

Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2021

Filière : PT

Épreuve : Sciences Industrielles A

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

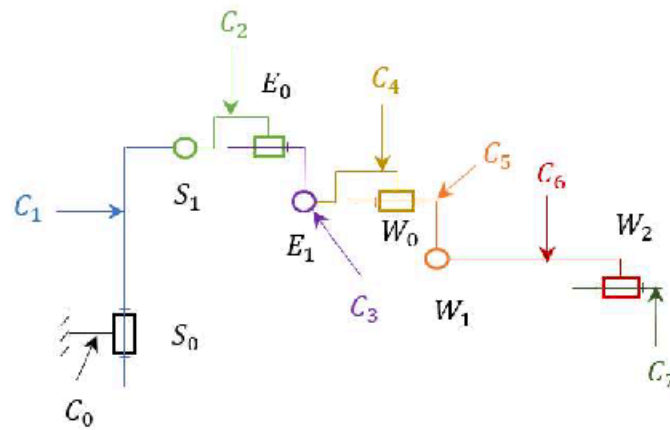
L'équipe UPSTI

Robot BAXTER

Corrigé UPSTI

PARTIE 1. ETUDE CINEMATIQUE D'UN BRAS DU ROBOT BAXTER

Question 1



Question 2

Il s'agit de donner l'expression de la matrice de rotation d'axe (O, \vec{z}_0) et d'angle de mesure θ .

Par définition :

$$R_{01}^{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque :

D'un manière générale la place laissée sur le DR pour compléter les matrices ou vecteurs de cette partie laissait penser qu'il n'y avait que deux lignes. Cela a dû perturber certains élèves

Question 3

Il s'agit de donner l'expression de la matrice de rotation d'axe (O, \vec{x}_0) et d'angle de mesure α .

Par définition :

$$R_{01}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Question 4

La matrice R_{01} correspondant aux rotations successives d'angles θ et α s'obtient par produit des deux matrices précédentes. Le produit matriciel étant non commutatif, l'ordre des rotations doit être respecté.

$$R_{01} = R_{01}^\theta \cdot R_{01}^\alpha$$

On obtient :

$$R_{01} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Remarque :

La rédaction de la question évoque des rotations successives d'angles α et θ sans préciser l'ordre.

L'ordre des rotations n'étant pas explicite, le candidat aurait pu proposer : $R_{01} = R_{01}^\alpha \cdot R_{01}^\theta$ en suivant l'ordre d'écriture des angles dans la question.

Il fallait ici respecter l'ordre des cas étudiés dans les questions précédentes.

Question 5

Une relation de Chasles permet de déterminer l'expression du vecteur translation T_{01}

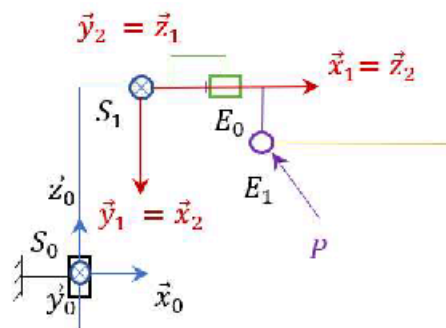
$$\overrightarrow{O_0P} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1P}$$

$$\begin{bmatrix} {}^0P \\ 1 \end{bmatrix} = T_{01} + \begin{bmatrix} {}^1P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par identification, le vecteur T_{01} correspond au vecteur $\overrightarrow{O_0O_1}$.

$$\text{Ce dernier a pour expression : } T_{01} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

Question 6



Question 7

Pour la matrice M_{01} :

- l'angle de l'axe \vec{x}_1 correspond à la variable articulaire θ_1 puisque la liaison entre les solides C_0 et C_1 correspond à la liaison pivot S_0 d'axe \vec{z}_0 .
- l'angle d'offset $\theta_{01} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ est nul
- la distance d_1 entre les axes \vec{x}_0 et \vec{x}_1 selon l'axe \vec{z}_0 correspond à la longueur L_1
- l'angle α_1 de l'axe \vec{z}_1 est nul
- l'angle d'offset $\alpha_{01} = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ vaut $-\frac{\pi}{2}$
- la distance a_1 entre les axes \vec{z}_0 et \vec{z}_1 selon l'axe \vec{x}_1 correspond à la longueur L_2

On en déduit l'expression de M_{01} :

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & L_2 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & L_2 \sin\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 8

Pour la matrice M_{12} :

- l'angle de l'axe \vec{x}_2 correspond à la variable articulaire θ_2 puisque la liaison entre les solides C_1 et C_2 correspond à la liaison pivot S_1 d'axe \vec{z}_1 .
- l'angle d'offset $\theta_{02} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ vaut $\frac{\pi}{2}$
- la distance entre les axes \vec{x}_1 et \vec{x}_2 selon l'axe \vec{z}_1 est nulle
- l'angle α_2 de l'axe \vec{z}_2 est nul
- l'angle d'offset $\alpha_{02} = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ vaut $\frac{\pi}{2}$
- la distance a_2 entre les axes \vec{z}_1 et \vec{z}_2 selon l'axe \vec{x}_2 est nulle

On en déduit l'expression de M_{12} :

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 9

La matrice d'attitude s'obtient par produit des deux matrices d'attitude M_{01} et M_{12} . En effet :

$$\begin{bmatrix} {}^0P \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01} \begin{bmatrix} {}^1P \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} {}^1P \\ 1 \end{bmatrix} = M_{12} \begin{bmatrix} {}^2P \\ 1 \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{bmatrix} {}^0P \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01} \cdot M_{12} \begin{bmatrix} {}^2P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par identification :

$$M_{02} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 & L_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 & L_2 \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque :

La matrice d'attitude proposée dans l'énoncé correspond à l'enchaînement :

- Rotation d'angle θ_i
- Translation de paramètre d
- Rotation d'angle α_i
- Translation de paramètre a

$M_{i-1 i}$ est obtenue à l'aide du produit matriciel :

$$M_{i-1 i} = R_{i-1 i}^{\theta} \cdot T_{i-1 i}^d \cdot R_{i-1 i}^{\alpha} \cdot T_{i-1 i}^a$$

où :

$$R_{i-1 i}^{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{i-1 i}^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{i-1 i}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{i-1 i}^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Au lieu d'avoir une superposition d'addition et de produits de matrices correspondant à des matrices de rotation et de translation de taille 3×3 , on adopte une représentation matricielle de taille 4×4 permettant de n'effectuer que des produits matriciels.

