teaching sciences UPSTI for innovation

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2021

Filière : TSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Etude d'un système dish-stirling

Corrigé UPSTI

PARTIE I – MOTEUR STIRLING « DOUBLE EFFET » DE TYPE

I.1 - Modélisation de la chaîne thermomécanique

Modèle mécanique d'un moteur Stirling « libre » Titre 3

Q1)

La surface de contact entre le déplaceur 1 et du bâti 0 est cylindrique.

La liaison cinématique entre 1 et 0 est une pivot glissant d'axe $(0,\vec{x_0})$.

$$\left\{\mathcal{T}_{0\to1}\right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{0\to1} & M_{0\to1} \\ Z_{0\to1} & N_{0\to1} \end{Bmatrix}_{(\overline{x_0},\overline{y_0},\overline{z_0})}$$

Q2)

On isole le déplaceur 1 :

Il est soumis à :

- Action du bâti sur le déplaceur : $$\left\{\mathcal{T}_{0\to1}\right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{0\to1} & M_{0\to1} \\ Z_{0\to1} & N_{0\to1} \end{Bmatrix}_{(\overline{x_0},\overline{y_0},\overline{z_0})}$$
- Action du fluide de la chambre chaude sur le déplaceur : $$\left\{\mathcal{T}_{Cc\to1}\right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} p_c \cdot S & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\overline{x_0},\overline{y_0},\overline{z_0})}$$
- Action du fluide de la chambre froide sur le déplaceur : $$\left\{\mathcal{T}_{Cf\to1}\right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} -p_f \cdot (S - S_{\text{int}}) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\overline{x_0},\overline{y_0},\overline{z_0})}$$
- Action du fluide de la chambre B sur le déplaceur : $$\left\{\mathcal{T}_{CB\to1}\right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} -p_b \cdot S_{\text{int}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\dot{x_0},\dot{y_0},\dot{z_0})}$$

Q3)

On applique le Principe Fondamental de la Dynamique au déplaceur 1, au point O, dans $\mathcal{R}_0$ considéré galiléen :

La relation est obtenue par le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{x_0}$:

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = p_c \cdot S - p_f \cdot (S - S_{\text{int}}) - p_b \cdot S_{\text{int}}.$$

On obtient : $\ddot{x}_1(t) = \frac{1}{m_1} \cdot \left(S \cdot p_c(t) - (S - S_{\text{int}}) \cdot p_f(t) - S_{\text{int}} p_b \cdot p_b(t)\right)$

Modèle thermodynamique des gaz

La relation du gaz parfait donnée est correcte, mais r n'est pas la capacité thermique massique.
Cela n'engendre pas de problème particulier sur les résultats attendus.

Q4)

Avec la relation $p \cdot V = m \cdot r \cdot T$, on a $m = \frac{p \cdot V}{r \cdot T}$ donc $m_f = \frac{p_f \cdot V_f}{r \cdot T_f}$ et $m_c = \frac{p_c \cdot V_c}{r \cdot T_c}$

$m = m_f + m_c + m_r$ or m_r est négligeable devant les autres masses, d'où $m = \frac{p_f \cdot V_f}{r \cdot T_f} + \frac{p_c \cdot V_c}{r \cdot T_c}$

Il vient : $m \cdot r = \frac{p_f \cdot V_f}{T_f} + \frac{p_c \cdot V_c}{T_c}$.

Q5)

On a $p(t) = p_c = p_f$ et $m \cdot r = \frac{p_f \cdot V_f}{T_f} + \frac{p_c \cdot V_c}{T_c}$ donc $m \cdot r = p(t) \cdot \left(\frac{V_f}{T_f} + \frac{V_c}{T_c}\right)$.

Finalement : $p(t) = \dfrac{m \cdot r}{\frac{V_f}{T_f} + \frac{V_c}{T_c}}$.

Q6)

$x_3(t) = x_3^0 cos(\omega_0 t)$

$x_1(t) = x_1^0 cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

$$p(t) = \frac{m \cdot r}{A_0\left(1 + \frac{A_1}{A_0} x_1(t) + \frac{A_3}{A_0} x_3(t)\right)}$$

On sait que $\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$. Comme $\left|\frac{A_1}{A_0} x_1(t) + \frac{A_3}{A_0} x_3(t)\right| << 1$:

$$p(t) \approx \frac{m \cdot r}{A_0}\left(1 - \left(\frac{A_1}{A_0} x_1(t) + \frac{A_3}{A_0} x_3(t)\right)\right) \approx \frac{m \cdot r}{A_0} - \frac{m \cdot r \cdot A_1}{A_0^2} \cdot x_1(t) - \frac{m \cdot r \cdot A_3}{A_0^2} \cdot x_3(t)$$

Donc $p(t) \approx p_0 - k_1 \cdot x_1(t) - k_2 \cdot x_3(t)$ avec $p_0 = \frac{m \cdot r}{A_0}$, $k_1 = \frac{m \cdot r \cdot A_1}{A_0^2}$ et $k_2 = \frac{m \cdot r \cdot A_3}{A_0^2}$.

Modèle thermodynamique des chambres adiabatiques B et M

Q7)

Avec la relation $p \cdot V^{\gamma} = cste$, il vient $p_b(t) \cdot (V_b(t))^{\gamma} = p_b^0 \cdot (V_b^0)^{\gamma}$ d'où : $p_b(t) = p_b^0 \cdot \left(\frac{V_b^0}{V_b}\right)^{\gamma}$

Q8)

Le volume de la chambre B dépend de la course du déplaceur 1 : $V_b(t) = V_b^0 - x_1(t) \cdot S_{\text{int}}$.

$$p_b(t) = p_b^0 \cdot \left(\frac{V_b^0}{V_b^0 - x_1(t) \cdot S_{\text{int}}}\right)^{\gamma}$$

Q9)

$$p_b(t) = p_b^0 \cdot \left(\frac{V_b^0}{V_b^0 - x_1(t) \cdot S_{\text{int}}}\right)^{\gamma} = p_b^0 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{S_{\text{int}} \cdot x_1(t)}{V_b^0}}\right)^{\gamma} = p_b^0 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{S_{\text{int}} \cdot x_1(t)}{V_b^0}\right)^{\gamma}} = p_b^0 \cdot \left(1 - \frac{S_{\text{int}} \cdot x_1(t)}{V_b^0}\right)^{-\gamma}$$

On sait que $(1+x)^{a} \underset{x \to 0}{=} 1 + ax + o(x)$. Comme $\left|\frac{S_{\text{int}} \cdot x_1(t)}{V_b^0}\right| << 1$:

$$p_b(t) \approx p_b^0 \cdot \left(1 + \gamma \cdot \frac{S_{\text{int}} \cdot x_1(t)}{V_b^0}\right) \approx p_b^0 + \frac{p_b^0 \cdot \gamma \cdot S_{\text{int}}}{V_b^0} \cdot x_1(t)$$

Donc $p_b(t) = p_b^0 - k_3 \cdot x_1(t)$ avec $k_3 = -\frac{p_b^0 \cdot \gamma \cdot S_{\text{int}}}{V_b^0}$.

