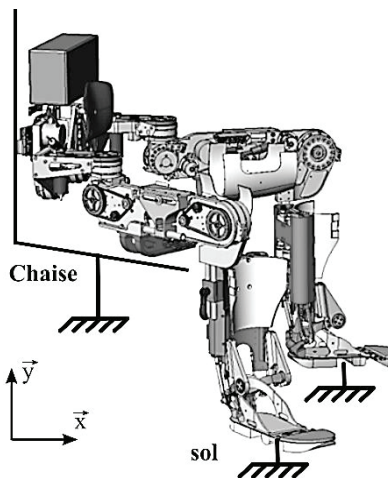


Figure 7 : position de l'exosquelette lors de la phase de réglage de ses dimensions.

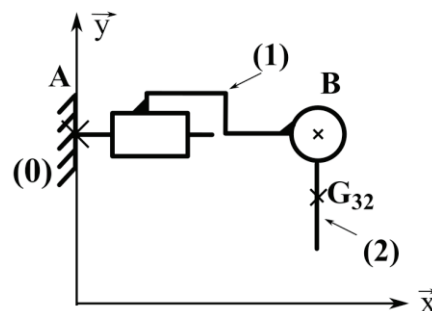


Figure 8 : modèle cinématique de l'exosquelette lors du réglage de la longueur du fémur.

On cherche à déterminer l'effort  $F$  à exercer pour effectuer le réglage.

**Question 9.** Isoler le solide (2) et faire le bilan des actions mécaniques extérieures sous forme de torseurs. En justifiant le raisonnement, déterminer sans calcul l'action mécanique de la partie supérieure du tibia (1) sur le fémur (2).

La liaison entre le bâti (0) et le fémur (1) est la liaison pivot-glissante étudiée au paragraphe II.1.2 et décrite à la figure 6 entre les solides (1) et (2).

Sur la figure 6, le contact cylindre-cylindre modélisé par la liaison pivot-glissant en J admet un jeu radial. Ce jeu est présenté sur la figure 9. Pour le prendre en compte, une nouvelle modélisation cinématique du mécanisme est proposée à la figure 10.

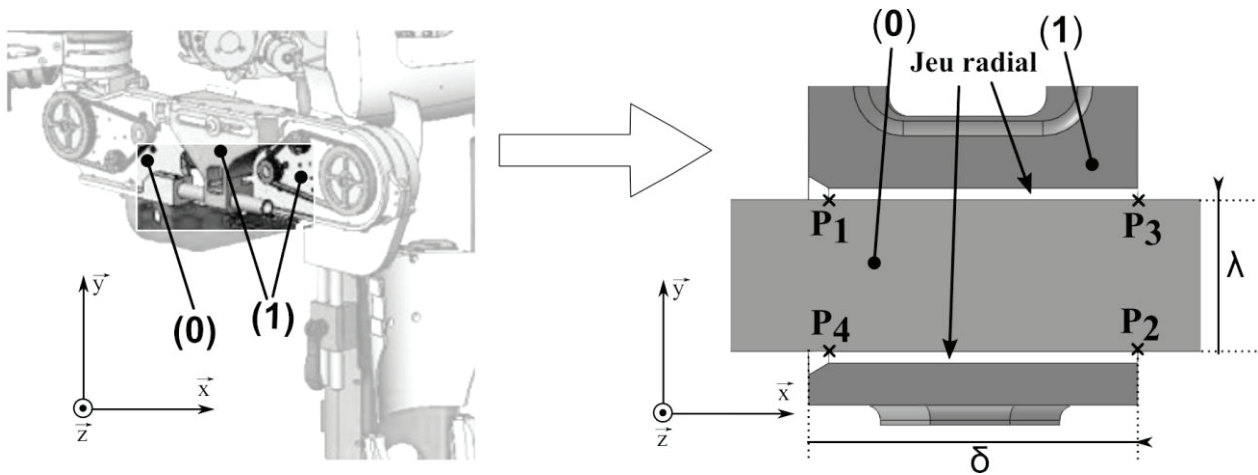


Figure 9 : détail du contact cylindre-cylindre entre le fémur supérieur (0) et le fémur inférieur (1).

**Question 10.** A partir de la figure 9, justifier le nouveau modèle de liaison entre le bâti (0) et fémur (1) proposé figure 10.

On note :  $\overrightarrow{BP_2} = -\mu \vec{x}$  et  $\overrightarrow{P_1P_2} = \delta \vec{x}$  (l'influence de la longueur  $\lambda$  est négligée). Soit  $f = 0,33$  le coefficient de frottement entre le bâti (0) et la partie inférieure du fémur (1).

On donne  $\mu = 150 \text{ mm}$ .

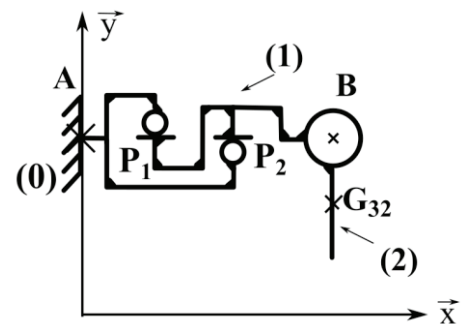


Figure 10 : nouveau modèle cinématique de l'exosquelette lors du réglage de la longueur du fémur.

**Question 11.** On se place à la limite du glissement. A partir du modèle donné figure 10, déterminer la force  $F$  en fonction de  $f, m_{21}, m_{32}, \delta$  et  $\mu$ . La méthode et les théorèmes utilisés seront explicités.

**Question 12.** Le phénomène d'arc-boutement apparait-il avec le modèle de la figure 10 ? Expliquer en quoi ce phénomène serait un problème pour le réglage dimensionnel de l'exosquelette.

**Question 13.** Déterminer l'expression de  $\delta$ , la longueur du contact cylindre-cylindre qui permet de respecter le cahier des charges. Faire l'application numérique.



## Partie III. Passage de la position assise à la position debout (Id 1.3.2)

La phase où la personne passe de la position assise (position d'installation dans l'exosquelette) à la position debout est importante. Le but de cette partie est de déterminer les lois de commande des actionneurs permettant le passage assis/debout.

Pour cela, nous allons utiliser le modèle cinématique présenté figure 11.

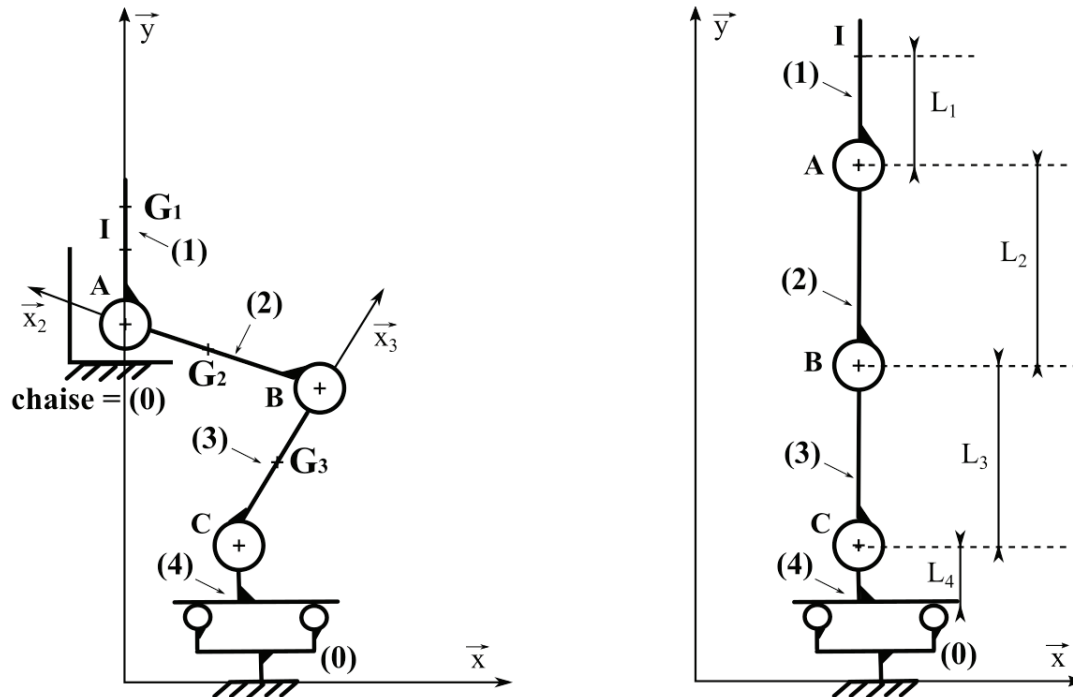


Figure 11 : modèle cinématique.