Chaque matrice de transformation prend la forme suivante :

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{1,3} & 1 \end{bmatrix}$$

où :

- $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$
- $B \in \mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Toute rotation s'écrira de la forme : $R_{i-1 i}^{\theta} = \begin{bmatrix} A & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & 1 \end{bmatrix}$, A correspondant à la matrice de rotation 3×3

Toute translation s'écrira de la forme : $T_{i-1 i}^d = \begin{bmatrix} I_3 & B \\ 0_{1,3} & 1 \end{bmatrix}$, B étant déduit du vecteur caractérisant la translation

On retrouve ce résultat à partir du cas de la rotation en fixant $A = I_3$ (rotation nulle suivant les 3 axes)

Question 10

La détermination des coordonnées de $\begin{bmatrix} {}^0P \\ 1 \end{bmatrix}$ exprimées dans R_0 se fait à l'aide des relations précédentes.

$$\begin{bmatrix} {}^0P \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01} \cdot M_{12} \begin{bmatrix} {}^2P \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } M_{02} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 & L_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 & L_2 \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} {}^2P \\ 1 \end{bmatrix}$ correspond aux coordonnées de P dans R_2

$$\text{On a donc : } \begin{bmatrix} {}^2P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_4 \\ 0 \\ L_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ici : } \theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta_{01} \quad \text{soit} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{cf Q.7})$$

$$\theta_2 = 0 + \theta_{02} \quad \text{soit} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{cf Q.7})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^0P \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_4 \\ 0 \\ L_3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 + L_3 \\ L_1 - L_4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si l'on exprime directement les coordonnées de $\begin{bmatrix} {}^0P \\ 1 \end{bmatrix}$ dans le repère R_0 à partir du schéma cinématique proposé, on obtient :

$$\begin{bmatrix} {}^0P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 + L_3 \\ L_1 - L_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les résultats obtenus permettent de valider le modèle puisque les coordonnées de P obtenus à partir des deux méthodes sont identiques

Question 11

D'après les tableaux, pour le bras droit :

- l'intervalle atteignable par l'angle θ_1 relatif à l'articulation S_0 vaut : $[+51^\circ, -141^\circ]$
- l'intervalle atteignable par l'angle θ_2 relatif à l'articulation S_1 vaut : $[+60^\circ, -123^\circ]$

Pour le bras gauche, on prendra les intervalles opposés soit :

- pour θ_1 : $[-51^\circ, +141^\circ]$
- pour θ_2 : $[-60^\circ, +123^\circ]$

Les coordonnées articulaires proposées valent : $\theta_1 = 90^\circ$ et $\theta_2 = 90^\circ$.

Les positions articulaires θ_1 et θ_2 proposées seront bien atteintes.

Question 12

La distance maximale entre les deux 2 TCP est obtenue lorsque le robot baxter est en position initiale.

A partir de la figure p.7, on peut écrire :

$$d_{max}(TCP_g, TCP_d) = 2(L_1 + L_2 + L_3 + L_9 + L_7)$$

A.N :

$$d_{max}(TCP_g, TCP_d) = 2 * (278 + 69 + 364.35 + 374.42 + 229.525)$$

$$d_{max}(TCP_g, TCP_d) = 2630.59 \text{ mm}$$

$$\text{Conclusion : } d_{max}(TCP_g, TCP_d) \geq 260 \text{ mm}$$

L'exigence client « la distance maximale entre les 2 TCP atteignable par me robot Baxter doit être au minimum de 260 cm » est vérifiée.

Remarque :

Il aurait été appréciable de numérotter les figures dans l'énoncé

Question 13

Pour une position spécifique du robot Baxter, on obtient :

$$M_{07} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 148 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1238.515 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On reconnaît une translation : présence d'un bloc I_3 caractérisant une rotation nulle.

Les trièdres $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $(\vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)$ sont identiques.

La distance entre les axes \vec{z}_0 et \vec{z}_7 suivant \vec{x}_7 vaut : $a = 148 \text{ mm}$

La distance entre les axes \vec{x}_0 et \vec{x}_7 suivant \vec{z}_0 vaut : $d = 1238.515 \text{ mm}$

On peut illustrer la configuration par le schéma ci-contre

On retrouve les valeurs de a et d :

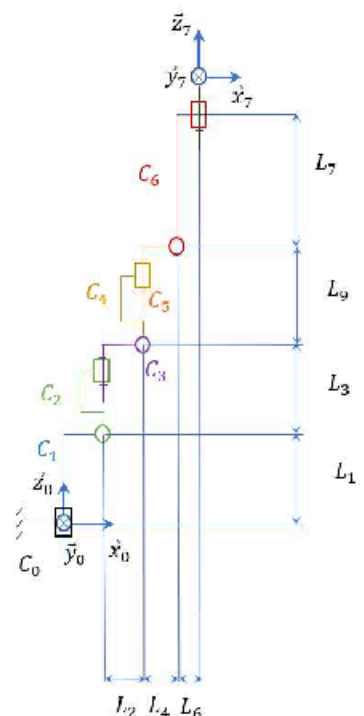
$$a = L_2 + L_4 + L_7$$

$$= 2*69 + 10$$

$$= 148 \text{ mm}$$

$$d = L_1 + L_3 + L_9 + L_7$$

$$= 270.35 + 364.35 + 374.42 + 229.525$$



$$= 1238.15 \text{ mm}$$

La position du bras du robot Baxter est bien verticale vers le haut.