Modèle thermodynamique du moteur Stirling « double effet »

Q10)

$$\ddot{x}_1(t) = K_{13} \cdot x_3(t) + K_{11} \cdot x_1(t) + D_{13} \cdot \dot{x}_3(t) + D_{11} \cdot \dot{x}_1(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \ldots$$

$$p^2 X_1(t) = K_{13} \cdot X_3(t) + K_{11} \cdot X_1(t) + D_{13} \cdot pX_3(t) + D_{11} \cdot pX_1(t)$$

$$\ddot{x}_3(t) = K_{33} \cdot x_3(t) + 2K_{31} \cdot x_1(t) + D_{33} \cdot \dot{x}_3(t) + \frac{1}{m_3} \cdot F_{gen}(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \ldots$$

$$p^2 X_3(t) = K_{33} \cdot X_3(t) + 2K_{31} \cdot X_1(t) + D_{33} \cdot pX_3(t) + \frac{1}{m_3} \cdot F_{gen}(t)$$

Q11)

Un système asservi est stable si et seulement si tous les pôles de sa FTBF sont à partie réelle strictement négative.

Le système est instable car les poles p_1 et p_2 sont à partie réelle positive.

I.2 - Commande du moteur Stirling « double effet »

Q12)
Le correcteur installé est un correcteur à action intégrale et à double avance de phase.
Le correcteur à action intégrale permet d'améliorer la précision du système. Par contre, l'effet de déstabilisation est important.
C'est pourquoi on l'associe à un correcteur à (double) avance de phase, qui agit sur la stabilité et sur la bande passante.
Pour synthétiser, la précision est assurée par l'action intégrale, et la stabilité et la rapidité sont assurées par l'action du double avance de phase.

Q13)
Le système est stable, la sortie tend vers une valeur finie.
La rapidité du système s'estime avec le $tr_{5\%}$. Par construction graphique, $tr_{5\%} = 0.12s$

La précision est parfaite, puisque la sortie tend vers l'entrée.
Concernant l'amortissement, la réponse n'est pas classique :
Soit 2 approches possibles :

- la sortie ne présente pas de réel 1er dépassement. On peut considérer que le 2ème dépassement est plus important, et qu'il est caractéristique : $|D_{2\%}| = \dfrac{1-0.7}{1} = 0.3$ soit $|D_{2\%}| = 30\%$
- la sortie est toujours inférieure à l'entrée, donc pas de dépassement. En faisant l'analogie avec un 2ème ordre, le coefficient d'amortissement ξ est toujours supérieur à 1.

Partie II – Etude d'un concentrateur solaire

I.3 - Equation de la surface réfléchissante

Q14)
Les lois de la réflexion s'énoncent ainsi :

- le rayon réfléchi, le rayon incident et la normale (au dioptre) sont contenus dans le plan d'incidence ;
- les angles incidents et réfléchis sont égaux en valeurs absolues ; α_I et α_R vérifient : $\alpha_I = -\alpha_R$.

En projetant : $\overrightarrow{e_R} = \cos\alpha_R \cdot \vec{n} + \sin\alpha_R \cdot \vec{t}$ et $-\overrightarrow{e_I} = \cos\alpha_I \cdot \vec{n} + \sin\alpha_I \cdot \vec{t}$

Soit : $\overrightarrow{e_R} - \overrightarrow{e_I} = \left(\cos\alpha_R \cdot \vec{n} + \sin\alpha_R \cdot \vec{t}\right) + \left(\cos\alpha_I \cdot \vec{n} + \sin\alpha_I \cdot \vec{t}\right) = \cos(-\alpha_I)\cdot\vec{n} + \sin(-\alpha_I)\cdot\vec{t} + \cos\alpha_I \cdot \vec{n} + \sin\alpha_I \cdot \vec{t}$

$\overrightarrow{e_R} - \overrightarrow{e_I} = \cos(\alpha_I)\cdot\vec{n} - \sin(\alpha_I)\cdot\vec{t} + \cos\alpha_I \cdot \vec{n} + \sin\alpha_I \cdot \vec{t} = 2\cos\alpha_I \cdot \vec{n}$

Or $\cos(\alpha_I) = -\overrightarrow{e_I}\cdot\vec{n}$ donc : $\overrightarrow{e_R} = \overrightarrow{e_I} - 2\left(\overrightarrow{e_I}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n}$.

Q15)
a)

En coordonnées cylindriques, $\begin{cases} x = r\cdot\cos(\theta) \\ y = r\cdot\sin(\theta) \end{cases}$

$\overrightarrow{e_r}(\theta) = \cos(\theta)\cdot\vec{i} + \sin(\theta)\cdot\vec{j}$ et $\overrightarrow{e_\theta}(\theta) = -\sin(\theta)\cdot\vec{i} + \cos(\theta)\cdot\vec{j}$

b)

L'énoncé donne : $G(r,\theta,z)=G(x(r,\theta),y(r,\theta),z)$ donc $\frac{\partial G}{\partial \theta}(r,\theta,z)=\frac{\partial G}{\partial \theta}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)$.

Or z ne dépend pas de θ. Donc :

$$\frac{\partial G}{\partial \theta}(r,\theta,z)=\frac{\partial G}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta)+\frac{\partial G}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)+\frac{\partial G}{\partial z}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\cdot 0$$

Or $\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta)=-r\cdot\sin(\theta)$ et $\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)=r\cdot\cos(\theta)$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta}(r,\theta,z)=-\frac{\partial G}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\cdot r\cdot\sin(\theta)+\frac{\partial G}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\cdot r\cdot\cos(\theta)+\frac{\partial G}{\partial z}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\cdot 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta}(r,\theta,z)=r\cdot\left(-\frac{\partial G}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\cdot\sin(\theta)+\frac{\partial G}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\cdot\cos(\theta)+\frac{\partial G}{\partial z}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\cdot 0\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta}(r,\theta,z)=r\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\\ \frac{\partial G}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\\ \frac{\partial G}{\partial z}(x(r,\theta),y(r,\theta),z)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\\ 0\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,z)\\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y,z)\\ \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\\ 0\end{pmatrix}$$

Finalement : $\frac{\partial G}{\partial \theta}(r,\theta,z)=r\cdot\vec{\nabla}G(r,\theta,z)\cdot\vec{e_\theta}$

c)

- D'après la figure 9, $\vec{e_I}=-\vec{k}=-\vec{e_z}$ et les rayons incidents passent par le point M, donc ils sont portés par $\left(M,\vec{e_z}\right)$.