### Paramètres géométriques

Solide	Repères ou Bases associés	Paramètres géométriques	Masses
Sol (0)	$B_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$		
Bassin (1)	$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$	$\overrightarrow{AI} = L_1 \cdot \vec{x}_1$ $\overrightarrow{AG_1} = L_{G1} \cdot \vec{x}_1$ $\theta_1 = (\vec{x}_2, \vec{x}_1) = (\vec{y}_2, \vec{y}_1)$	Masse du bassin + Personne s'appliquant sur une jambe : $m_1 = 32 \text{ kg}$
Fémur (2)	$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$	$\overrightarrow{BA} = L_2 \cdot \vec{x}_2$ $\overrightarrow{BG_2} = \frac{L_2}{2} \cdot \vec{x}_2$ $\theta_2 = (\vec{x}_3, \vec{x}_2) = (\vec{y}_3, \vec{y}_2)$	Masse Fémur + Personne : $m_2 = 14 \text{ kg}$
Tibia (3)	$R_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$	$\overrightarrow{CB} = L_3 \cdot \vec{x}_3$ $\overrightarrow{CG_3} = \frac{L_3}{2} \cdot \vec{x}_3$ $\theta_3 = (\vec{x}, \vec{x}_3) = (\vec{y}, \vec{y}_3)$	Masse tibia + Personne : $m_3 = 9 \text{ kg}$
Pied (4)	$R_4(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	$\overrightarrow{CA} = x(t) \cdot \vec{x} + y(t) \cdot \vec{y}$ $\overrightarrow{O_1C} = a \cdot \vec{x} + L_4 \cdot \vec{y}$ $\overrightarrow{O_2C} = -b \cdot \vec{x} + L_4 \cdot \vec{y}$	

Modélisation des liaisons

Liaisons	Définition	Figures changement de bases
Sol (0) / Pied (4)	Sphère plan de normale $(O_1, \vec{y})$ Sphère plan de normale $(O_2, \vec{y})$	
Pied (4) / Tibia (3)	Pivot d'axe $(C, \vec{z})$	
Tibia (3) / Fémur (2)	Pivot d'axe $(B, \vec{z})$	
Fémur (2) / Bassin (1)	Pivot d'axe $(A, \vec{z})$	

Hypothèses :

- Les liaisons sont supposées parfaites
- Le problème est plan, dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ .
- On notera  $g$  l'accélération de la pesanteur avec  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

**III.1. Etude préliminaire**

**Objectif : Déterminer la loi de mouvement de l'exosquelette.**

**Question 14.** Par une fermeture géométrique, déterminer les relations entre  $x(t)$ ,  $y(t)$  et les angles  $\theta_2, \theta_3$  et les paramètres géométriques :

$$\begin{cases} x(t) = f(\theta_2(t), \theta_3(t)) & (1) \\ y(t) = g(\theta_2(t), \theta_3(t)) & (2) \end{cases}$$

A partir des ces deux équations, on peut déterminer des relations inverses :

$$\begin{cases} F(\theta_3(t), x(t), y(t)) = [L_3 \cdot \cos(\theta_3(t)) - x(t)]^2 + [L_3 \cdot \sin(\theta_3(t)) - y(t)]^2 - L_2^2 = 0 & (3) \\ G([\theta_2(t) + \theta_3(t)], x(t), y(t)) = L_2 \cdot \cos(\theta_2(t) + \theta_3(t)) - x(t)]^2 + [L_2 \cdot \sin(\theta_2(t) + \theta_3(t)) - y(t)]^2 - L_3^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Ces quatres équations vont nous servir dans les parties suivantes.

**III.2. Détermination de la position initiale assise avant le début du mouvement de redressement.**

**Objectif : Déterminer la position du pied pour éviter le basculement en début de mouvement de mise en position debout (exigence Id 1.3.2.2) ; mise en évidence d'un besoin de basculement du tronc vers l'avant.**

Au début de la phase de redressement, il existe un risque de basculement vers l'arrière de la personne installée dans l'exosquelette. On cherche la position limite des pieds pour qu'il n'y ait pas basculement. A partir de cette position limite des pieds, on détermine la position générale de l'exosquelette en début de phase de redressement.

On rappelle que géométriquement on a défini :  $\vec{CA} = x(t) \cdot \vec{x} + y(t) \cdot \vec{y}$

Pour cette partie on prend  $y(t)$  constant avec  $y(t) = Y_0 = 400 \text{ mm}$ .

On supposera le solide (1) vertical donc que  $\vec{x}_1 = \vec{y}$ .

Le contact entre l'exosquelette et la chaise est rompu (pas d'action mécanique transmise). On cherche à régler  $x(t)$  pour cette position on note  $x(t) = X_0$  (Figure 12).

[À noter :  $X_0$  est pris en valeur algébrique,  $X_0$  est négatif sur la figure 12]

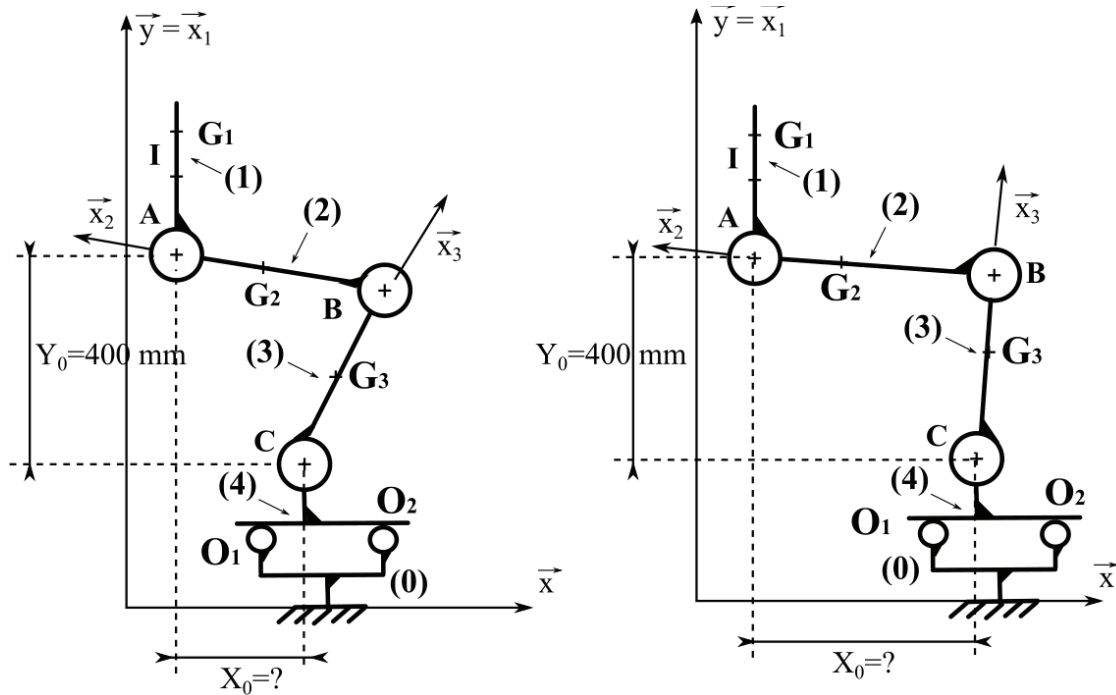


Figure 12 : position du pied.

On donne les torseurs d'actions mécaniques des liaisons sphère/plan en  $O_1$  et  $O_2$ .

$$\{T_{0 \rightarrow 4}^1\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1} \quad \text{et} \quad \{T_{0 \rightarrow 4}^2\}_{O_2} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{02} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_2}$$

**Question 15.** En prenant en compte le fait que la personne dans l'exosquelette peut basculer vers l'arrière lorsque le contact est rompu avec la chaise, donner la condition de non basculement sur l'effort  $Y_{02}$ .

En isolant l'ensemble  $\{1 + 2 + 3\}$ , et en appliquant le principe fondamental de la statique, on détermine l'effort  $Y_{02}$  en fonction des masses  $m_1, m_2, m_3$  et des données géométriques. On peut tracer les graphiques donnés dans le cahier réponses (R16).

**Question 16.** A partir de ces graphiques déterminer la position initiale limite  $X_0$  à donner aux pieds et l'angle  $\theta_3$  correspondant pour qu'il n'y ait pas basculement.

Pour des raisons pratiques au niveau de la mise en position debout, l'angle  $\theta_3$  doit être au minimum égal à  $70^\circ$  en début de mouvement.

**Question 17.** En prenant ce critère en compte, y-a-t-il un risque de basculement ?

Pour éviter ce problème, le corps de la personne solidaire du bassin (1) de l'exosquelette est penché vers l'avant en position initiale de redressement.

Finalement la position initiale est définie par :  $X_0 = -273 \text{ mm}$ ,  $Y_0 = 400 \text{ mm}$ ,  $\theta_3 = 70^\circ$ ,  $\theta_2 = 108.5^\circ$  et  $\theta_1 = -106.5^\circ$ .

