

## Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2021

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

# Étude d'un moteur à cylindrée variable avec pilotage en temps réel du taux de compression

Corrigé UPSTI

## 2 Modulation de la course du piston

### 2.1 Principales grandeurs caractéristiques

**Question 1** Déterminer l'expression de la course du piston dans un moteur conventionnel, notée  $C_{\text{conv}}$ , en fonction des paramètres géométriques des pièces en présence.

La course du piston s'écrit  $C_{\text{conv}} = \lambda'_{\text{maxi}} - \lambda'_{\text{mini}} = (AB + BC) - (BC - AC) = 2a'$ .

**Question 2** En se basant sur les figures 7 et 8, déterminer l'expression de la cylindrée  $V_{\text{conv}}$  ainsi que l'expression du taux de compression  $\tau_{\text{conv}}$  correspondant.

La cylindrée est le volume balayé par le piston, soit le produit de la course par la section (avec  $L_3 = a'$ ) :  $V_{\text{conv}} = C_{\text{conv}}S = 2L_3 \frac{\pi D^2}{4}$ .

Le volume mort  $V_{\text{PMH}}$  vaut :  $V_{\text{PMH}} = [L - (L_3 + L_2 + \delta)]S + V_{\text{col}}$ .

Le volume plein  $V_{\text{PMB}}$  vaut :  $V_{\text{PMB}} = [L - (-L_3 + L_2 + \delta)]S + V_{\text{col}}$ .

Le taux de compression est le rapport :  $\tau_{\text{conv}} = \frac{[L - (-L_3 + L_2 + \delta)]S + V_{\text{col}}}{[L - (L_3 + L_2 + \delta)]S + V_{\text{col}}}$ , avec  $S = \frac{\pi D^2}{4}$ .

**Question 3** À partir des valeurs numériques proposées sur la figure 8, calculer les valeurs numériques de la cylindrée  $V_{\text{conv}}$  et du taux de compression  $\tau_{\text{conv}}$ .

Application numérique :  $V_{\text{conv}} = C_{\text{conv}}S = 2L_3 \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times 40 \times 80 = 0,4 \times 10^6 \text{ mm}^3 = 0,41$ ,

et  $S = \frac{\pi D^2}{4} = 5024 \text{ mm}^2$ ,

d'où  $\tau_{\text{conv}} = \frac{[L - (-L_3 + L_2 + \delta)]S + V_{\text{col}}}{[L - (L_3 + L_2 + \delta)]S + V_{\text{col}}} = \frac{2 \text{ mm} \times 5024 \text{ mm}^2 + 33\,600 \text{ mm}^3}{82 \text{ mm} \times 5024 \text{ mm}^2 + 33\,600 \text{ mm}^3} = 10,2$ .

### 2.2 Plage de variation du système VCRI

**Question 4** Pour la situation PMH, tracer sur le document réponse DR1 le vilebrequin (3) et la bielle (2) et indiquer les nouveaux lieux de  $B$  et  $C$ , notés respectivement  $B_H$  et  $C_H$ . En vous appuyant sur les figures 11 et 12 et en tenant compte des différents lieux de roulement sans glissement, représenter la roue d'engrenage (7) dans la configuration PMH.

Une attention particulière sera portée sur les positions de  $M_H$  et  $K_H$ , dans cette situation.

Voir document réponse figure 1.