  Or $\overrightarrow{FM}$ est dans le plan $\left(F,\vec{e_r},\vec{e_z}\right)$ par construction de ce repère, donc le point M est dans le plan $\left(F,\vec{e_r},\vec{e_z}\right)$, donc les rayons incidents sont dans le plan $\left(F,\vec{e_r},\vec{e_z}\right)$.

- F est supposé concentrer, après réflexion, les rayons lumineux initialement dirigés selon $-\vec{k}\left(=-\vec{e_z}\right)$.

  Donc les rayons réfléchis sont portés par $\left(M,\overrightarrow{FM}\right)$.

  Or $\overrightarrow{FM}$ est dans le plan $\left(F,\vec{e_r},\vec{e_z}\right)$ par construction de ce repère,

  donc les rayons réfléchis sont dans le plan $\left(F,\vec{e_r},\vec{e_z}\right)$.

- D'après la lois de réflexion de Snell-Descartes, le vecteur normal à la surface $\mathcal{S}_g$ $\vec{n}$ est dans le plan $\left(F,\vec{e_r},\vec{e_z}\right)$.

Donc $\vec{n}$ n'a aucune composante sur $\vec{e_\theta}$ et $\vec{n}$ est dirigé par le vecteur $\nabla G(r,\theta,z)$.

D'où $\nabla G(r,\theta,z)\cdot\vec{e_\theta}=0$ donc $\frac{\partial G}{\partial \theta}(r,\theta,z)=0$.

La courbe $\mathcal{S}_g$ décrite par l'équation cartésienne $G(x,y,z)=0$ ne présente pas de variation suivant le paramètre θ :

$\mathcal{S}_g$ est une surface de révolution d'axe $\left(F,\vec{e_z}\right)$.

Q16)

On a : $\vec{t} = \dfrac{\dfrac{d\overrightarrow{FM}}{dr}}{\left\|\dfrac{d\overrightarrow{FM}}{dr}\right\|}$, $\overrightarrow{FM} = r\cdot\vec{e_r} + g(r)\cdot\vec{e_z}$ et $\vec{n} = \vec{t}\wedge\vec{e_\theta}$.

Or $\dfrac{d\overrightarrow{FM}}{dr} = \dfrac{d\left(r\cdot\vec{e_r} + g(r)\cdot\vec{e_z}\right)}{dr} = \vec{e_r} + \dfrac{dg}{dr}(r)\cdot\vec{e_z} = \vec{e_r} + g'(r)\cdot\vec{e_z}$

Donc, avec les notations proposées, $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{FM}}{dr}\right\| = \sqrt{1+g'^2}$. Donc : $\vec{t} = \dfrac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\left(\vec{e_r} + g'\cdot\vec{e_z}\right)$

De plus :

$$\vec{n} = \vec{t}\wedge\vec{e_\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\left(\vec{e_r}+g'\cdot\vec{e_z}\right)\wedge\vec{e_\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\left(\vec{e_r}\wedge\vec{e_\theta}\right) + \frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\left(\vec{e_z}\wedge\vec{e_\theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\vec{e_z} + \frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\left(-\vec{e_r}\right)$$

Soit : $\vec{n} = -\dfrac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\vec{e_r} + \dfrac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\vec{e_z}$

Q17)

On admet que le point F n'est pas sur la courbe $\mathcal{C}_g$, donc $\left\|\overrightarrow{FM}\right\| \neq 0$ et $g(0)\neq 0$.

a)

Par construction sur la figure 9, le rayon réfléchi va de M vers F. On a donc, $\overline{e_R} = \dfrac{\overrightarrow{MF}}{\left\|\overrightarrow{MF}\right\|}$.

Par construction sur la figure 9, le rayon lumineux incident est suivant la droite $\left(M,\vec{e_z}\right)$. On a alors $-\vec{e_z} = \vec{e_I}$.

D'après la Question 14, $\vec{e_R} = \vec{e_I} - 2\left(\vec{e_I}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n}$, donc $\dfrac{\overrightarrow{MF}}{\left\|\overrightarrow{MF}\right\|} = -\vec{e_z} - 2\left(-\vec{e_z}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n}$ soit $\dfrac{\overrightarrow{MF}}{\left\|\overrightarrow{MF}\right\|} = -\left(\vec{e_z} - 2\left(\vec{e_z}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n}\right)$.

Finalement, $\dfrac{\overrightarrow{FM}}{\left\|\overrightarrow{FM}\right\|} = \vec{e_z} - 2\left(\vec{e_z}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n}$

b)

On a : $\vec{n} = -\dfrac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\vec{e_r} + \dfrac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\vec{e_z}$. De plus $\vec{e_z}\cdot\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+g'^2}}$, donc :

$$\vec{e_z} - 2\left(\vec{e_z}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n} = \vec{e_z} - \frac{2}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\left(-\frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\vec{e_r} + \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\cdot\vec{e_z}\right)$$

$$\vec{e_z} - 2\left(\vec{e_z}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n} = \frac{2\cdot g'}{1+g'^2}\cdot\vec{e_r} + \left(1-\frac{2}{1+g'^2}\right)\cdot\vec{e_z}$$

c)

$$\frac{\overrightarrow{FM}}{\left\|\overrightarrow{FM}\right\|}=\frac{r\cdot\overrightarrow{e_r}+g(r)\cdot\overrightarrow{e_z}}{\left\|r\cdot\overrightarrow{e_r}+g(r)\cdot\overrightarrow{e_z}\right\|}=\frac{r\cdot\overrightarrow{e_r}+g(r)\cdot\overrightarrow{e_z}}{\sqrt{r^2+g^2}}\text{, donc : }\frac{\overrightarrow{FM}}{\left\|\overrightarrow{FM}\right\|}=\frac{r}{\sqrt{r^2+g^2}}\cdot\overrightarrow{e_r}+\frac{g}{\sqrt{r^2+g^2}}\cdot\overrightarrow{e_z}$$

d)

En combinant les 3 questions précédentes : $\frac{r}{\sqrt{r^2+g^2}}=\frac{2\cdot g'}{1+g'^2}$ $(*)$ et $\frac{g}{\sqrt{r^2+g^2}}=1-\frac{2}{1+g'^2}$ $(**)$

D'après $(*)$, $g'=\frac{r\cdot(1+g'^2)}{2\sqrt{r^2+g^2}}$. Or $r\geq 0$, et $2\sqrt{r^2+g^2}>0$, donc $g'\geq 0$