Question 14

Le vecteur des vitesses linéaires du point P vaut : ${}^3\dot{P} = \dot{R}_{37} \cdot {}^7P + \dot{T}_{37}$

$$\text{Vu que } {}^7P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\dot{P} = \dot{T}_{37} \text{ avec } T_{37} = \begin{bmatrix} (L_7 \sin \theta_6 + L_6) \cos \theta_4 + (L_7 \cos \theta_6 + L_5) \sin \theta_4 \\ (L_7 \sin \theta_6 + L_6) \sin \theta_4 - (L_7 \cos \theta_6 + L_5) \cos \theta_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

T_{37} peut se réécrire sous la forme :

$$T_{37} = \begin{bmatrix} L_7 \sin(\theta_6 + \theta_4) + L_6 \cos \theta_4 + L_5 \sin \theta_4 \\ -L_7 \cos(\theta_6 + \theta_4) + L_6 \sin \theta_4 - L_5 \cos \theta_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En dérivant cette dernière expression, on obtient \dot{T}_{37} .

$$\dot{T}_{37} = \begin{bmatrix} L_7 (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_4) \cos(\theta_6 + \theta_4) - L_6 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 + L_5 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ L_7 (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_4) \sin(\theta_6 + \theta_4) + L_6 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 + L_5 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{En conclusion, } {}^3\dot{P} = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_4) f_1(t) + \dot{\theta}_4 f_2(t) \\ (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_4) f_3(t) + \dot{\theta}_4 f_4(t) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec :}$$

$$\text{– s'il n'y a pas de coquille dans le sujet, } {}^3\dot{P} = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_4) f_1(t) + \dot{\theta}_4 f_2(t) \\ (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_4) f_3(t) + \dot{\theta}_4 f_4(t) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec}$$

$$f_1(t) = L_7 \cos(\theta_6 + \theta_4)$$

$$f_2(t) = 2L_7 \cos(\theta_6 + \theta_4) - L_6 \sin \theta_4 + L_5 \cos \theta_4$$

$$f_3(t) = L_7 \sin(\theta_6 + \theta_4)$$

$$f_4(t) = L_6 \cos \theta_4 + L_5 \sin \theta_4$$

$$\text{– s'il y a une de coquille dans le sujet, } {}^3\dot{P} = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_4) f_1(t) + \dot{\theta}_4 f_2(t) \\ (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_4) f_3(t) + \dot{\theta}_4 f_4(t) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec}$$

$$f_1(t) = L_7 \cos(\theta_6 + \theta_4)$$

$$f_2(t) = -L_6 \sin \theta_4 + L_5 \cos \theta_4$$

$$f_3(t) = L_7 \sin(\theta_6 + \theta_4)$$

$$f_4(t) = L_6 \cos \theta_4 + L_5 \sin \theta_4$$

La deuxième solution semble la plus pertinente.

Question 15

On cherche à déterminer le produit $AS({}^3\Omega)K$ où :

$$- AS({}^3\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \text{ est la matrice antisymétrique du vecteur des vitesses angulaires } {}^3\Omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$- K \text{ est un vecteur quelconque : } K = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

Le produit $AS({}^3\Omega)K$ vaut :

$$AS({}^3\Omega)K = \begin{bmatrix} -\omega_z k_y + \omega_y k_z \\ \omega_z k_x - \omega_x k_z \\ -\omega_y k_x + \omega_x k_y \end{bmatrix}$$

$AS({}^3\Omega)K$ représente le résultat du produit vectoriel ${}^3\Omega \wedge K$.

$$AS({}^3\Omega)K = {}^3\Omega \wedge K$$

Remarque « culturelle » :

Les matrices de rotation de taille $n \times n$ forment un groupe : le groupe spécial orthogonal $SO(n)$.

Ce dernier est un groupe de Lie. A chaque groupe de Lie, on définit une algèbre de Lie, un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée appelée crochet de Lie.

L'algèbre correspondant à $SO(n)$ est notée $so(n)$ et est formée de toutes les matrices carrées antisymétriques de taille n . Le crochet de deux matrices antisymétriques est défini par :

$$[M_1, M_2] = M_1 M_2 - M_2 M_1, \text{ qui est encore une matrice antisymétrique.}$$

L'algèbre de Lie réelle $so(3)$ est la sous-algèbre de Lie de dimension 3 de $GL_3(\mathbb{R})$ formée des matrices carrées réelles antisymétriques de taille 3. La base canonique de $so(3)$ est formée par les matrices suivantes :

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut naturellement identifier chaque matrice de cette algèbre de Lie avec un vecteur de \mathbb{R}^3 .

Soit $\vec{u}(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. On peut lui associer la matrice $M_{\vec{u}}$ définie par :

$$M_{\vec{u}} = \sum_{i=1}^3 u_i \eta_i$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$$

Or, un élément $R_{\vec{u}}$ de $SO(3)$ s'écrit : $R_{\vec{u}} = e^{G_{\vec{u}}} = \sum_{n \geq 0} \frac{G_{\vec{u}}^n}{n!}$ avec : $G_{\vec{u}}^t = -G_{\vec{u}}$

$M_{\vec{u}}$ coïncide donc avec un générateur qui est de la forme :

$$G_{\vec{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}(u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3$$

Cette matrice représente ainsi le produit vectoriel : $G_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Question 16

Le vecteur des vitesses angulaires ${}^3\Omega$ est défini par la relation : $AS({}^3\Omega)R_{37} = \dot{R}_{37}$

$$R_{37} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4 + \theta_6) & 0 & \sin(\theta_4 + \theta_6) \\ \sin(\theta_4 + \theta_6) & 0 & -\cos(\theta_4 + \theta_6) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Posons : $R_{37}(C_1, C_2, C_3)$.

Les $C_i, i \in \llbracket 1,3 \rrbracket$, représentent les colonnes de la matrice R_{37} .

D'après la question précédente, $AS({}^3\Omega)R_{37} = ({}^3\Omega \wedge C_1, {}^3\Omega \wedge C_2, {}^3\Omega \wedge C_3)$.

$\forall i \in \llbracket 1,3 \rrbracket, {}^3\Omega \wedge C_i = \dot{C}_i$

- Pour $i = 2$:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\Omega \wedge C_2 = \dot{C}_2 \Rightarrow \omega_x = \omega_y = 0$$

- Pour $i = 1$:

$${}^3\Omega \wedge C_1 = \dot{C}_1$$

En choisissant $K = C_1, k_z = 0$ et :

$$\begin{aligned} {}^3\Omega \wedge C_1 = \dot{C}_1 &\Rightarrow \omega_z \sin(\theta_4 + \theta_6) = (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6) \sin(\theta_4 + \theta_6), \quad \forall (\theta_4, \theta_6) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Rightarrow \omega_z = \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 \end{aligned}$$

Finalement :

$${}^3\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

Question 17

Le torseur cinématique est représenté par le vecteur ${}^3C_{37}$:

$${}^3C_{37} = \begin{bmatrix} {}^3\dot{p} \\ {}^3\Omega \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^3C_{37} = \begin{bmatrix} {}^3\dot{p}_x \\ {}^3\dot{p}_y \\ {}^3\dot{p}_z \\ {}^3\omega_x \\ {}^3\omega_y \\ {}^3\omega_z \end{bmatrix}$$

En considérant les résultats obtenus précédemment, on peut donner la forme de ${}^3C_{37}$.

$${}^3C_{37} = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^3\dot{p}_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

Lors du mouvement type, 3p_x et ${}^3\dot{p}_x$ sont constamment nuls (courbes 3 et 7 p.13) : le mouvement étant décrit dans le plan $(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$, seule la coordonnée de position du point P suivant l'axe (O_3, \vec{y}_3) varie.