### III.3. Lois de commande directes et inverses des actionneurs

**Objectif : Déterminer les lois de mouvements des axes pour passer de la position assise à la position debout en respectant les exigences du cahier des charges (Id. 1.3.2.1 et Id. 1.3.2.3)**

Données :

- Nous nous intéressons seulement aux commandes au niveau des articulations de la cheville (liaison pivot en C ; position angulaire  $\theta_3(t)$ ) et du genou (liaison pivot en B ; position angulaire  $\theta_2(t)$ ).
- Le solide (4) reste fixe par rapport au solide (0) pendant le mouvement.
- Le modèle cinématique est présenté de nouveau figure 13. Les données géométriques et équations de mouvement vous sont données page 13.
- Les phases d'accélération et de décélération ne sont pas prises en compte pour cette étude.

Rappel des exigences du cahier des charges :

- Id 1.3.2.1 : passage position assis/debout en 5 secondes,
- Id 1.3.2.3 : variation relative de vitesse du point A, sur les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , inférieure à 10% .

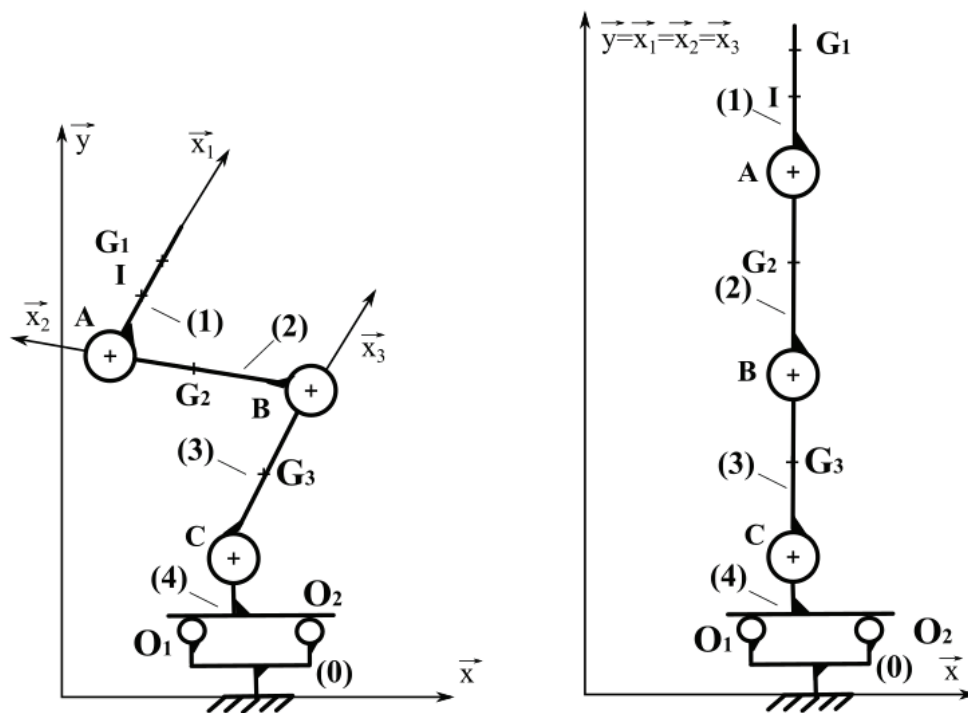
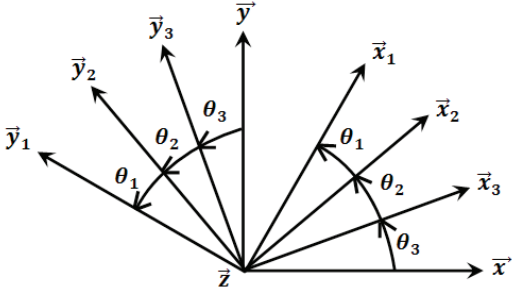


Figure 13 : schéma cinématique en position initiale assise et en position finale debout.

Données géométriques (position initiale déterminée Partie III.2)

	Position initiale	Position finale	Durée du déplacement 5 secondes
$\theta_3(t)$	$70^\circ$	$90^\circ$	
$\theta_2(t)$	$108.5^\circ$	$0^\circ$	
$\theta_1(t)$	$-106.5^\circ$	$0^\circ$	
$x(t)$	$X_0 = -273 \text{ mm}$	$0 \text{ mm}$	$\vec{CA} = x(t) \cdot \vec{x} + y(t) \cdot \vec{y}$ $L_2 = L_3 = 415 \text{ mm}$
$y(t)$	$Y_0 = 400 \text{ mm}$	$830 \text{ mm}$	

**III.3.1. Equations de mouvement (déterminée Partie III.1).**

Equations de mouvement directes :

$$\begin{cases} x(t) = L_3 \cdot \cos(\theta_3(t)) + L_2 \cdot \cos(\theta_2(t) + \theta_3(t)) & (1) \\ y(t) = L_3 \cdot \sin(\theta_3(t)) + L_2 \cdot \sin(\theta_2(t) + \theta_3(t)) & (2) \end{cases}$$

Equations de mouvement inverses :

$$\begin{cases} F(\theta_3(t), x(t), y(t)) = [L_3 \cdot \cos(\theta_3(t)) - x(t)]^2 + [L_3 \cdot \sin(\theta_3(t)) - y(t)]^2 - L_2^2 = 0 & (3) \\ G([\theta_2(t) + \theta_3(t)], x(t), y(t)) = L_2 \cdot \cos(\theta_2(t) + \theta_3(t)) - x(t)]^2 + [L_2 \cdot \sin(\theta_2(t) + \theta_3(t)) - y(t)]^2 - L_3^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

**III.3.2. Pilotage par équations de mouvements directes.**

On choisit de commander les articulations à vitesse constante :  $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2$  et  $\dot{\theta}_3(t) = \omega_3$

**Question 18.** A partir des données géométriques, calculer les valeurs numériques de  $\omega_2$  et  $\omega_3$  pour que le déplacement position assise, position debut se fasse en 5 secondes.

La figure 14 donne  $\dot{x}(t) = \vec{V}_{A \in 2/0} \cdot \vec{x}$  et  $\dot{y}(t) = \vec{V}_{A \in 2/0} \cdot \vec{y}$  en fonction du temps en prenant en compte  $\omega_2$  et  $\omega_3$ .

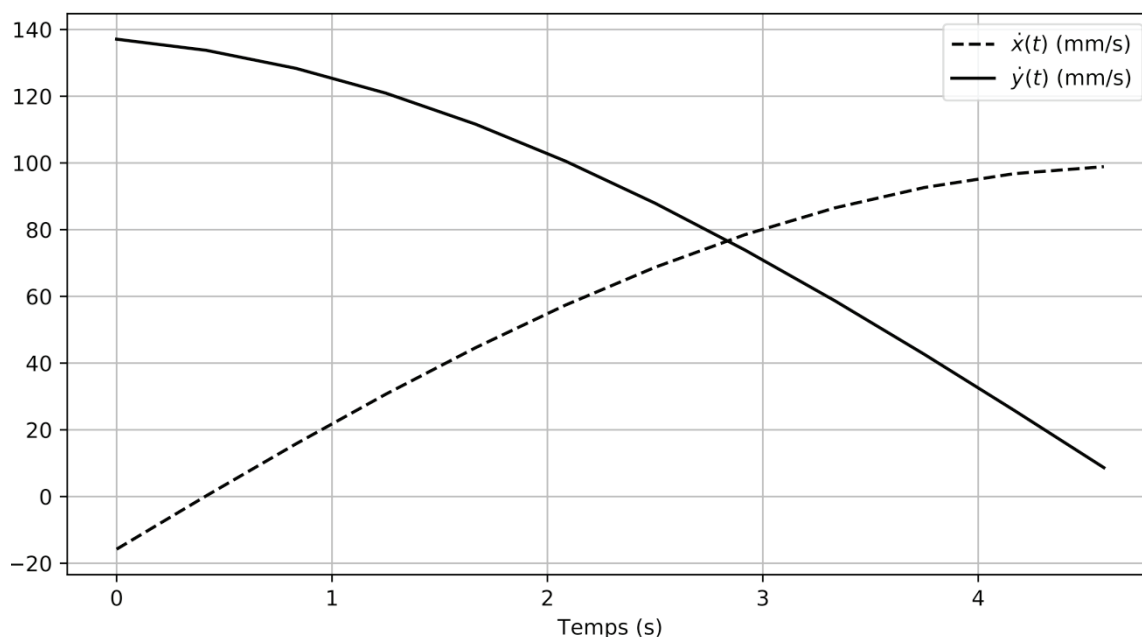


Figure 14 : évolution de  $\dot{x}(t)$  et de  $\dot{y}(t)$  en fonction du temps.