De plus, toujours d'après $(*)$: $\frac{r}{\sqrt{r^2+g^2}}\cdot g=\frac{2\cdot g'}{1+g'^2}\cdot g$

donc $\frac{g}{\sqrt{r^2+g^2}}\cdot r=\frac{2\cdot g'}{1+g'^2}\cdot g$. Or : d'après $(**)$: $\frac{g}{\sqrt{r^2+g^2}}=\frac{g'^2-1}{1+g'^2}$

donc $\left(\frac{g'^2-1}{1+g'^2}\right)\cdot r=\frac{2\cdot g'}{1+g'^2}\cdot g$,

donc $\left(g'^2-1\right)\cdot r=2\cdot g'\cdot g$

Donc : $r\cdot g'^2-r-2\cdot g'\cdot g=0$ avec $r\in\mathbb{R}_+$

Donc, en considérant $r\neq 0$ et en divisant par r : $g'^2-2\cdot\frac{g}{r}\cdot g'-1=0$, pour tout $r\in\mathbb{R}_+^*$.

Q18)

a)

$X^2-2\cdot\frac{g}{r}\cdot X-1=0$. Calculons le déterminant : $\Delta=\left(2\cdot\frac{g}{r}\right)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=4\cdot\left(\left(\frac{g}{r}\right)^2+1\right)=4\cdot\frac{g^2+r^2}{r^2}$

$\Delta>0$ et les 2 solutions réelles sont : $X_i=\dfrac{2\cdot\frac{g}{r}\pm\sqrt{4\cdot\frac{g^2+r^2}{r^2}}}{2}=\frac{g}{r}\pm\sqrt{\frac{g^2+r^2}{r^2}}$

$X_1=\frac{g+\sqrt{g^2+r^2}}{r}>0$ car $\sqrt{g^2+r^2}>|g|$ et $X_2=\frac{g-\sqrt{g^2+r^2}}{r}<0$ car $\sqrt{g^2+r^2}>|g|$

Donc la seule solution positive est : $X=\frac{g+\sqrt{g^2+r^2}}{r}$

b)

Comme $X=g'$ et $g'>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $g'=\frac{g+\sqrt{g^2+r^2}}{r}$

c)

$h(r)=\dfrac{g(r)}{r}$, avec $r>0$.

Alors $h'(r)=\dfrac{g'(r)\cdot r-g(r)}{r^2}$ soit $r^2\cdot h'(r)=g'(r)\cdot r-g(r)$.

Or $g'=\dfrac{g+\sqrt{g^2+r^2}}{r}$ donc $r^2\cdot h'(r)=\dfrac{g(r)+\sqrt{g^2(r)+r^2}}{r}\cdot r-g(r)=\sqrt{g^2(r)+r^2}=r\cdot\sqrt{\left(\dfrac{g(r)}{r}\right)^2+1}$

Finalement : $r^2\cdot h'(r)=r\cdot\sqrt{h^2(r)+1}$ soit, $\forall r>0$, $\dfrac{h'(r)}{\sqrt{h^2(r)+1}}=\dfrac{1}{r}$ car $\sqrt{h^2(r)+1}\neq 0$.

Donc h est solution de l'équation différentielle $\dfrac{h'}{\sqrt{1+h^2}}=\dfrac{1}{r}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q19)

a)

Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$. On note v la fonction : $r\mapsto\dfrac{kr}{2}-\dfrac{1}{2kr}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors : $v^2(r)=\left(\dfrac{kr}{2}-\dfrac{1}{2kr}\right)^2=\dfrac{k^2r^2}{4}-2\cdot\dfrac{kr}{2}\cdot\dfrac{1}{2kr}+\dfrac{1}{4k^2r^2}=\dfrac{k^2r^2}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4k^2r^2}$

Donc : $1+v^2(r)=\dfrac{k^2r^2}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4k^2r^2}=\left(\dfrac{kr}{2}+\dfrac{1}{2kr}\right)^2$.

On peut écrire : $\sqrt{1+v^2(r)}=\sqrt{\left(\dfrac{kr}{2}+\dfrac{1}{2kr}\right)^2}$ Or $k\in\mathbb{R}_+^*$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$ donc $\sqrt{1+v^2(r)}=\dfrac{kr}{2}+\dfrac{1}{2kr}=r\cdot\left(\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2kr^2}\right)$

Or $v'(r)=\dfrac{k}{2}+\dfrac{2k}{2kr^2}$

On a donc $\sqrt{1+v^2(r)}=r\cdot v'(r)$, soit $\dfrac{v'(r)}{\sqrt{1+v^2(r)}}=\dfrac{1}{r}$. v est donc solution de l'équation différentielle (15)

b)

Les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de $r\mapsto\dfrac{1}{r}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$: $r\mapsto\ln(r)+\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$

c)

L'équation à résoudre est : $Y+\sqrt{1+Y^2}=A$, avec $A\in\mathbb{R}_+^*$.

$Y+\sqrt{1+Y^2}=A$ donc $\sqrt{1+Y^2}=A-Y$

donc $1+Y^2=(A-Y)^2$

donc $1+Y^2=A^2-2AY+Y^2$

donc $1=A^2-2AY$

donc $Y=\dfrac{A^2-1}{2A}$ car $A\neq 0$

Finalement $Y=\dfrac{A}{2}-\dfrac{1}{2A}$

d)

L'énoncé donne la fonction $H : r \mapsto \ln\left(h+\sqrt{1+h^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou h est solution de (15).

$$H'(r) = \frac{\left(h+\sqrt{1+h^2}\right)'}{h+\sqrt{1+h^2}} = \frac{h' + \dfrac{2hh'}{2\sqrt{1+h^2}}}{h+\sqrt{1+h^2}} = \frac{\dfrac{h'}{\sqrt{1+h^2}}\cdot\left(\sqrt{1+h^2}+h\right)}{h+\sqrt{1+h^2}} = \frac{h'}{\sqrt{1+h^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+h^2}+h}{h+\sqrt{1+h^2}}$$

Donc $H'(r) = \dfrac{h'}{\sqrt{1+h^2}}$

Puisque h est solution de (15) $H'(r) = \dfrac{1}{r}$

e)

$H'(r) = \dfrac{1}{r}$.