Le point P se déplace donc en translation suivant la direction \vec{y}_3 en partant de la position $P_0(0, -450)$, en passant par la position intermédiaire $P_1(0, -600)$ et en s'arrêtant au point $P_2(0, -350)$. Les positions ont été récupérées à l'aide de la courbe 4 p.13. Le mouvement de P est par conséquent une translation alternative suivant l'axe (O_3, \vec{y}_3) .

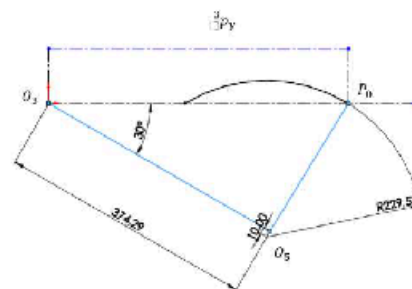
En faisant correspondre les courbes 1,2 et 4 p.13, on peut constater que le point P passe par les positions suivantes :

- à $t = 0$: position P_0 définie par $\theta_6 \approx -90^\circ$ $\theta_4 \approx 30^\circ$ ${}^3p_y \approx -450$ m
- à $t = 0.4$ s : position P_1 définie par $\theta_6 \approx 0^\circ$ $\theta_4 \approx 0^\circ$ ${}^3p_y \approx -600$ mm
- à $t = 0.9$ s : position P_2 définie par $\theta_6 \approx 115^\circ$ $\theta_4 \approx -38^\circ$ ${}^3p_y \approx -350$ mm

On rappelle que l'angle θ_4 est mesuré par rapport à l'axe de E_0 et que l'angle θ_6 est mesuré par rapport à l'axe de W_2 . Les articulations étant toutes bloquées hormis E_1 et W_1 , les axes de E_0 et W_2 sont en position zéro et sont alignés suivant la direction horizontale. θ_4 et θ_6 sont donc mesurés par rapport à l'horizontale.

La position P_0 correspond à la situation ci-contre :

$$\begin{aligned} \text{Dans ce cas } {}^3p_y &= -L_5 \cos 30 - (L_7 - L_6) \cos 60 \\ &= -324.14 - 109.76 \\ &= -433.9 \text{ mm} \end{aligned}$$



La position P_1 correspond à la situation où le bras est en position de repos (cf. schéma cinématique p. 12)

$$\text{Dans ce cas } {}^3p_y = -L_5 - L_7$$

$$= -374.29 - 229.525$$

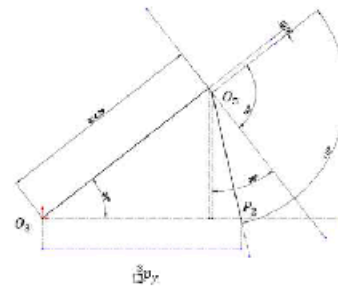
$$= -603.815 \text{ mm}$$

La position P_2 correspond à la situation ci-contre :

$$\text{Dans ce cas } {}^3p_y = -L_5 \cos 38 - (L_5 + L_6) \sin 15$$

$$= -294.94 - 61.99$$

$$= -356.93 \text{ mm}$$



Le résultat est proche de celui obtenu dans la simulation. Les différences sont probablement dues aux erreurs de lecture sur les courbes.

D'après les tableaux :

- l'intervalle et la vitesse atteignable par l'articulation E_1 valent : $[+150^\circ, -3^\circ]$, et $\dot{\theta}_{4max} = 2 \text{ rad. s}^{-1}$
- l'intervalle et la vitesse atteignable par l'articulation W_1 valent : $[+120^\circ, -90^\circ]$, et $\dot{\theta}_{6max} = 4 \text{ rad. s}^{-1}$

La simulation proposée pour le bras gauche donne :

- $\theta_4 \in [-30^\circ, +30^\circ]$, $\dot{\theta}_{4max} = -1.5 \text{ rad. s}^{-1}$
- $\theta_6 \in [-120^\circ, +90^\circ]$, $\dot{\theta}_{6max} = 4 \text{ rad. s}^{-1}$

Les positions et vitesses articulaires sont bien accessibles par le robot pour l'angle θ_6 .

Pour θ_4 , ce n'est à priori pas le cas si l'on considère uniquement un essai basé sur le mouvement type.

Remarque :

Dans les deux premières figures p.13, les axes verticaux sont gradués en degrés et non en radians.

PARTIE 2. ETUDE D'UNE ARTICULATION ELASTIQUE DU BAXTER

Question 18

Il s'agit d'un dimensionnement en contrainte, je dois vérifier que :

$$\tau_{max} \leq \frac{R_{eg}}{s} \quad (1)$$

J'en déduis :

$$\frac{tG}{L} \theta_{max} \leq \frac{R_{eg}}{s}$$

Donc :

$$L \geq \frac{tG\theta_{max}s}{R_{eg}}$$

J'utilise la deuxième relation donnée dans le document pour calculer h. Cette relation fait intervenir L, qui n'est pas une donnée du problème mais qui vient d'être calculé précédemment. J'exprime h en fonction des données du problème :

$$h = \frac{3C}{\tau t^2}$$

Donc d'après le critère (1) :

$$h \geq \frac{3Cs}{R_{eg}t^2}$$

Pour l'application numérique, le couple C à prendre en compte est celui de 15Nm (SEA pour le poignet), car il est écrit dans l'énoncé que qu'il s'agit d'un prototype d'articulation du poignet.

Applications numériques :

$$L = 63mm$$

$$h = 167mm$$

Remarque : je vérifie que le rapport h/t est bien supérieur à 20, donc je me situe dans le cadre de l'hypothèse formulée en haut de la page 16.

Question 19

Je formule l'hypothèse simplificatrice suivante : le problème de RdM étudié est **linéaire**.

Comme les deux profils rectangulaires sont symétriques par rapport au centre de la section, la rigidité en torsion sera deux fois plus grande. J'en déduis :

$$L_{cross} = \frac{L}{2}$$

En revanche, le paramètre h n'évolue pas (l'expression de h ne dépend pas de θ) :

$$h_{cross} = h$$

Par conséquent, en termes d'encombrement, la longueur du ressort est deux fois plus faible.