**Question 19.** Avec ce type de commande, les exigences Id 1.3.2.1 et Id 1.3.2. sont-elles respectées ? Justifier.

### III.3.3. Pilotage par équations de mouvements inverses.

Maintenant on fixe  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{y}(t)$  constants, on cherche à déterminer  $\theta_2(t)$  et  $\theta_3(t)$ . Pour cela, il va falloir résoudre les équations (3) et (4). Nous utilisons une méthode numérique pour résoudre ce système. Dans notre cas, le langage python est utilisé. Nous allons construire le programme pour résoudre l'équation (3).

**Question 20.** Créer deux listes de 100 termes pour  $x(t)$  et  $y(t)$ , vous les noterez X et Y. les premiers termes de ces listes correspondront à la position initiale et les derniers à la position finale.

**Question 21.** Créer une fonction python `equa_inverseF` prenant en compte 3 arguments de type flottant : `teta3`, `x`, `y` et renvoyant la valeur  $F(\theta_3(t), x(t), y(t))$ .

**Question 22.** Créer une fonction dichotomie ***dichoto*** prenant en compte 3 arguments : une fonction `f`, deux flottants `a,b` définissant un intervalle `[a,b]` dans lequel s'annule la fonction `f`. Cette fonction mettra en œuvre la méthode de dichotomie pour résoudre l'équation  $f(x) = 0$  à  $10^{-5}$  près. Elle renverra donc la solution de cette équation.

**Question 23.** A l'aide de la fonction ***dichoto***, écrire un script qui permet de déterminer la liste des 100 valeurs de `teta3` correspondant à la résolution de l'équation (3) pour chaque couple de valeurs `X[i]` et `Y[i]` à  $10^{-5}$  près. [pour la recherche par dichotomie on prend comme bornes pour  $\theta_3$  :  $60^\circ$  et  $100^\circ$ ].

A partir de la résolution des équations, on peut calculer les vitesses  $\dot{\theta}_2(t)$  et de  $\dot{\theta}_3(t)$ . Elles sont calculées pour un déplacement de la position assise à debout en 5 secondes, et données figure 15.

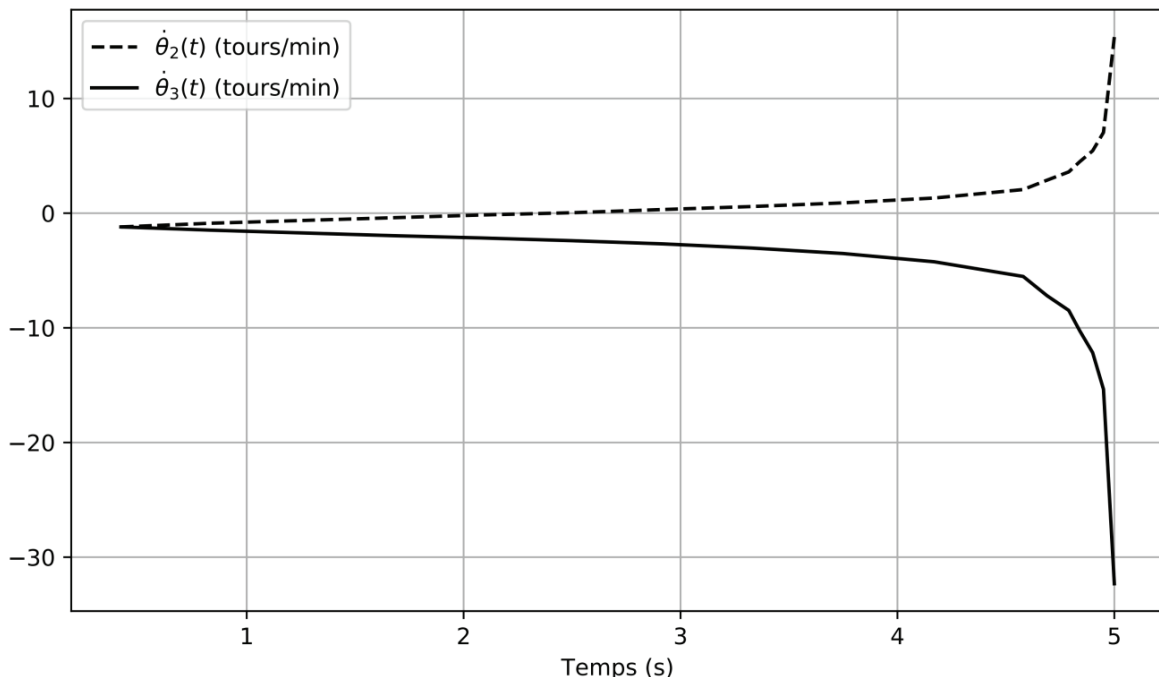


Figure 15 : estimation de l'évolution de  $\dot{\theta}_2(t)$  et de  $\dot{\theta}_3(t)$  en fonction du temps.

Le moteur du genou permet une vitesse maximum de rotation au niveau de l'articulation de 42 tours/min. Pour le moteur de la cheville, la vitesse maximum au niveau de l'articulation est de 48 tours/min.

**Question 24.** En considérant les vitesses maximales de rotation des articulations, peut-on passer de la position assise à la position debout en moins de 5 secondes.



# Partie IV. Permettre à l'utilisateur de se déplacer en autonomie

## IV.1. Modélisation du comportement dynamique de la marche

**Objectif : compléter le modèle dynamique de l'asservissement en position de l'axe de la hanche.**

Dans cette partie, on s'intéresse juste au basculement d'une jambe, ensemble  $\{(2') + (3') + (4')\}$ , par rapport aux autres solides, supposés fixes. On suppose donc la personne immobile, c'est-à-dire le point A fixe par rapport au sol. On cherche à obtenir l'équation de mouvement de la jambe. Cette équation permettra de compléter le schéma bloc de la partie dynamique de l'asservissement en position de l'axe de la hanche (figure 17). On remarque, sur le schéma bloc, que le mouvement de la hanche est assuré par un ensemble moteur + réducteur.

Le schéma cinématique de l'exosquelette lors de la marche est donné figure 16.

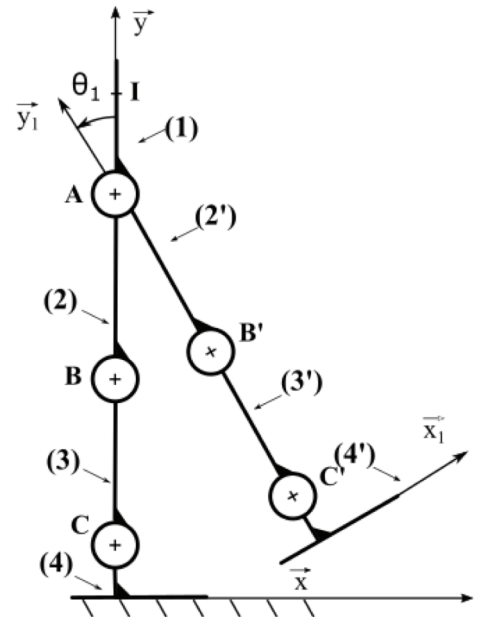


Figure 16 : schéma cinématique de l'exosquelette lors de la phase « basculement d'une jambe ».

Paramètres :

Solide	Repères et/ou Bases associés	Paramètres géométriques	Masses
(0) + (1) + (2) + (3) + (4) fixe	$B_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$		
Fémur (2')	$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$	$\vec{G}_2A = \frac{L_2}{2} \cdot \vec{y}_1$ $\vec{B}'A = L_2 \cdot \vec{y}_1$ $\theta_1(t) = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ $\omega_1(t) = \frac{d\theta_1(t)}{dt}$	Masse fémur + Personne : $m_2 = 14$ kg Matrice d'inertie : $\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}_{G_2, B_1} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,03 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}_{G_2, B_1}$ inertie en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ $G_2$ centre d'inertie de (2')
Tibia (3')	$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$	$\vec{G}_3B' = \frac{L_3}{2} \cdot \vec{y}_1$ $\vec{C}'B' = L_3 \cdot \vec{y}_1$ avec $L_3 = 415$ mm	Masse tibia + Personne : $m_3 = 9$ kg Matrice d'inertie : $\begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}_{G_3, B_1} = \begin{bmatrix} 0,15 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 \end{bmatrix}_{G_3, B_1}$ inertie en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ $G_3$ centre d'inertie de (3')

Pied (4')	$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$	$\overrightarrow{G_4 C'} = L_4 \cdot \vec{y}_1$ avec $L_4 = 100 \text{ mm}$	Masse pieds + Personne : $m_4 = 2 \text{ kg}$ Matrice d'inertie : $\begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{G_4, B_1} = \begin{bmatrix} 0,03 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 \end{bmatrix}_{G_4, B_1}$ inertie en $\text{kg.m}^2$ $G_4$ centre d'inertie de (4')
-----------	---	--	---