Donc, d'après la question b), $H(r) = \ln(r) + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $\ln\left(h+\sqrt{1+h^2}\right) = \ln(r) + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$\ln\left(h+\sqrt{1+h^2}\right) = \ln(r) + \lambda$ donc $e^{\ln\left(h+\sqrt{1+h^2}\right)} = e^{\ln(r)+\lambda} = e^{\ln(r)}\cdot e^{\lambda}$ donc $h+\sqrt{1+h^2} = r\cdot e^{\lambda}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

En notant $k = e^{\lambda}$, d'après le résultat de la question c) que l'on peut appliquer avec $A = kr$, puisque $kr > 0$:

$h(r) = \dfrac{kr}{2} - \dfrac{1}{2kr}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

f)

D'après les résultats des questions d) et e), si h est solution de (15), alors h s'écrit $r \mapsto \dfrac{kr}{2} - \dfrac{1}{2kr}$ avec $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Or, d'après le résultat de la question a) cette forme de fonction est solution de (15).

Donc les solutions de (15) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $r \mapsto \dfrac{kr}{2} - \dfrac{1}{2kr}$ avec $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Q20)

On rappelle que $h(r) = \dfrac{g(r)}{r}$, donc $g(r) = h(r)\cdot r$.

La question précédente a permis d'établir $h(r) = \dfrac{kr}{2} - \dfrac{1}{2kr}$. Donc $g(r) = \dfrac{kr^2}{2} - \dfrac{1}{2k}$

On rappelle que pour M dans C_g, $\overrightarrow{FM} = r\cdot\overrightarrow{e_r} + g(r)\cdot\overrightarrow{e_z}$. Donc, pour $r = 0$, $\overrightarrow{FM} = g(0)\cdot\overrightarrow{e_z}$.

De plus, pour $r = 0$, $\overrightarrow{FM} = -f\cdot\overrightarrow{e_z}$, donc $g(0) = -f$.

Comme $g(r) = \dfrac{kr^2}{2} - \dfrac{1}{2k}$, alors $g(0) = -\dfrac{1}{2k}$.

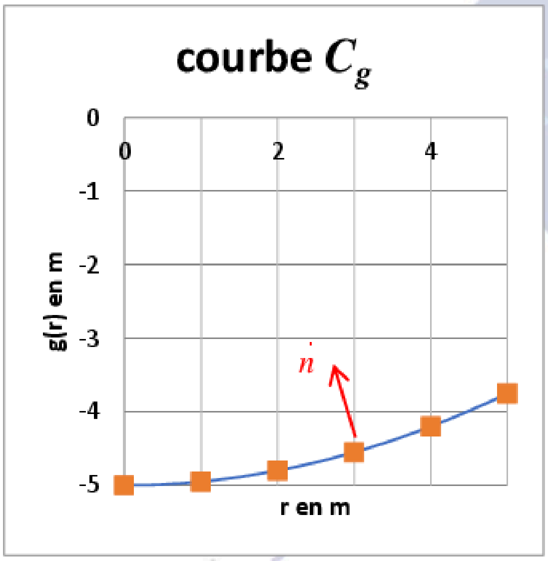
Donc : $f = \dfrac{1}{2k}$,

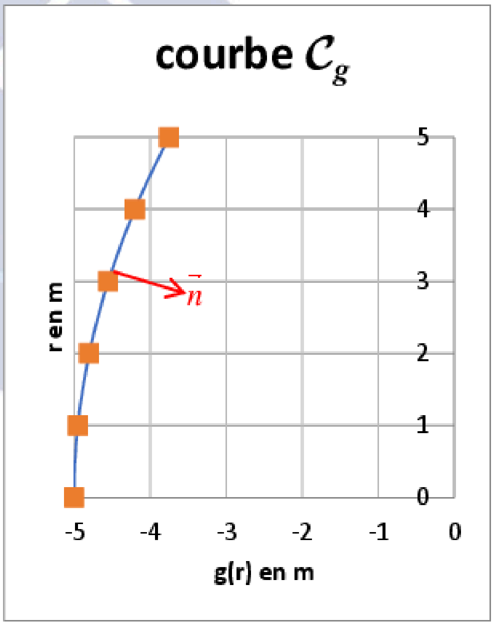
Or $g(r) = \dfrac{2kr^2}{4} - \dfrac{1}{2k} = \dfrac{r^2}{4\cdot\dfrac{1}{2k}} - \dfrac{1}{2k}$ Donc : $g(r) = \dfrac{r^2}{4f} - f$

Q21)

La courbe C_g est l'ensemble des points M de paramètre $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\overrightarrow{FM} = r \cdot \overrightarrow{e_r} + g(r) \cdot \overrightarrow{e_z}$.

r en m	$g(r)$ en m		
0	$g(0) = -f$	$g(0) = -5$	$g(0) = -5.0$
1	$g(1) = \frac{1^2}{4f} - f$	$g(1) = \frac{1^2}{4 \cdot 5} - 5 = \frac{1}{20} - 5 = 0.05 - 5$	$g(1) = -4.95$ $g(1) = -5.0$ à 0.1 près consigne contestable ici
2	$g(2) = \frac{2^2}{4f} - f$	$g(2) = \frac{2^2}{4 \cdot 5} - 5 = \frac{1}{5} - 5 = 0.2 - 5$	$g(2) = -4.8$
3	$g(3) = \frac{3^2}{4f} - f$	$g(3) = \frac{9}{4 \cdot 5} - 5 = \frac{9}{20} - 5 = 0.45 - 5$	$g(3) = -4.55$ $g(3) = -4.6$ à 0.1 près
4	$g(4) = \frac{4^2}{4f} - f$	$g(4) = \frac{4^2}{4 \cdot 5} - 5 = \frac{4}{5} - 5 = 0.8 - 5$	$g(4) = -4.2$
5	$g(5) = \frac{5^2}{4f} - f$	$g(5) = \frac{5^2}{4 \cdot 5} - 5 = \frac{5}{4} - 5 = 1.25 - 5$	$g(5) = -3.75$ $g(5) = -3.8$ à 0.1 près





On a : $g(r) = \frac{r^2}{4f} - f$ et $g'(r) = \frac{r}{2f}$ d'après la question **Q20)**. Donc $g'(3) = \frac{3}{2 \cdot 5} = 0.3$

Donc la tangente est dirigée par le vecteur $(1, 0.3)$ donc la normale, perpendiculaire à la tangente, est dirigée par le vecteur $(-0.3, 1)$.

Q22)

a)

L'énoncé donne $\overrightarrow{FM} = \rho(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_\varphi}\left(=\rho\cdot\overrightarrow{e_\varphi}\right)$. Or, en projetant, $\overrightarrow{e_\varphi} = -\cos(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_z} + \sin(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_r}$.

Donc $\overrightarrow{FM} = \rho\cdot\left(-\cos(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_z} + \sin(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_r}\right) = \rho\cdot\sin(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_r} - \rho\cdot\cos(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_z}$.