Question 20

J'isole l'arbre du motoréducteur du SEA, soumis aux actions du couple moteur et du ressort de torsion.

J'applique le théorème du moment dynamique en un point de l'axe de rotation, en projection sur \vec{z} . Je trouve :

$$J_m \ddot{\theta}_m = C_m - C_{\text{ressort} \rightarrow \text{motored}} = C_m - k_s(\theta_m - \theta_l)$$

Question 21

J'isole ensuite l'arbre de sortie SEA (entre le ressort et la sortie), soumis aux actions du ressort de torsion et le couple exercé par l'élément aval de la chaîne de transmission de puissance. J'applique de la même manière le théorème du moment dynamique en un point de l'axe du moteur, projeté sur cet axe. Je néglige l'inertie du ressort devant celle du rotor et je trouve :

$$C_{\text{motored} \rightarrow \text{ressort}} - C_l = 0$$

Soit :

$$C_l = k_s(\theta_m - \theta_l)$$

Question 22

J'applique la transformation de Laplace à chacune des deux équations temporelles précédentes. J'ai alors :

$$p^2 J_m \theta_m(p) = C_m(p) - k_s(\theta_m(p) - \theta_l(p)) \quad (\text{Lap.1})$$

Et

$$C_l(p) = k_s(\theta_m(p) - \theta_l(p)) \quad (\text{Lap.2})$$

Je déduis de (Lap.1) :

$$\theta_m(p) = \frac{1}{k_s + J_m p^2} C_m(p) + \frac{k_s}{k_s + J_m p^2} \theta_l(p)$$

Réinjecté dans (Lap.2) :

$$C_l(p) = \frac{k_s}{k_s + J_m p^2} C_m(p) + \frac{k_s^2}{k_s + J_m p^2} \theta_l(p) - k_s \theta_l(p)$$

Soit :

$$C_l(p) = \frac{k_s}{k_s + J_m p^2} C_m(p) + \frac{k_s^2 - k_s^2 - k_s J_m p^2}{k_s + J_m p^2} \theta_l(p)$$

Donc :

$$C_l(p) = \frac{k_s}{k_s + J_m p^2} C_m(p) - \frac{k_s J_m p^2}{k_s + J_m p^2} \theta_l(p)$$

Sous forme canonique, on a donc :

$$H_m(p) = \frac{1}{1 + \frac{J_m}{k_s} p^2} \quad \text{et} \quad H_l(p) = \frac{J_m p^2}{1 + \frac{J_m}{k_s} p^2}$$

Question 23

Les deux pôles de $H_m(p)$ sont :

$$p_1 = +j \sqrt{\frac{k_s}{J_m}}$$

$$p_2 = -j \sqrt{\frac{k_s}{J_m}}$$

Les deux pôles de cette fonction de transfert sont des imaginaires purs. En réponse à un échelon temporel, le couple de sortie va évoluer suivant une sinusoïde non amortie.

Question 24

Pour déterminer la stabilité du système, je dois vérifier les deux critères donnés dans l'énoncé.

Premier critère : $Z(p)$ n'a pas de pôle à partie réelle strictement négative.

Les deux pôles de la fonction $Z(p)$ sont $\pm j\omega_0$. Ce sont des imaginaires purs, à partie réelle nulle. Le premier critère est donc vérifié.

Deuxième critère : la partie imaginaire de $Z(j\omega)$ est négative ou nulle pour toutes les pulsations ω .

Pour cela, je cherche la partie imaginaire de $Z(j\omega)$:

$$\text{Im}(Z(j\omega)) = \text{Im}\left(\frac{-a\omega^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = 0$$

Le deuxième critère est vérifié.

Conclusion : le système est stable. Le comportement n'est cependant pas acceptable : pour les mêmes raisons que dans la question précédente, une perturbation en échelon va produire une sortie sinusoïdale. Le système est donc à la « juste stabilité », sans aucune marge de stabilité.

Question 25

Pour un système avec perturbation, l'objectif d'erreur statique nulle ne peut être obtenu que s'il existe au moins un intégrateur pur en amont de la perturbation. Il n'y a pas d'intégrateur pur dans la boucle d'asservissement, le correcteur proportionnel/dérivé n'en apporte pas : l'exigence « erreur statique nulle » ne peut être atteinte.

Question 26

La fonction de transfert $Z(p)$ est obtenue par le calcul de la FTBF en considérant $C_{ip}(p) = 0$.

$$C_i(p) = -\frac{ap^2}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \theta_i(p) + \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}} C(p)(0 - C_i(p))$$

$$\left(1 + \frac{C(p)}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}}\right) C_i(p) = -\frac{ap^2}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \theta_i(p)$$

Donc

$$\frac{C_l(p)}{\theta_l(p)} = \frac{-ap^2}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} + C(p)} = \frac{-ap^2}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K_p(1 + \frac{K_i}{p} + K_d p)}$$

Multiplications par p le numérateur et le dénominateur, il vient :

$$\frac{C_l(p)}{\theta_l(p)} = \frac{-ap^3}{p + \frac{p^3}{\omega_0^2} + pK_p + K_i K_p + K_d K_p p^2}$$

$$\frac{C_l(p)}{\theta_l(p)} = \frac{-ap^3}{\frac{p^3}{\omega_0^2} + K_d K_p p^2 + p(1 + K_p) + K_i K_p}$$

Soit en définitive :

$$Z(p) = \frac{C_l(p)}{\theta_l(p)} = \frac{-\frac{a}{K_i K_p} p^3}{\frac{p^3}{K_i K_p \omega_0^2} + \frac{K_d}{K_i} p^2 + \frac{1 + K_p}{K_i K_p} p + 1}$$

Question 27

Calculons la partie imaginaire de $Z(j\omega)$. Dans les calculs suivants, nous utilisons la forme donnée par l'énoncé :

$$Z(p) = \frac{bp^3}{cp^3 + dp^2 + ep + 1}$$

$$Z(j\omega) = \frac{-jb\omega^3}{-jc\omega^3 - d\omega^2 + je\omega + 1} = \frac{-jb\omega^3}{1 - d\omega^2 + j\omega(e - c\omega^2)}$$

Je multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

$$Z(j\omega) = \frac{-jb\omega^3(1 - d\omega^2 - j\omega(e - c\omega^2))}{(1 - d\omega^2 + j\omega(e - c\omega^2))((1 - d\omega^2 - j\omega(e - c\omega^2)))}$$

Le dénominateur est le module d'un nombre complexe, donc strictement positif quel que soit ω (il faudrait vérifier qu'il est différent de 0 pour toute valeur de la pulsation). Donc pour connaître le signe de la partie imaginaire de $Z(j\omega)$, je me contente de chercher le signe de la partie imaginaire du numérateur.