- On suppose les liaisons parfaites
- Soit  $M_t$ , la masse totale de la jambe  $M_t = m_2 + m_3 + m_4 = 25 \text{ kg}$
- Soit  $G_t$  le centre de gravité de la jambe  $\{(2')+(3')+(4')\}$  avec  $\overrightarrow{G_t A} = L_{Gt} \cdot \vec{y}_1$  et  $L_{Gt} = 400 \text{ mm}$
- On note  $\Theta_m(t)$  l'angle du moteur de l'articulation de la hanche,  $\omega_m(t)$  la vitesse de rotation du moteur
- On note  $k_r$  le rapport de réduction global de l'articulation de la hanche tel que :  $\frac{\omega_1(t)}{\omega_m(t)} = k_r = \frac{1}{303}$
- On note  $C_m(t)$  le couple fourni par le moteur. Ce couple engendre un moment que l'on peut ramener sur l'axe de l'articulation :  $\overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2'} = C_1 \cdot \vec{z}$
- Le rendement global du système de réduction en régime permanent est de 1 :  $\frac{P_1}{P_m} = \frac{\omega_1 \cdot C_1}{\omega_m \cdot C_m} = 1$
- Soit  $J_m$  le moment d'inertie suivant son axe du rotor du moteur avec  $J_m = 70 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$

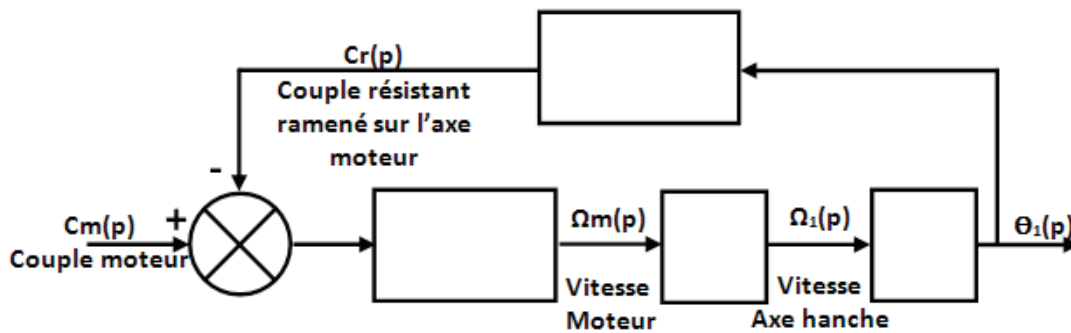


Figure 17 : schéma bloc partie dynamique de l'asservissement en position de l'axe de la hanche.

**Pour obtenir l'équation de mouvement de la jambe, on isole l'ensemble en mouvement  $\{(2') + (3') + (4') + \text{axe\_moteur}\}$ , on applique le principe fondamental de la dynamique à cet ensemble et on écrit l'équation de moment en A projetée sur la direction  $\vec{z}$ .**

**Question 25.** Déterminer le moment dynamique en A projeté sur  $\vec{z}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{(2') + (3') + (4')\}$ .  
On note le moment dynamique en A :  $\vec{\delta}_{A, \Sigma / 0}$ .

On rappelle que  $\vec{\delta}_{A, \{(2') + (3') + (4')\} / 0} = \vec{\delta}_{A, (2') / 0} + \vec{\delta}_{A, (3') / 0} + \vec{\delta}_{A, (4') / 0}$  et on notera  $\vec{\sigma}_{M, i / 0}$  le moment cinétique d'un solide  $i$  par rapport à 0 en M.

On note  $\vec{\delta}_{A, \Sigma + \text{axe\_moteur} / 0}$  le moment dynamique des éléments en mouvement en A. Avec  $\vec{\delta}_{A, \Sigma + \text{axe\_moteur} / 0} \cdot \vec{z} = \vec{\delta}_{A, \{(2') + (3') + (4')\} / 0} \cdot \vec{z} + J_m \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt}$ .

**Question 26.** En déduire l'équation de mouvement souhaitée en appliquant le théorème du moment dynamique en A projeté sur  $\vec{z}$  à l'ensemble  $\{(2') + (3') + (4') + \text{axe\_moteur}\}$ .

**Question 27.** Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$$

Vous exprimerez  $J_{eq}$  et  $C_r(t)$  en fonction des données [ ne pas oublier le réducteur de la chaîne d'énergie].

**Question 28.** Après avoir linéarisé la relation précédente et en supposant les conditions initiales nulles, compléter le schéma bloc du document réponse après avoir passé l'équation dans le domaine de Laplace.

Le modèle de la partie dynamique de l'asservissement étant maintenant déterminé, nous allons étudier cet asservissement et choisir un correcteur permettant de respecter le cahier des charges.

## IV.2. Choix de la correction de l'asservissement

**Objectif : choisir un correcteur permettant de respecter le cahier des charges (Id 1.3.1.2).**

Pour rappel le cahier des charges stipule pour l'asservissement en position de la hanche :

	Exigences	Critères
Id 1.3.1.2 Performances de l'axe de la hanche	Id 1.3.1.2.1 : rapidité	Bande Passante à 0db en Boucle ouverte $\omega_{BO-0db} \geq 10$ rad/s
	Id 1.3.1.2.3 : stabilité	Marge de Phase $\geq 45^\circ$
	Id 1.3.1.2.2 : précision	écart statique nul

Désignation	Résistance de l'induit	Inductance de l'induit	Inertie équivalente	réducteur	Masse de la jambe	Distance [AGt]	Constante de couple	Constante de f.e.m
<b>Nom</b>	R	L	$J_{eq}$	kr	Mt	$L_{Gt}$	km	ke
<b>Valeur</b>	0.8 Ohm	$0,9 \cdot 10^{-3}$ H	$7 \cdot 10^{-5}$ kg.m <sup>2</sup>	1/303	25 kg	400 mm	0.044 Nm/A	0.044 V/rad/s

Le modèle de notre asservissement en position peut-être représenté par le schéma bloc présenté figure 1 dans l'annexe 3.

Dans un premier temps il faut calculer la fonction de transfert du moteur  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ . Pour calculer cette fonction, on simplifie d'abord le schéma bloc.

**Question 29.** Montrer que le schéma-bloc de la figure 2 annexe 3 est équivalent à celui de la figure 1.

Une fois la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$  calculée et les applications numériques faites on peut modéliser de notre système par le schéma bloc de la figure 18. Ce modèle sera utilisé pour la suite du sujet.

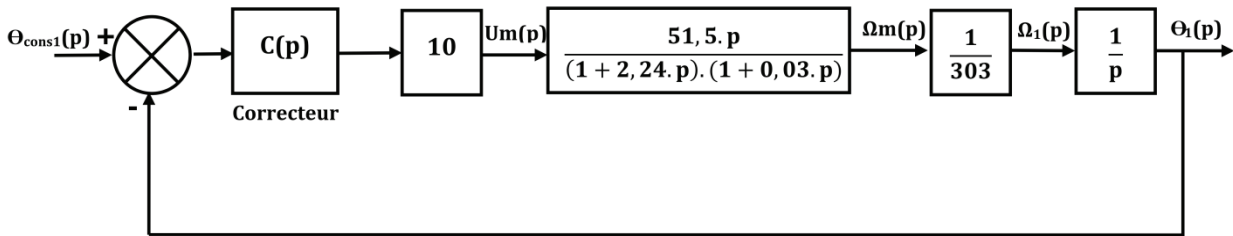


Figure 18 : modèle simplifié ; application numériques effectuées.

Nous allons maintenant nous intéresser au choix du correcteur pour respecter le cahier des charges.

**Question 30.** Pour respecter le critère de précision, quel effet doit avoir le correcteur  $C(p)$  ? Justifier.

On choisit finalement  $C(p) = C \cdot \frac{(1+2,24.p)}{p}$ , avec  $C$  une constante positive.

**Question 31.** Calculer alors la fonction de transfert en boucle ouverte du système :

$$FTBO(p) = \frac{\theta_1(p)}{\theta_{cons1}(p) - \theta_1(p)}$$

**Question 32.** Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$FTBO(p) = C \cdot \frac{515/303}{p \cdot (1 + 0,03.p)}$$

Les diagrammes de Bode de cette FTBO pour  $C=1$  sont donnés dans le cahier réponses.

**Question 33.** A partir de ces diagrammes, déterminer graphiquement la valeur minimale de  $C$  respectant la marge de phase de  $45^\circ$  désirée.