Précédemment, $\overrightarrow{FM} = r\cdot\overrightarrow{e_r} + z\cdot\overrightarrow{e_z}$. Par identification, il vient : $\begin{cases} r = \rho\cdot\sin(\varphi) \\ z = -\rho\cdot\cos(\varphi) \end{cases}$

b)

L'énoncé donne $z = g(r)$. Or $g(r) = \dfrac{r^2}{4f} - f$, donc $z = \dfrac{r^2}{4f} - f$.

En utilisant les résultats précédents, $-\rho\cdot\cos(\varphi) = \dfrac{\left(\rho\cdot\sin(\varphi)\right)^2}{4f} - f$

Donc, ρ est solution de $\rho^2\cdot\dfrac{\sin^2(\varphi)}{4f} + \rho\cdot\cos(\varphi) - f = 0$

c)

Si $\varphi = 0$, l'équation devient $\rho - f = 0$, et $\rho = f = \dfrac{2f}{1+\cos(0)}$.

Pour $\varphi \neq 0$, calculons le discriminant : $\Delta = \cos^2(\varphi) - 4\cdot\dfrac{\sin^2(\varphi)}{4f}\cdot(-f) = 1$,

donc les solutions de l'équation sont : $\rho_i = \dfrac{-\cos(\varphi)\pm 1}{2\cdot\dfrac{\sin^2(\varphi)}{4f}}$

Or $\rho > 0$, donc $\rho = 2f\cdot\dfrac{-\cos(\varphi)+1}{\sin^2(\varphi)} = 2f\cdot\dfrac{-\cos(\varphi)+1}{1-\cos^2(\varphi)} = 2f\cdot\dfrac{-\cos(\varphi)+1}{\left(1-\cos(\varphi)\right)\left(1+\cos(\varphi)\right)}$

Donc : $\rho(\varphi) = \dfrac{2f}{1+\cos(\varphi)}$ avec $\varphi \in \left]0;\pi\right[$.

Comme $\rho(0) = \dfrac{2f}{1+\cos(0)}$, Finalement : $\rho(\varphi) = \dfrac{2f}{1+\cos(\varphi)}$ avec $\varphi \in \left[0;\pi\right[$

Q23)

D'après l'énoncé, $r_m = f$. Donc $z_m = \dfrac{r_m^2}{4f} - f = \dfrac{f^2}{4f} - f = \dfrac{f}{4} - f = -\dfrac{3}{4}f$

D'après la question précédente, $\begin{cases} r_m = \rho_m\cdot\sin(\varphi_m) \\ z_m = -\rho_m\cdot\cos(\varphi_m) \end{cases}$, soit $\begin{cases} \dfrac{r_m}{z_m} = -\dfrac{\rho_m\cdot\sin(\varphi_m)}{\rho_m\cdot\cos(\varphi_m)} \\ r_m^2 + z_m^2 = \left(\rho_m\cdot\sin(\varphi_m)\right)^2 + \left(\rho_m\cdot\cos(\varphi_m)\right)^2 \end{cases}$

Et $\begin{cases} \dfrac{r_m}{z_m} = -\tan(\varphi_m) \\ r_m^2 + z_m^2 = \rho_m^2 \end{cases}$. En remplaçant r_m et z_m, $\begin{cases} \dfrac{f}{-\frac{3}{4}f} = -\tan(\varphi_m) \\ f^2 + \left(-\frac{3}{4}f\right)^2 = \rho_m^2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} \dfrac{4}{3} = \tan(\varphi_m) \\ f^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \rho_m^2 \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} \tan(\varphi_m) = \dfrac{4}{3} \\ \rho_m^2 = f^2 \cdot \left(\dfrac{16+9}{16}\right) \end{cases}$. Finalement : $\begin{cases} \tan(\varphi_m) = \dfrac{4}{3} \\ \rho_m = \rho(\varphi_m) = \dfrac{5}{4} \cdot f \end{cases}$

De plus $\begin{cases} \sin(\varphi_m) = \dfrac{r_m}{\rho_m} \\ \cos(\varphi_m) = -\dfrac{z_m}{\rho_m} \end{cases}$, soit $\begin{cases} \sin(\varphi_m) = \dfrac{f}{\frac{5}{4} \cdot f} \\ \cos(\varphi_m) = -\left(-\dfrac{3}{4}f\right) \cdot \dfrac{1}{\frac{5}{4} \cdot f} \end{cases}$ et finalement : $\begin{cases} \sin(\varphi_m) = \dfrac{4}{5} \\ \cos(\varphi_m) = \dfrac{3}{5} \end{cases}$

Q24)

a)

Par définition, $\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{e_\varphi}\right) = \left\|\overrightarrow{MP}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{e_\varphi}\right\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$, or l'angle entre $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ est α_0 (le signe n'a pas d'importance ici) et $\overrightarrow{e_\varphi}$ est un vecteur unitaire, donc $\left\|\overrightarrow{e_\varphi}\right\| = 1$.

On retrouve $\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{e_\varphi}\right)^2 = \left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2 \cdot \cos^2(\alpha_0)$

b)

$\overrightarrow{FP} = X \cdot \overrightarrow{e_r} + Y \cdot \overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{FM} = \rho \cdot \overrightarrow{e_\varphi}$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FP} = -\rho \cdot \overrightarrow{e_\varphi} + X \cdot \overrightarrow{e_r} + Y \cdot \overrightarrow{e_\theta}$.

$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{e_\varphi} = -\rho \cdot \left(\overrightarrow{e_\varphi} \cdot \overrightarrow{e_\varphi}\right) + X \cdot \left(\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_\varphi}\right) + Y \cdot \left(\overrightarrow{e_\theta} \cdot \overrightarrow{e_\varphi}\right) = -\rho \cdot 1 + X \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) + Y \cdot 0 = -\rho + X \cdot \sin(\varphi)$.

$\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{e_\varphi}\right)^2 = \left(X \cdot \sin(\varphi) - \rho\right)^2$

c)

$\overrightarrow{MP} = -\rho \cdot \overrightarrow{e_\varphi} + X \cdot \overrightarrow{e_r} + Y \cdot \overrightarrow{e_\theta} = -\rho\left(-\cos(\varphi) \cdot \overrightarrow{e_z} + \sin(\varphi) \cdot \overrightarrow{e_r}\right) + X \cdot \overrightarrow{e_r} + Y \cdot \overrightarrow{e_\theta}$

$\overrightarrow{MP} = \left(X - \rho \cdot \sin(\varphi)\right) \cdot \overrightarrow{e_r} + Y \cdot \overrightarrow{e_\theta} + \rho \cdot \cos(\varphi) \cdot \overrightarrow{e_z}$

$\left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2 = \left(X - \rho \cdot \sin(\varphi)\right)^2 + Y^2 + \rho^2 \cdot \cos^2(\varphi) = X^2 - 2 \cdot X \cdot \rho \cdot \sin(\varphi) + \rho^2 \cdot \sin^2(\varphi) + Y^2 + \rho^2 \cdot \cos^2(\varphi)$

$\left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2 = X^2 - 2 \cdot \rho \cdot X \cdot \sin(\varphi) + Y^2 + \rho^2$

d)

$\left(\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{e_\varphi}\right)^2=\left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2\cdot\cos^2(\alpha_0)$ et $\left(\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{e_\varphi}\right)^2=\left(X\cdot\sin(\varphi)-\rho\right)^2$.