Pour assurer la stabilité, je dois avoir :

$$-b\omega^3(1 - d\omega^2) < 0$$

ω étant positif, je peux diviser sans problème. b est négatif, donc le fait de diviser par $-b$ ne change pas l'inégalité. Finalement, j'ai :

$$1 - d\omega^2 < 0$$

C'est-à-dire que :

$$d > \frac{1}{\omega^2}$$

La réponse à la question précédente me donne d , que je porte dans cette inégalité :

$$\frac{K_d}{K_i} > \frac{1}{\omega^2}$$

Question 28

Pour les valeurs de ω faibles, c'est-à-dire aux basses pulsations, le rapport précédent va devenir « très grand ». Or K_i ne peut être nul voire « très proche » de zéro puisqu'il s'agit du réglage du correcteur intégral. La solution consisterait donc à régler K_d « très grand ». Comme K_d est à valeur finie, il va se créer un phénomène de saturation qui peut empêcher que l'inégalité précédente soit vérifiée.

Question 29

cas $\tau_i = 0,2s$: système instable. Le diagramme pour le cas $\tau_i = 0,2s$ fait apparaître une phase de $Z(j\omega)$ positive (donc partie imaginaire positive) pour les pulsations basses jusqu'à 8rad/s, puis négative (donc partie imaginaire négative) pour les pulsations supérieures. Le critère de stabilité n'est pas vérifié (la partie imaginaire de $Z(j\omega)$ doit être négative pour toutes les valeurs de ω)

cas $\tau_i = 0,08s$: système stable. La phase est négative pour toute valeur de ω , donc la partie imaginaire de $Z(j\omega)$ aussi, pour toutes les valeurs de ω (au moins pour celles que l'on voit pour le diagramme).

Remarque : dans l'équipe de correcteurs, aucun consensus ne se dégage quant à la réponse à cette question. Toute proposition d'amélioration/confirmation/infirmation est la bienvenue.

Question 30

L'écart statique est défini par (théorème de la valeur finale) :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$$

Je cherche $\varepsilon(p)$ dans un premier temps :

$$\varepsilon(p) = C_{lc}(p) - C_l(p) = C_{lc}(p) - \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}} (C(p)\varepsilon(p) + K_{ff}C_{lc}(p))$$

$$\varepsilon(p) \left(1 + \frac{C(p)}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}}\right) = C_{lc}(p) - \frac{K_{ff}}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}} C_{lc}(p)$$

Soit

$$\varepsilon(p) \left(1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} + C(p)\right) = \left(1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} - K_{ff}\right) C_{lc}(p)$$

Avec $C_{lc}(p) = \frac{C_{lco}}{p}$ (échelon), il vient

$$\varepsilon(p) = \frac{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} - K_{ff}}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} + C(p)} \frac{C_{lc}}{p}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} - K_{ff}}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2} + C(p)} C_{lc}$$

Avec $\lim_{p \rightarrow 0} C(p) = K_p(1 + \tau_i K_i)$

Donc finalement :

$$\varepsilon_s = \frac{1 - K_{ff}}{1 + K_p(1 + \tau_i K_i)} C_{lc}$$

Pour obtenir un écart statique nul, je dois choisir $K_{ff} = 1$

Question 31

Vérifie les trois critères énoncés en haut de la page 18.

- Erreur statique : la figure montre un écart statique nul, l'exigence est que l'écart soit nul -> critère vérifié
- Premier dépassement : le premier dépassement est approximativement de 30% sur le relevé. L'exigence est que le maximum du premier dépassement soit de 40% -> critère vérifié.
- Temps de réponse : le début de l'échelon est à $t=0.05s$. on rentre dans la bande $\pm 5\%$ sans en ressortir à l'instant $0.075s$. Le temps de réponse à 5% est donc de $0.075 - 0.05 = 0.025s = 25ms$. L'exigence impose un temps de réponse maximal de $40ms$ -> le critère est vérifié.

Les trois exigences sont vérifiées.

PARTIE 3. ASSERVISSEMENT EN COUPLE DE LA MOTORISATION D'UNE ARTICULATION ELASTIQUE DU BAXTER

Question 32

La puissance instantanée $p_{tri}(t)$ fournie au BLAC par le biais des composantes statoriques a pour expression :

$$\begin{aligned}
 p_{tri}(t) &= \sum_{i=1}^3 v_i(t) \cdot i_i(t) \\
 &= 2IV \left[\cos(\omega_s t) \cos(\omega_s t - \varphi) + \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right] \\
 &= IV \left[3 \cos \varphi + \cos(2\omega_s t - \varphi) + \cos\left(2\omega_s t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \cos\left(2\omega_s t + \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) \right] \\
 &= IV \left\{ 3 \cos \varphi + \Re \left[e^{i(2\omega_s t - \varphi)} + e^{i(2\omega_s t - \frac{4\pi}{3} - \varphi)} + e^{i(2\omega_s t + \frac{4\pi}{3} - \varphi)} \right] \right\} \\
 &= IV \left\{ 3 \cos \varphi + \Re \left[e^{i(2\omega_s t - \varphi)} \left(1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} \right) \right] \right\} \\
 &= IV \left\{ 3 \cos \varphi + \Re \left[e^{i(2\omega_s t - \varphi)} (1 + j + \bar{j}) \right] \right\} \\
 &= 3IV \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Question 33

Les composantes diphasées en tension sont obtenues à partir de la relation proposée dans l'énoncé.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} v_1(t) - \frac{1}{2}v_2(t) - \frac{1}{2}v_3(t) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} [v_2(t) - v_3(t)] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Par analogie, l'expression des composantes diphasées en courant donne :

$$\begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} i_1(t) - \frac{1}{2}i_2(t) - \frac{1}{2}i_3(t) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} [i_2(t) - i_3(t)] \end{bmatrix}$$