**Question 34.** Tracer alors sur les mêmes diagrammes l'allure de la FTBO corrigée en Gain et en Phase.

**Question 35.** Vérifier enfin le critère de rapidité sur la bande passante à 0dB en boucle ouverte.

Fin de l'énoncé

# Annexe 1

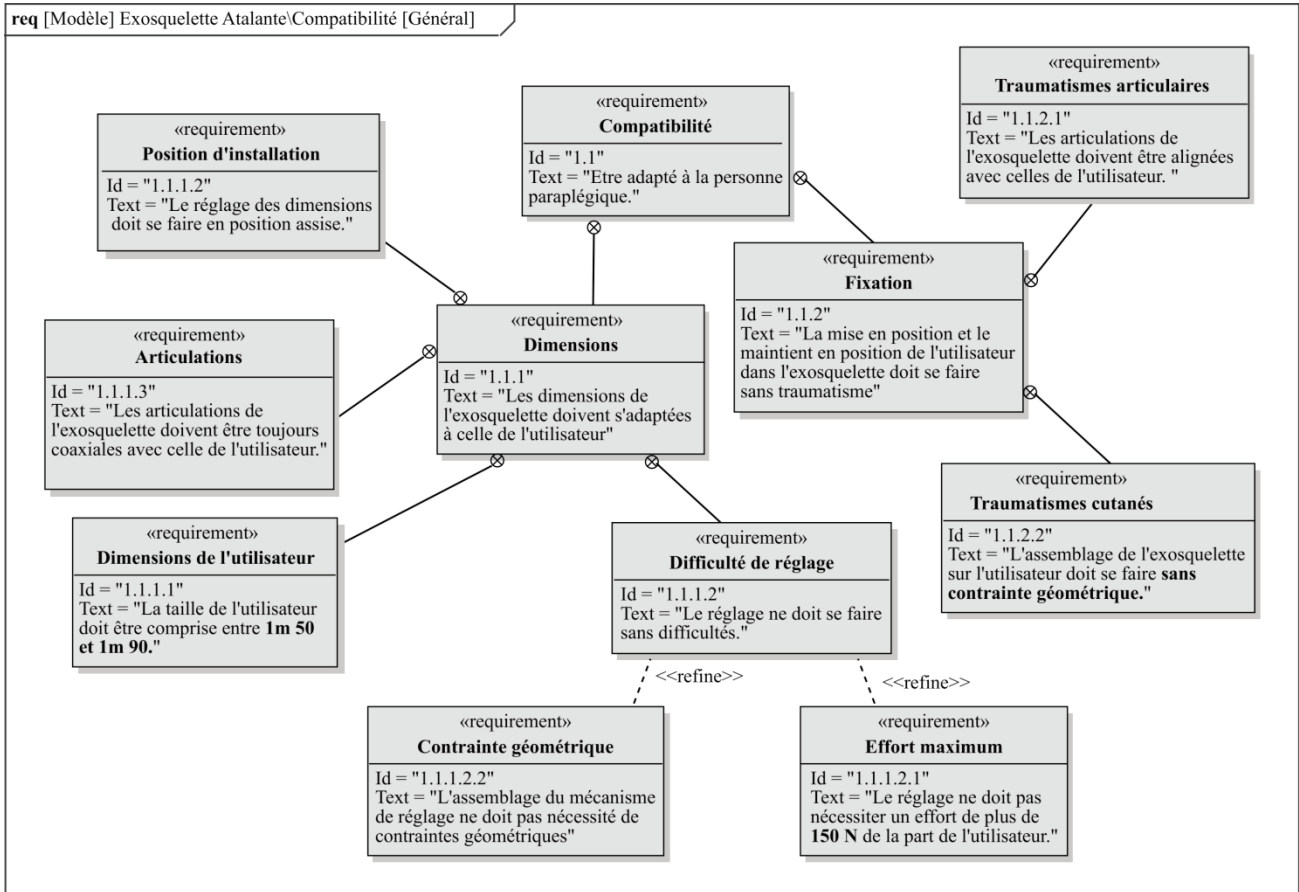


Figure 1 : sous exigences associées à la compatibilité de l'exosquelette avec l'utilisateur.

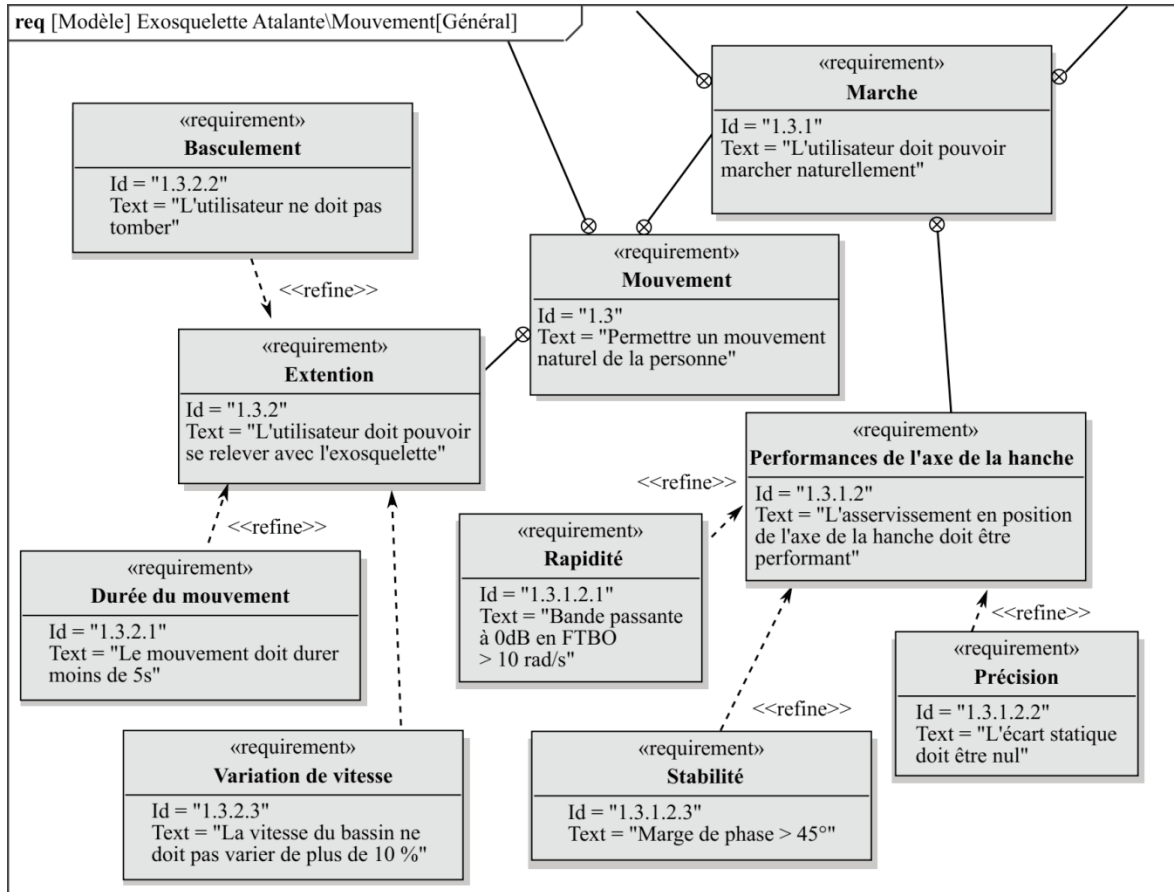


Figure 2 : sous exigences associées au mouvement de l'utilisateur équipé de l'exosquelette.