Donc $\left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2\cdot\cos^2(\alpha_0)=\left(X\cdot\sin(\varphi)-\rho\right)^2$.

Avec le résultat précédent : $\left(X^2-2\cdot\rho\cdot X\cdot\sin(\varphi)+Y^2+\rho^2\right)\cdot\cos^2(\alpha_0)=X^2\cdot\sin^2(\varphi)-2\cdot\rho\cdot X\cdot\sin(\varphi)+\rho^2$

$$X^2\cdot\cos^2(\alpha_0)-2\cdot\rho\cdot X\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos^2(\alpha_0)+Y^2\cdot\cos^2(\alpha_0)+\rho^2\cdot\cos^2(\alpha_0)=X^2\cdot\sin^2(\varphi)-2\cdot\rho\cdot X\cdot\sin(\varphi)+\rho^2$$

$$X^2\cdot\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)+2\cdot\rho\cdot X\cdot\sin(\varphi)\cdot\left(1-\cos^2(\alpha_0)\right)+Y^2\cdot\cos^2(\alpha_0)-\rho^2\cdot\left(1-\cos^2(\alpha_0)\right)=0$$

$$X^2\cdot\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)+2\cdot\rho\cdot X\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)+Y^2\cdot\cos^2(\alpha_0)-\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)=0$$

Remarque :

Cette équation n'est pas homogène. La rendre homogène pour répondre à la question semble impossible, car α_0 et ρ ne sont pas nuls. Les calculs à mener pour obtenir la forme proposée dans la suite de l'énoncé (pas demandé) sont donnés à la fin, en annexe.

Q25)

La quantité $\int_0^{\tilde a} Y(X)\,dX$ représente un quart de l'aire délimitée par la courbe $\tilde C_\varphi$. On note $\dfrac{\tilde A_\varphi}{4}=\int_0^{\tilde a} Y(X)\,dX$

On a $\begin{cases}X=\tilde a\cdot\cos(t)\\ Y=\tilde b\cdot\sin(t)\end{cases}$ avec $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, pour l'arc considéré.

On en déduit :

$dX=-\tilde a\cdot\sin(t)\,dt$. De plus $X=0$ pour $t=\dfrac{\pi}{2}$ et $X=\tilde a$ pour $t=0$.

En effectuant un changement de variable : $\int_0^{\tilde a} Y(X)\,dX=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} Y(t)\cdot\tilde a\cdot\sin(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Y(t)\cdot\tilde a\cdot\sin(t)\,dt$.

Donc $\dfrac{\tilde A_\varphi}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tilde b\cdot\sin(t)\cdot\tilde a\cdot\sin(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tilde a\cdot\tilde b\cdot\sin^2(t)\,dt=\tilde a\cdot\tilde b\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos(2t)}{2}\,dt=\dfrac{\tilde a\cdot\tilde b}{2}\cdot\left[t-\dfrac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$.

Et $\dfrac{\tilde A_\varphi}{4}=\dfrac{\tilde a\cdot\tilde b}{2}\cdot\left[\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2}-\left(0-\dfrac{\sin(2\cdot 0)}{2}\right)\right]=\dfrac{\tilde a\cdot\tilde b}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$.

Il vient : $\tilde A_\varphi=\tilde a\cdot\tilde b\cdot\pi$

Q26)

a)

$\overrightarrow{e_\varphi}=-\cos(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_z}+\sin(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_r}$ donc $\dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}=\sin(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_z}+\cos(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_r}$ et $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\right\|=\sqrt{\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)}=1$.

Donc $\dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}$ est unitaire.

$$\overrightarrow{e_\varphi}\cdot\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}=\left(-\cos(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_z}+\sin(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_r}\right)\cdot\left(\sin(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_z}+\cos(\varphi)\cdot\overrightarrow{e_r}\right)=-\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)+\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$$

Donc $\overrightarrow{e_\varphi}\cdot\dfrac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}=0$.

b)

$$ds = \left\| \frac{d\overrightarrow{FM}}{d\varphi}(\varphi) \right\| d\varphi.$$

Or $\overrightarrow{FM} = \rho \cdot \vec{e_\varphi}$ donc $\dfrac{d\overrightarrow{FM}}{d\varphi}(\varphi) = \dfrac{d\left(\rho \cdot \vec{e_\varphi}\right)}{d\varphi} = \dfrac{d\rho}{d\varphi} \cdot \vec{e_\varphi} + \rho \cdot \dfrac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} = \dfrac{d\rho}{d\varphi} \cdot \vec{e_\varphi} + \rho \cdot \dfrac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} = \rho' \cdot \vec{e_\varphi} + \rho \cdot \dfrac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi}$.

$\left\| \dfrac{d\overrightarrow{FM}}{d\varphi}(\varphi) \right\| = \left\| \rho' \cdot \vec{e_\varphi} + \rho \cdot \dfrac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} \right\|$. Or $\left\| \vec{e_\varphi} \right\| = 1$ et $\left\| \dfrac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} \right\| = 1$. De plus $\vec{e_\varphi} \cdot \dfrac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} = 0$ donc $\vec{e_\varphi}$ orthogonal à $\dfrac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi}$.

Ainsi : $\left\| \dfrac{d\overrightarrow{FM}}{d\varphi}(\varphi) \right\| = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}$ et $\underline{ds = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi}$

c)

On a établi, à la **Q22)**, que $\rho(\varphi) = \dfrac{2f}{1+\cos(\varphi)}$.

$$\frac{d\rho}{d\varphi}(\varphi) = -2f \frac{-\sin(\varphi)}{\left(1+\cos(\varphi)\right)^2} = \frac{2f}{1+\cos(\varphi)} \cdot \frac{\sin(\varphi)}{1+\cos(\varphi)} = \rho(\varphi) \cdot \frac{\sin(\varphi)}{1+\cos(\varphi)} = \rho(\varphi) \cdot \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi}(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \rho(\varphi) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \rho(\varphi) \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

<u>On obtient, avec les notations proposées :</u> $\underline{\rho' = \rho \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

d)

$dP = 2\pi \cdot \eta \cdot p_0 \cdot \dfrac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi} \cdot \cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) \cdot r \cdot ds$. Or $\tilde{A}_\varphi = \tilde{a} \cdot \tilde{b} \cdot \pi$ et $ds = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi$.