Or :

$$v_1(t) - \frac{1}{2}v_2(t) - \frac{1}{2}v_3(t) = \sqrt{2}V \left[\cos(\omega_s t) - \frac{1}{2} \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2}V \Re [e^{i\omega_s t} (1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{2i\pi}{3}} - \frac{1}{2}e^{\frac{2i\pi}{3}})] \\
 &= \sqrt{2}V \Re [e^{i\omega_s t} (1 - \cos\frac{2\pi}{3})] \\
 &= \frac{3}{\sqrt{2}}V \cos(\omega_s t)
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{3}}{2} [v_2(t) - v_3(t)] &= \sqrt{\frac{3}{2}}V [\cos(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}) - \cos(\omega_s t + \frac{2\pi}{3})] \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}}V \Re [-2ie^{i\omega_s t} \sin\frac{2\pi}{3}] \\
 &= \frac{3}{\sqrt{2}}V \sin(\omega_s t)
 \end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{bmatrix} v_\alpha(t) \\ v_\beta(t) \end{bmatrix} = \sqrt{3}V \begin{bmatrix} \cos(\omega_s t) \\ \sin(\omega_s t) \end{bmatrix}$$

Par identification avec la forme proposée : $K = \sqrt{3}V$ et $f(t) = \omega_s t$

Par analogie, l'expression des composantes diphasées en intensité donnera :

$$\begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \end{bmatrix} = \sqrt{3}I \begin{bmatrix} \cos(\omega_s t - \varphi) \\ \sin(\omega_s t - \varphi) \end{bmatrix} \quad \text{et : } L = \sqrt{3}I \quad \text{et } g(t) = \omega_s t - \varphi$$

Question 34

La puissance instantanée $p_{di}(t)$ fournie au BLAC par le biais des composantes diphasées statoriques a pour expression :

$$\begin{aligned}
 p_{tri}(t) &= v_\alpha(t) \cdot i_\alpha(t) + v_\beta(t) \cdot i_\beta(t) \\
 &= 3IV [\cos(\omega_s t) \cos(\omega_s t - \varphi) + \sin(\omega_s t) \sin(\omega_s t - \varphi)] \\
 &= 3IV \cos \varphi
 \end{aligned}$$

La transformation utilisée conserve la puissance.

Question 35

On opère une rotation d'angle θ . Dans ces conditions, les composantes diphasées en courant sont obtenues par la relation :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \cos \theta(t) - i_\beta(t) \sin \theta(t) \\ i_\alpha(t) \sin \theta(t) + i_\beta(t) \cos \theta(t) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{3}I \begin{bmatrix} \cos(\omega_s t + \theta(t) - \varphi) \\ \sin(\omega_s t + \theta(t) - \varphi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par identification avec la forme proposée : $M = \sqrt{3}I$ et $h(t) = \omega_s t + \theta(t) - \varphi$

Question 36

En imposant $\theta(t) = -\omega_s t$, l'expression des composantes diphasées $i_d(t)$ et $i_q(t)$ devient indépendante du temps et :

$$\begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} = \sqrt{3}I \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix}$$

Question 37

La relation reliant $\omega_s(t)$ à $\Omega_m(t)$ est :

$$\omega_s(t) = \frac{\Omega_m(t)}{p}$$

Question 38

Il suffit d'injecter les relations exprimant $\phi_d(t)$ et $\phi_q(t)$ dans les équations donnant $v_d(t)$ et $v_q(t)$.

$$\begin{aligned} v_d(t) &= R i_d(t) + \frac{d\phi_d}{dt} - \omega_s(t) \phi_q(t) \\ &= R i_d(t) + \frac{d}{dt} (L i_d(t) + \phi_f) - \omega_s(t) L i_q(t) \\ &= R i_d(t) + L \frac{d i_d(t)}{dt} - \omega_s(t) L i_q(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_q(t) &= R i_q(t) + \frac{d\phi_q}{dt} + \omega_s(t) \phi_d(t) \\ &= R i_q(t) + L \frac{d i_q(t)}{dt} + \omega_s(t) L i_d(t) + \omega_s(t) \phi_f \end{aligned}$$

Question 39

En appliquant le changement de variables proposé, les équations obtenues en Q.38 deviennent :

$$\begin{aligned} v_{d1}(t) &= R i_d(t) + L \frac{d i_d(t)}{dt} \\ v_{q1}(t) &= R i_q(t) + L \frac{d i_q(t)}{dt} \end{aligned}$$

La relation liant C_m à $i_q(t)$ est donnée dans l'énoncé : $C_m = P\phi_f i_q(t)$.

On applique la transformée de Laplace aux deux équations précédentes. Les conditions initiales étant nulles, il vient :

$$V_{d1}(p) = (R + Lp)I_d(p)$$

$$V_{q1}(p) = (R + Lp)I_q(p)$$

$$C_m(p) = P\phi_f I_q(p)$$

Les blocs liant $V_{d1}(p)$ à $I_d(p)$ et $V_{1q}(p)$ à $I_q(p)$ sont identiques et valent :

$$\frac{\frac{1}{R}}{1 + \frac{L}{R}p}$$

Le bloc liant $C_m(p)$ à $I_q(p)$ vaut : $P\phi_f$.

Question 40

Le système est à retour unitaire. La FTBO vaut :

$$\text{FTBO}(p) = K_p \frac{\frac{1}{R}}{1 + \tau p}$$

La FTBO est de classe 0. On soumet le système à un échelon sur la référence courant.

L'erreur $\varepsilon(p)$ est nécessairement non nulle et vaut :

$$\varepsilon(p) = I_{iref0} \frac{1}{1 + \frac{K_p}{R}}$$

où I_{iref} correspond à la valeur de l'échelon.

Pour annuler l'erreur, il faut augmenter la classe de la FTBO : présence d'au moins une intégration.

Question 41

Par lecture directe du schéma-bloc proposé, il vient :

$$\begin{aligned} \{[I_{irref}(p) - I_i(p)]K_p + K_{iff}I_{irref}(p)\} \frac{1}{1 + \tau p} &= I_i(p) \\ (K_p + K_{iff}) \frac{1}{1 + \tau p} I_{irref}(p) &= (K_p \frac{1}{1 + \tau p} + 1) I_i(p) \\ \frac{I_i(p)}{I_{irref}(p)} &= \frac{(K_p + K_{iff}) \frac{1}{1 + \tau p}}{K_p \frac{1}{1 + \tau p} + 1} \\ \frac{I_i(p)}{I_{irref}(p)} &= \frac{\frac{K_p + K_{iff}}{R + K_p}}{1 + \frac{\tau}{1 + \frac{K_p}{R}} p} \end{aligned}$$

On souhaite déterminer la valeur de K_{iff} permettant d'obtenir une erreur statique nulle.