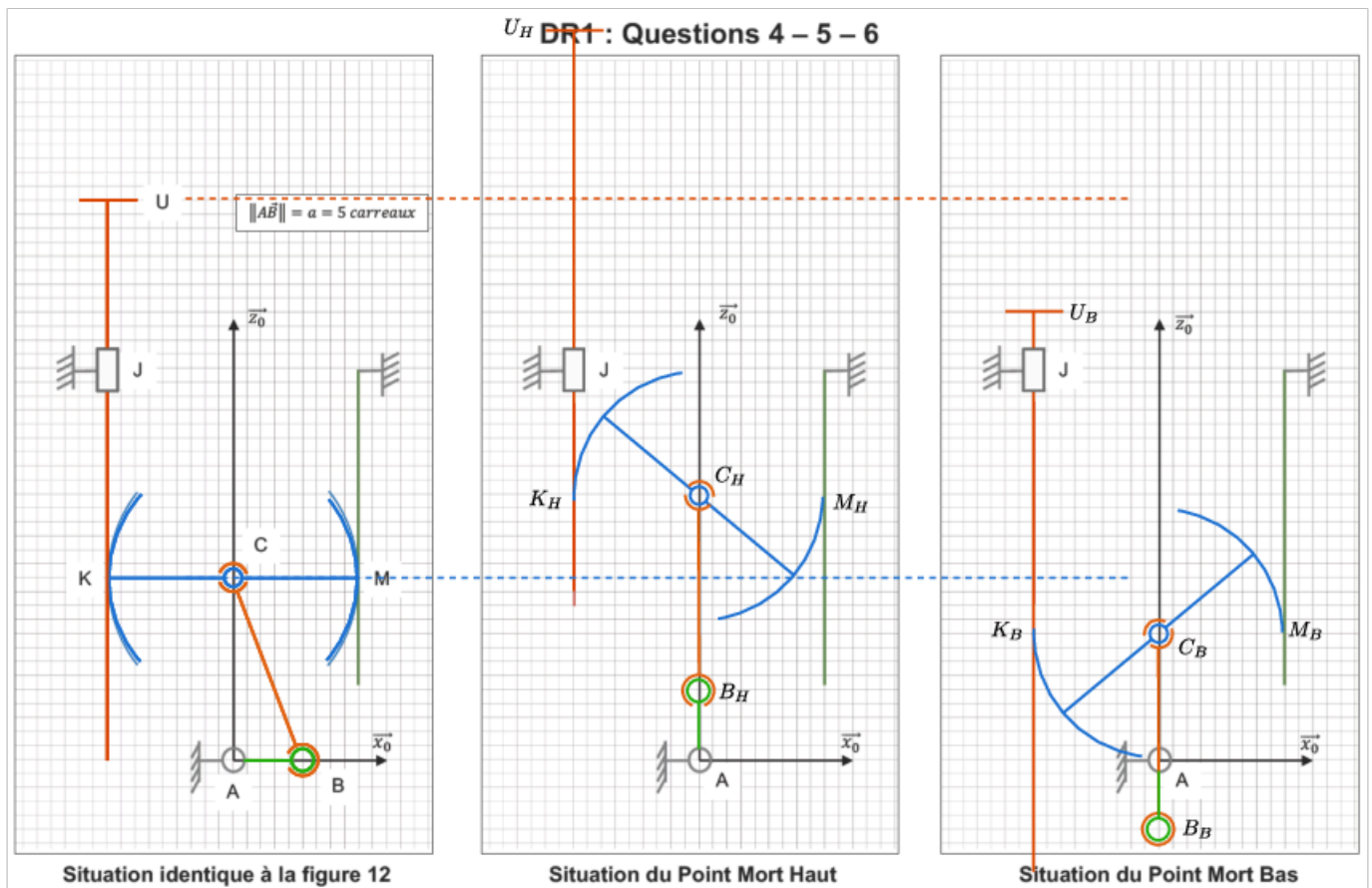


FIGURE 1 – Q4 - Document réponse

**Question 5** En vous appuyant sur les figures 11 et 12 et en tenant compte des différents lieux de roulement sans glissement, déduire la position du piston moteur (1) dans la configuration PMH et la représenter sur le document réponse DR1.

En notant  $U_H$  le nouveau lieu de  $U$  dans la configuration PMH, déterminer la distance  $UU_H$  en fonction de  $a$ .

$$UU_H = 2CC_H = 2(AC_H - AC) = 2((a + b) - \sqrt{b^2 - a^2})$$

**Question 6** Reprendre les questions 4 et 5 pour la situation du point mort bas PMB :

- tracer le vilebrequin (3) et la bielle (2) ;
- placer les points  $B_B$  et  $C_B$  ;
- tracer la roue d'engrenage (7) et le piston moteur (1) ;
- placer le point  $U_B$ .

Donner la distance  $UU_B$  en fonction de  $a$ .

$$UU_B = 2CC_B = 2|AC_B - AC| = 2|(b - a) - \sqrt{b^2 - a^2}|$$

**Question 7** Déduire de ce qui précède la course du piston moteur (1), notée  $C_{VCR}$ , en fonction de  $a$ .

La course du piston vaut  $C_{VCR} = UU_H + UU_B = 4a$ .