## Annexe 2

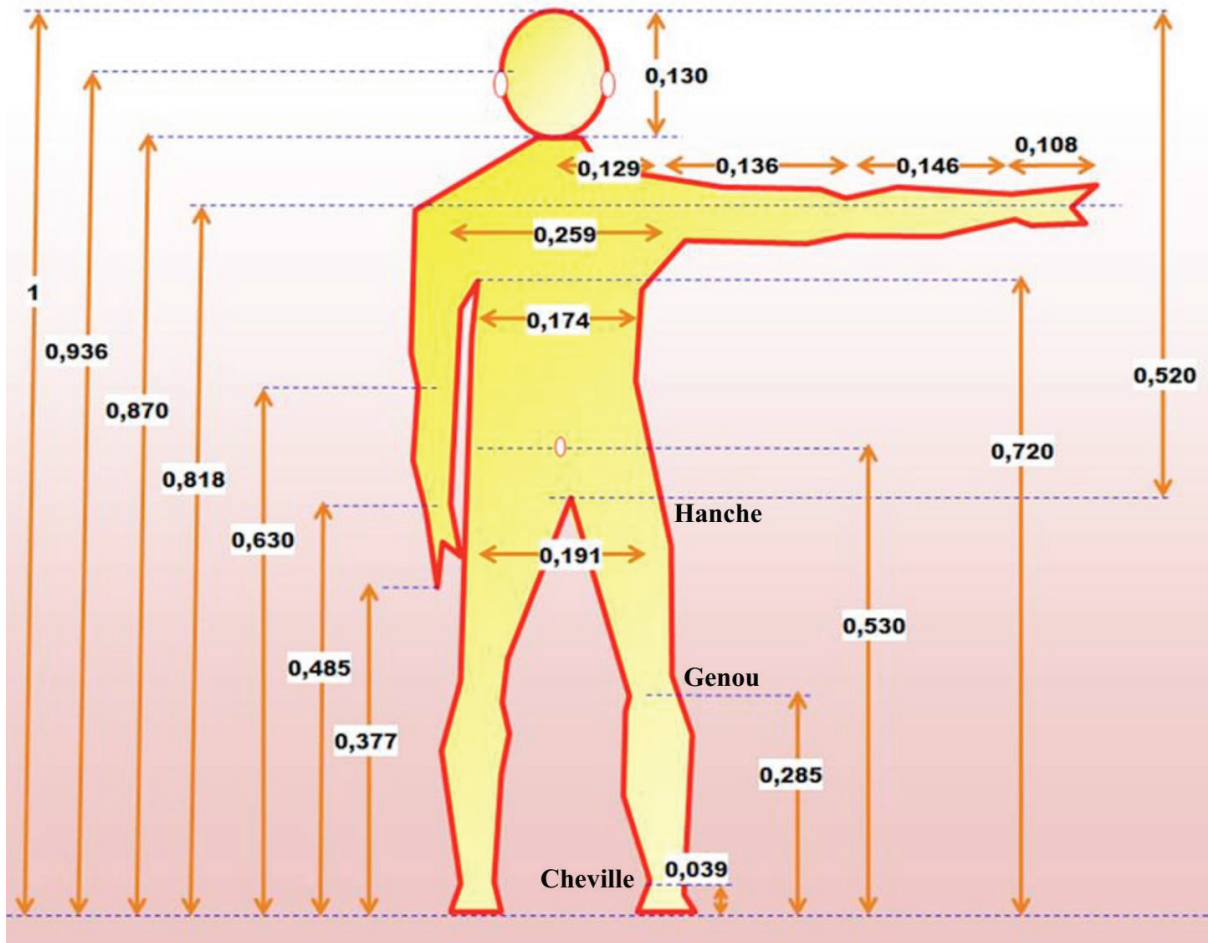


Figure 1 : proportions du corps humain.

Ces données sont toutes relatives à un individu de taille 1 unité. Par exemple pour une personne de 173 cm, la taille de la main sera  $173 \times 0,108 = 18,7$  cm.



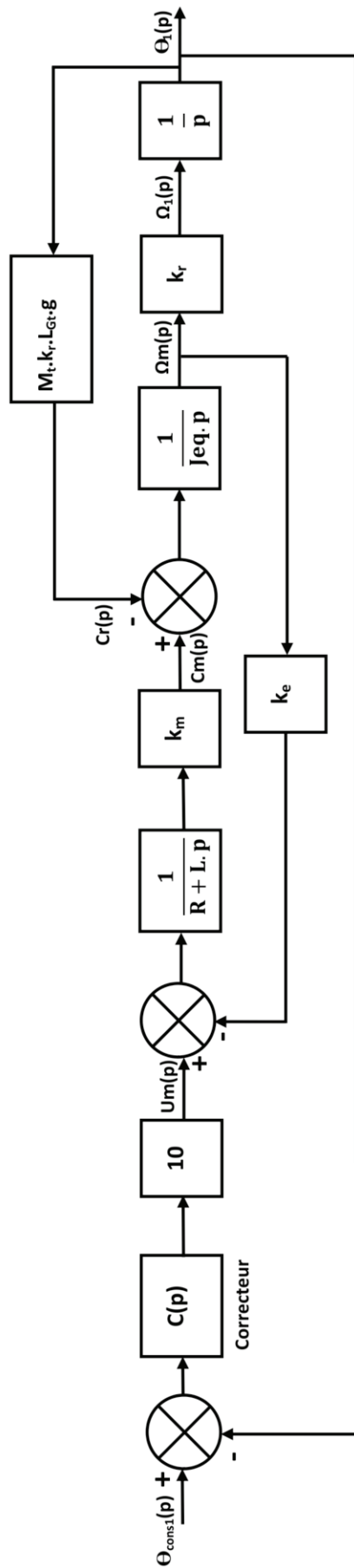


Figure 1 : schéma bloc de l'asservissement complet.

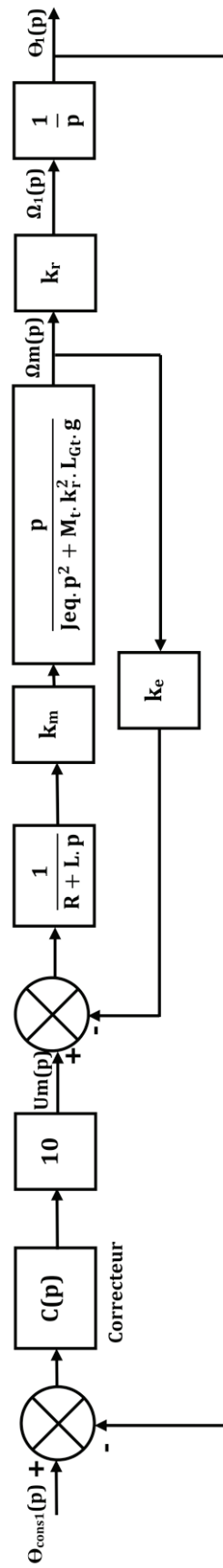


Figure 2 : schéma bloc simplifié.







Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_ Modèle EN.  
Examen ou Concours : \_\_\_\_\_ Série\* : \_\_\_\_\_  
Spécialité/option : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_  
Épreuve/sous-épreuve : \_\_\_\_\_  
NOM : \_\_\_\_\_  
*(en majuscules, suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse)*  
Prénoms : \_\_\_\_\_ N° du candidat   
Né(e) le \_\_\_\_\_ *(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)*

118

**L'usage de calculatrices est autorisé**

---

# Exosquelette Atalante

---

## Cahier réponses

### Épreuve de Sciences Industrielles

### Concours e3a - PSI

**Toutes les réponses seront portées sur ce cahier de réponses à l'exclusion de toute autre copie.**

**Ne pas dégrafer**

Tournez la page S.V.P.







NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

<b>R 4</b>	• Contraintes géométriques :
<b>R 5</b>	• Remplacement d'une liaison :
<b>R 6</b>	• Schéma cinématique 3D :
<b>R 7</b>	• Graphe de liaison :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

**R 8**

- Liaison équivalente
- Comparaison
- Explication

Nom de la liaison équivalente :

Comparaison avec la solution Q5 :

Intérêt par rapport à la solution demandée en Q5 :

**R 9**

- Action mécanique de 1 sur 2 Action mécanique du fémur (1) sur le tibia (2) :

On isole 2. Bilan des actions mécaniques :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\{\tau_{1 \rightarrow 2}\}_B =$$

**R 10**

- Justifier le modèle

**R 11**

- Déterminer F

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$F =$

**R 12**

- Le phénomène d'arc-boutement :

**R 13**

- Déterminer la longueur  $\delta$  :

$\delta_{min} =$

A.N :  $\delta_{min} =$

**R14**

- déterminer les relations entre  $x(t)$  et  $y(t)$  et les angles  $\theta_2, \theta_3$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{cases} x(t) = & (1) \\ y(t) = & (2) \end{cases}$$

**R15**

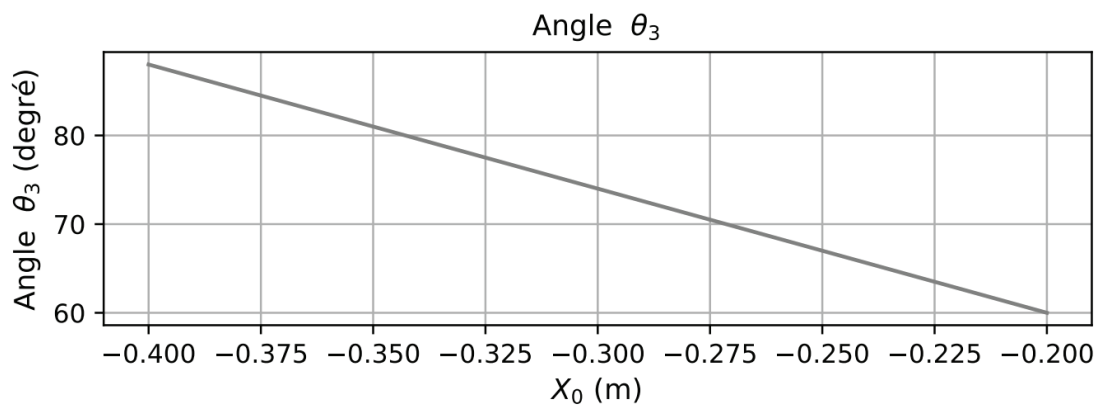
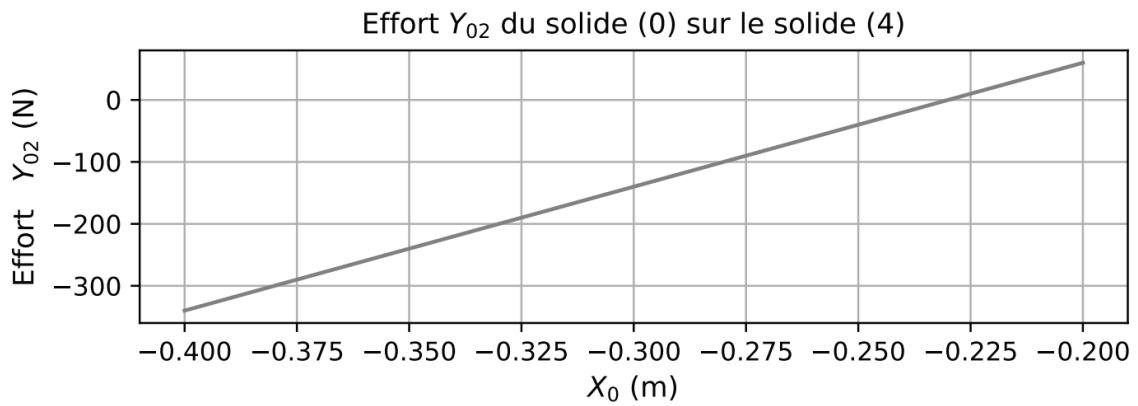
- Condition de non basculement