La fonction de transfert ci-dessus correspond à la FTBF.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{FTBF}(p) = 0 &\Leftrightarrow \frac{K_p + K_{iff}}{R + K_p} = 1 \\ &\Leftrightarrow K_{iff} = R \end{aligned}$$

Question 42

La stratégie de réglage est une compensation de pôle dominant.

Le terme $1 + \tau p$ doit donc être compensé par le terme $1 + T_i p$.

Il vient immédiatement : $T_i = \tau$

Avec ce choix de T_i , l'erreur statique pour une entrée en échelon est nécessairement nulle puisque la FTBO est de classe 1.

La FTBF vaut :

$$\begin{aligned} \frac{I_i(p)}{I_{irref}(p)} &= \frac{\frac{K_p/R}{T_i p}}{1 + \frac{K_p/R}{T_i p}} \\ &= \frac{1}{1 + T_i \frac{R}{K_p} p} \end{aligned}$$

On reconnaît un premier ordre de temps de réponse :

$$tr_{5\%} = 3 \frac{T_i R}{K_p}$$

L'exigence sur le temps de réponse est la suivante : $tr_{5\%} = 5\text{ms} \pm 20\%$

On a donc l'inégalité suivante :

$$4 \leq 3 \frac{T_i R}{K_p} \leq 6$$

$$\frac{1}{2} \tau R \leq K_p \leq \frac{3}{4} \tau R$$

Question 43

Dans les deux simulations proposées, les réponses à l'échelon unitaire ne présentent aucun dépassement et l'erreur statique est nulle : les réponses convergent vers 1.

Le temps de réponse est de :

- pour $I_{iparametres}(t)$: $0.007 - 0.002 = 0.005$ s soit 5 ms
- pour $I_{iparametres}(t)$: $0.0065 - 0.002 = 0.0045$ s soit 4.5 ms

L'exigence sur le temps de réponse est bien respectée.

PARTIE 4. VERIFICATION D'UN POINT DE FONCTIONNEMENT DE L'ARTICULATION DU COUDE

Question 44

J'isole l'ensemble {avant-bras, outil, pièce d'emport}.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- BLAC sur avant-bras
- Pesanteur sur avant-bras
- Pesanteur sur outil + pièce d'emport

J'applique le Principe Fondamental de la Dynamique à l'ensemble isolé (vitesse de rotation constante, on retrouve le cas particulier du PFS). J'écris le théorème du moment en un point de l'axe E1, en projection sur cet axe :

$$C_{E1} = m_{ab}gL_a + m_{op}g(L_a + L_b + L_c)$$

Application numérique :

$$C_{E1} = 9 * 10 * 0.35 + 2 * 10 * (0.35 * +0.25 + 0.05)$$

Soit

$$C_{E1} = 45Nm$$

Le couple de sortie maximal est de 50Nm, donc le réducteur est en mesure de fournir le couple nécessaire à ce point de fonctionnement.

Question 45

Pour le point de fonctionnement étudié, la vitesse de rotation du moteur Ω_m est telle que :

$$\Omega_m = r \frac{v_{TCP}}{L_a + L_b}$$

Je sais par ailleurs qu'il y a synchronisme, c'est-à-dire que $\omega_s = \Omega_m$, j'en déduis :

$$\omega_s = r \frac{v_{TCP}}{L_a + L_b}$$

Application numérique :

$$\omega_s = 200rad/s$$

Question 46

D'après la définition de l'énoncé :

$$\underline{V} = V_d + jV_q$$

Donc

$$\underline{V} = RI_d - \omega_s LI_q + j(RI_q + \omega_s(LI_d + \phi_f))$$

Je développe cette expression et je réorganise les termes pour pouvoir identifier \underline{I} et \underline{E} :

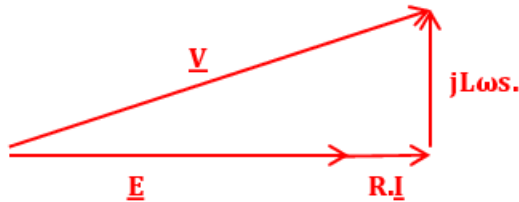
$$\underline{V} = R(I_d + jI_q) - \omega_s L I_q + j\omega_s L I_d + j\omega_s \phi_f$$

C'est-à-dire que :

$$\underline{V} = (R + jL\omega_s)\underline{I} + \underline{E}$$

Question 47

Pour le point de fonctionnement étudié, le courant est un imaginaire pur. En prenant \underline{E} comme origine des phases, on trace le diagramme vectoriel suivant :



Question 48

Je calcule le courant à partir de la relation donnée dans l'énoncé : $C_m = P\phi_f I_q$

Le couple moteur à prendre en compte est tel que :

$$C_m = \frac{C_{E1}}{r}$$

r étant le rapport de réduction du réducteur placé en aval du moteur. J'en déduis :

$$I_q = \frac{C_{E1}}{rP\phi_f}$$

Application numérique :

$$I_q = \frac{44}{120 * 4 * 0.05} = 1,85A$$

Question 49

La valeur efficace V est telle que (d'après l'énoncé) :

$$V = \frac{\|\underline{V}\|}{\sqrt{3}}$$

Et d'après la représentation graphique de la question 47, on a :

$$V = \frac{\|\underline{V}\|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\omega_s \phi_f + R I_q)^2 + (L \omega_s I_q)^2}$$

Application numérique :

$$V = 12V$$

Question 50

La fréquence f requise se déduit de la pulsation de synchronisme trouvée en Q45

Je sais que :

$$n_s = \frac{f}{P}$$

Donc :

$$f = n_s P = \frac{\omega_s}{2\pi} P$$

L'application numérique donne $f = 127\text{Hz}$. C'est compris dans la plage de fréquence du variateur (de 0Hz à 200Hz) donc le variateur est validé pour le critère de fréquence.

Le courant nécessaire pour ce point de fonctionnement est de 1.85A (Q48), le courant max admissible par le variateur étant de 2A, le variateur est validé pour le critère de courant maximum.

Enfin, la tension requise est de 12V, ce qui est inférieur à la tension de 120V autorisée par le variateur. Le variateur est validé pour le critère de tension efficace.

Par conséquent, le variateur est validé pour ce point de fonctionnement.