**Question 8** En vous appuyant sur les résultats précédents, justifier que pour assurer un fonctionnement équivalent avec  $C_{conv} = C_{VCR}$ , il faut respecter  $a = \frac{a'}{2}$ .

$$C_{\text{conv}} = 2a' \text{ donc } C_{\text{VCR}} = C_{\text{conv}} \Leftrightarrow a = \frac{a'}{2}.$$

**Question 9** Justifier alors l'évolution de forme du vilebrequin du moteur conventionnel vers le VCRi présenté sur la figure 13.

La figure 13 montre que l'excentration est environ deux fois plus faible.

**Question 10** À partir de la figure 13, donner (sans faire de calculs mais en justifiant) la forme des opérateurs d'inertie de chaque vilebrequin dans la base  $B_3$ .

Le plan  $(O, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , avec  $O$  sur l'axe de rotation, est un plan de symétrie. L'opérateur d'inertie présente donc deux produits d'inertie nuls :

$$I_{O,3} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{B_3}$$

Le plan  $(O, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$ , avec  $O$  au milieu du vilebrequin, est *presque* un plan de symétrie. Sous cette hypothèse simplificatrice, l'opérateur d'inertie présente trois produits d'inertie nuls :

$$I_{O,3} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{B_3}$$

**Question 11** D'un point de vue des ordres de grandeurs numériques, quelles sont les différences et/ou similitudes attendues entre ces deux opérateurs ?

Dans les deux cas,  $(O, \vec{y}_3)$  est un axe principal d'inertie. Le reste ne semble pas comparable : la masse est notablement différente ( $M_{\text{FCR}} > M_{\text{VCR}}$ ), l'excentration aussi ( $a' > a$ ) si bien que le moment d'inertie suivant  $(O, \vec{y}_3)$  sera très différent ( $B_{\text{FCR}} > B_{\text{VCR}}$ ).

**Question 12** Donner deux conséquences mécaniques intéressantes à l'utilisation d'un vilebrequin tel que celui du VCRi par rapport à un vilebrequin d'un moteur FCR.

Le vilebrequin du VCRi est *moins lourd* et supporte *moins d'efforts d'inertie* car les masses d'équilibrage sont réduites. Il présente aussi *moins d'inertie* pour le moteur, qui sera ainsi plus nerveux. Néanmoins, le gain sur l'inertie du vilebrequin ne sera réellement utile que s'il n'est pas nécessaire de reporter le complément d'inertie sur le volant d'inertie pour assurer un fonctionnement correct du moteur.

**Question 13** En s'appuyant sur les relations de roulement sans glissement existantes dans le système, compléter sur le document réponse DR2 les situations présentant le piston de commande en position « au plus bas » pour les deux points morts haut et bas :

- représenter les pièces manquantes et compléter celles partiellement dessinées ;
- faire apparaître les lieux précis des points  $M_H$ ,  $K_H$  et  $U_H$  ;
- de même, faire apparaître les lieux précis des points  $M_B$ ,  $K_B$  et  $U_B$ .

Voir document réponse figure 2.

**Question 14** À partir des tracés effectués à la question précédente, exprimer la loi de variation de la position du piston moteur pour le point mort haut en fonction de la position du piston de commande.

Le point mort haut se déplace vers le *haut* de la même distance que le piston de commande vers le *bas*.

En effet, pour une position haute du vilebrequin supposée fixe, les mouvements des deux pistons (et leurs crémaillères) sont liés par un unique pignon 7 dont les rayons primitifs à gauche et à droite sont identiques.