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

**R16**

- position initiale  $X_0$  à donner aux pieds et angle  $\theta_3$



$X_0 =$

$\theta_3 =$

**R17**

- risque de basculement

**R18**

- calculer  $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2$  et  $\dot{\theta}_3(t) = \omega_3$

$\omega_2 =$

$\omega_3 =$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

<b>R19</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• cahier des charges est-il respecté ?</li></ul>
<b>R20</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• tableau numpy de 100 points</li></ul> <p>Import numpy as np</p> <p>X =</p> <p>Y =</p>
<b>R21</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>F(\theta_3(t), x(t), y(t))</math></li></ul>

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

<b>R22</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• fonction dichotomie</li></ul>
<b>R23</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• 100 valeurs pour <math>\theta_3</math></li></ul>
<b>R24</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• peut-on passer de la position assise à debout en moins de 5 secondes ?</li></ul>



NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

**R25**

- moment dynamique en A projeté sur  $\vec{z}$

Calcul de  $\vec{\delta}_{A,(2)}/0$  :

Calcul de  $\vec{\delta}_{A,(3)}/0$  :

Calcul de  $\vec{\delta}_{A,(4)}/0$  :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\vec{\delta}_{A,\Sigma/0} \cdot \vec{Z} =$$

**R26**

- équation de mouvement

On isole l'ensemble  $\{(2') + (3') + (4') + \text{axe\_moteur}\}$

Equation de mouvement :

**R27** • Expression  $J_{eq}$  et  $C_r(t)$  en fonction des données.

$C_r(t) =$

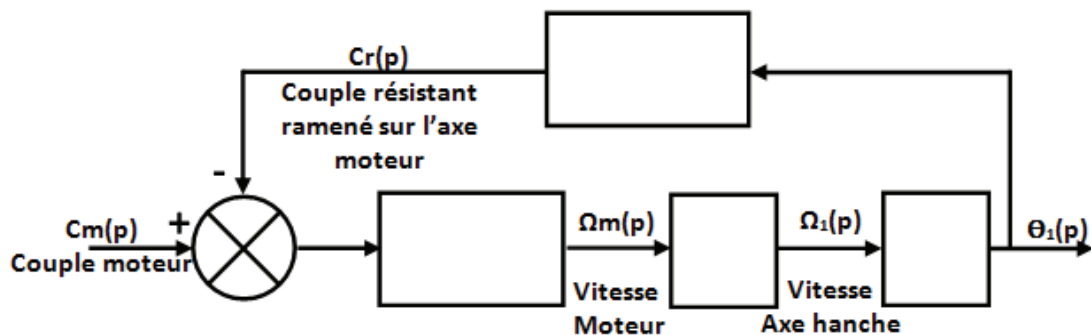
$J_{eq} =$

**R28** • compléter le schéma bloc

Linéarisation de l'équation :

Equation dans le domaine de Laplace :

Schéma Bloc :



NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

<b>R29</b>	• Modélisation de notre asservissement
<b>R30</b>	• effet du correcteur C(p)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

**R31**

- fonction de transfert en boucle ouverte:  $FTBO(p) = \frac{\theta_1(p)}{\theta_{cons1}(p) - \theta_1(p)}$

$$FTBO(p) = \frac{\theta_1(p)}{\theta_{cons1}(p) - \theta_1(p)} =$$

**R32**

- Forme fonction de transfert de l'asservissement :

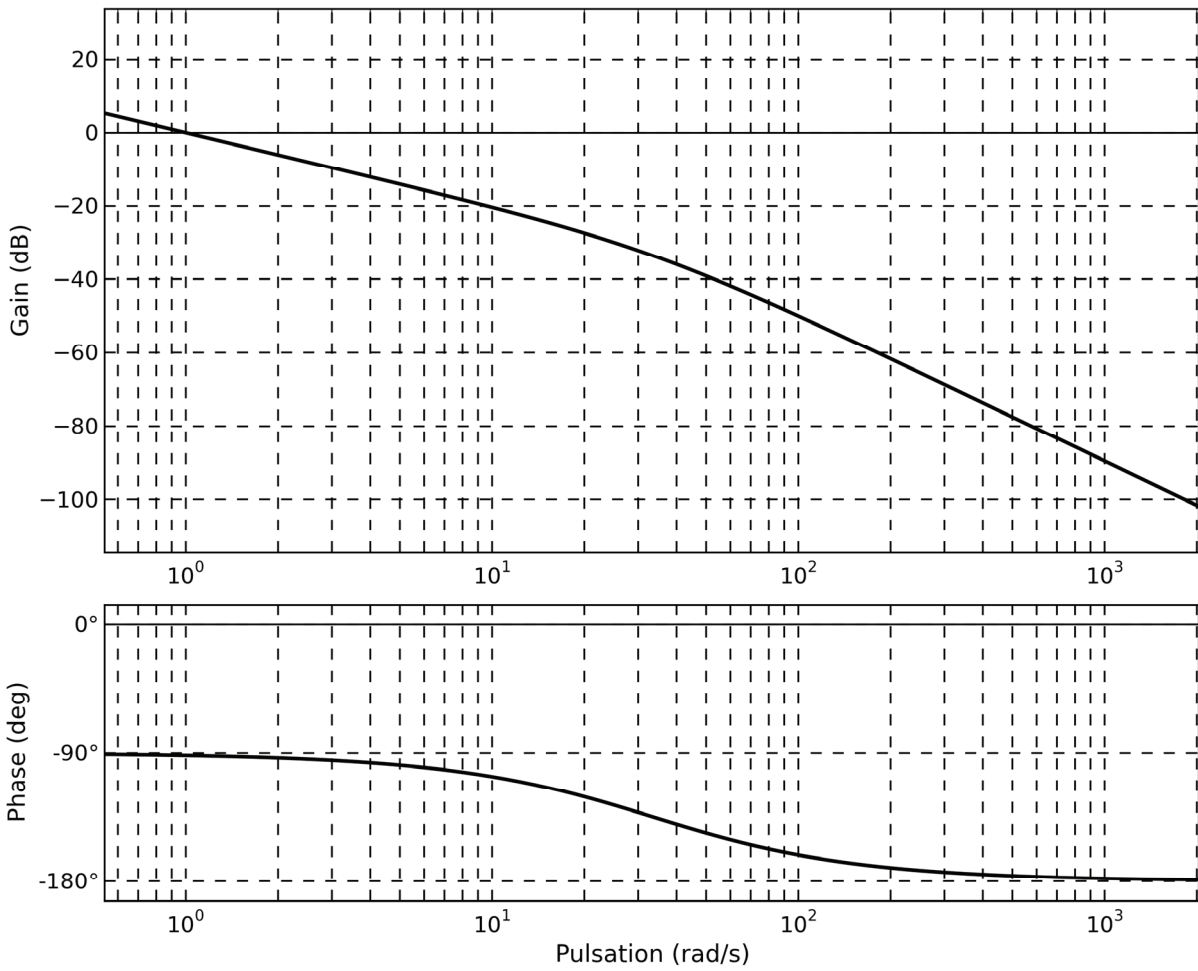
$$FTBO(p) = \frac{\theta_1(p)}{\theta_{cons1}(p) - \theta_1(p)} =$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

### R33-R34-R35

- Déterminer une valeur de C
- Allure FTBO corrigée
- Bande passante



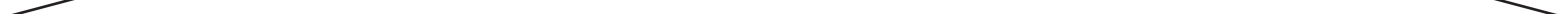
C =

Bande Passante à 0db en Boucle ouverte  $\omega_{bo-0db}$

$\omega_{bo-0db}$  =

**NE RIEN ÉCRIRE**

**DANS CE CADRE**



**NE RIEN ÉCRIRE**

**DANS CE CADRE**





**NE RIEN ÉCRIRE**

**DANS CE CADRE**



**NE RIEN ÉCRIRE**

**DANS CE CADRE**