D'après la figure 12(b), il vient : $r = \left\| \overrightarrow{FM} \right\| \cdot \sin(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$

Par définition, $\tilde{a}(\varphi) = \dfrac{\rho(\varphi) \cdot \tan(\alpha_0)}{\cos(\varphi)}$ et $\tilde{b}(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \tan(\alpha_0)$ et par ailleurs, $\rho(\varphi) = \dfrac{2f}{1+\cos(\varphi)}$

On en déduit :

$\tilde{A}_0 = \tilde{a}_0 \cdot \tilde{b}_0 \cdot \pi$ avec $\rho(0) = \dfrac{2f}{1+\cos(0)} = f$, $\tilde{a}_0 = f \cdot \tan(\alpha_0)$ et $\tilde{b}_0 = f \cdot \tan(\alpha_0)$.

$\tilde{A}_\varphi = \tilde{a} \cdot \tilde{b} \cdot \pi$ avec $\tilde{a}(\varphi) = \dfrac{\rho(\varphi) \cdot \tan(\alpha_0)}{\cos(\varphi)}$ et $\tilde{b}(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \tan(\alpha_0)$

Ainsi : $\dfrac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi} = \dfrac{f^2 \cdot \tan^2(\alpha_0) \cdot \pi}{\dfrac{\rho(\varphi) \cdot \tan(\alpha_0)}{\cos(\varphi)} \cdot \rho(\varphi) \cdot \tan(\alpha_0) \cdot \pi} = \dfrac{f^2}{\dfrac{\rho^2(\varphi)}{\cos(\varphi)}} = \dfrac{f^2}{\rho^2(\varphi)} \cdot \cos(\varphi)$

$ds=\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi=\sqrt{\rho^2\cdot\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\rho^2}\,d\varphi=\sqrt{\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)+1}\cdot\rho d\varphi=\frac{\rho}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}d\varphi$. Soit $ds=\frac{\rho(\varphi)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi$

En remplaçant dans $dP=2\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot\frac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot r\cdot ds$

$$dP=2\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot\frac{f^2}{\rho^2(\varphi)}\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\rho(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\cdot\frac{\rho(\varphi)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi=2\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot f^2\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)d\varphi$$

Il vient : $dP=2\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot f^2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)d\varphi$

e)

$$P=\int dP=\int_0^{\varphi_m}2\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot f^2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)d\varphi=\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot f^2\cdot\int_0^{\varphi_m}2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)d\varphi$$

$$P=\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot f^2\cdot\int_0^{\varphi_m}\sin(2\varphi)d\varphi=\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot f^2\cdot\left[-\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right]_0^{\varphi_m}=\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot f^2\cdot\left[-\frac{\cos(2\varphi_m)}{2}-\left(-\frac{\cos(2\cdot 0)}{2}\right)\right]$$

$$P=\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot f^2\cdot\frac{1-\cos(2\varphi_m)}{2}$$

f)

$$P=\pi\cdot\eta\cdot p_0\cdot f^2\cdot\frac{1-\cos(2\varphi_m)}{2}$$

La question Q23) nous donne : $\sin(\varphi_m)=\frac{4}{5}$ et $\cos(\varphi_m)=\frac{3}{5}$.

Or $\cos(2\varphi_m)=\cos^2(\varphi_m)-\sin^2(\varphi_m)$, soit $\cos(2\varphi_m)=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$.

Donc $P=\pi\cdot 0.7\cdot 1000\cdot 5^2\cdot\frac{1-\frac{-7}{25}}{2}$

Finalement, $P=35.2kW$

ANNEXE Q24c

Calculs à mener pour obtenir la forme proposée dans la suite de l'énoncé :

$$X^2\cdot\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)+2\cdot\rho\cdot X\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)+Y^2\cdot\cos^2(\alpha_0)=\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)$$

$$X^2+\frac{2\cdot\rho.\sin(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}X+\frac{\cos^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}Y^2=\frac{\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}$$

$$X^2+\frac{2\cdot\rho.\sin(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}X+\frac{\rho^2.\sin^2(\varphi)\cdot\sin^4(\alpha_0)}{\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)^2}+\frac{\cos^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}Y^2$$

$$=\frac{\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}+\frac{\rho^2.\sin^2(\varphi)\cdot\sin^4(\alpha_0)}{\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)^2}$$

$$\left(X+\frac{\rho.\sin(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}\right)^2+\frac{\cos^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}Y^2=\frac{\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}\left(1+\frac{\sin^2(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}\right)$$

$$\frac{\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)^2}{\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)}\cdot\left(X+\frac{\rho.\sin(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}\right)^2+\frac{\cos^2(\alpha_0)\cdot\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)}{\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)}Y^2$$

$$=\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)$$

Or :

$$\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)=\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\cdot\left(1-\sin^2(\alpha_0)\right)=\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\cdot\cos^2(\alpha_0)$$

$$\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)=\cos^2(\alpha_0)\cdot\left(1-\sin^2(\varphi)\right)=\cos^2(\alpha_0)\cdot\cos^2(\varphi)$$

Donc :

$$\frac{\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)^2}{\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)}\cdot\left(X+\frac{\rho.\sin(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}\right)^2+\frac{\cos^2(\alpha_0)\cdot\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)}{\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)}Y^2=\cos^2(\alpha_0)\cdot\cos^2(\varphi)$$

$$\frac{\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)^2}{\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)\cdot\cos^2(\alpha_0)\cdot\cos^2(\varphi)}\cdot\left(X+\frac{\rho.\sin(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}\right)^2+\frac{\cos^2(\alpha_0)\cdot\left(\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)\right)}{\rho^2\cdot\sin^2(\alpha_0)\cdot\cos^2(\alpha_0)\cdot\cos^2(\varphi)}Y^2=1$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme : $\frac{(X+X_C)^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$*, avec :*

$$X_C=\frac{\rho.\sin(\varphi)\cdot\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)},\qquad a=\frac{\rho\cdot\sin(\alpha_0)\cdot\cos(\alpha_0)\cdot\cos(\varphi)}{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)},\qquad b=\frac{\rho\cdot\sin(\alpha_0)\cdot\cos(\alpha_0)\cdot\cos(\varphi)}{\cos(\alpha_0)\cdot\sqrt{\cos^2(\alpha_0)-\sin^2(\varphi)}}$$