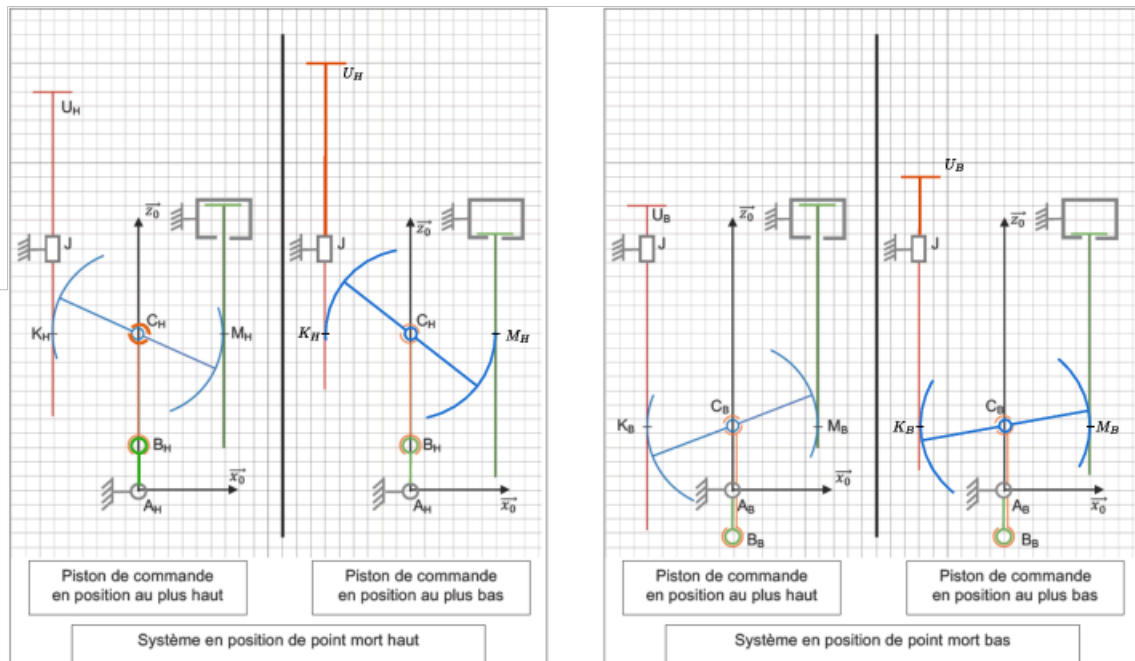


FIGURE 2 – Q13 - Document réponse

**Question 15** En déduire l'influence de la position du piston de commande sur le volume mort dans la chambre de combustion.

Le piston de commande ne modifie pas la cylindrée mais il modifie directement le volume mort.

**Question 16** Le comportement est-il similaire avec la position du point mort bas? Justifier. On pourra s'appuyer sur les tracés réalisés sur le document réponse DR2.

Oui, le point mort bas se déplace comme le point mort haut en fonction du déplacement du piston de commande (même raisonnement que pour le point mort haut).

**Question 17** Quelle est l'influence de la position du piston de commande sur la course du piston moteur?

La course ne sera pas modifiée par le piston (sous réserve qu'il reste fixe sur un tour).

**Question 18** Calculer, avec les valeurs numériques de la figure 15, les taux de compression mini et maxi atteignables et conclure quant au respect de l'exigence 1.2 du diagramme SysML de la figure 4.

La figure 15 montre que la course et le diamètre du piston de combustion valent 80 mm, que le volume mort correspond à 1 mm du cylindre augmenté de la zone conique supérieure de  $V_z = 30 \text{ cm}^3$  et que la course du piston de commande est de 9 mm.

Dans la situation de la figure 15 (piston de commande en extrémité basse), le taux de compression est maximal et vaut (avec  $S = \pi \frac{D^2}{4}$ ) :

$$\tau_{\text{maxi}} = \frac{V_{\text{mort mini}} + V_{\text{course}}}{V_{\text{mort mini}}} = \frac{(1 \text{ mm} \times S + V_z) + 80 \text{ mm} \times S}{1 \text{ mm} \times S + V_z} = 12,5$$

Quand le piston monte de 9 mm, le taux de compression est minimal et vaut :

$$\tau_{\text{maxi}} = \frac{V_{\text{mort maxi}} + V_{\text{course}}}{V_{\text{mort maxi}}} = \frac{((1 \text{ mm} + 9 \text{ mm}) \times S + V_z) + 80 \text{ mm} \times S}{(1 \text{ mm} + 9 \text{ mm}) \times S + V_z} = 6$$

### 3 Analyse du fonctionnement du sous-ensemble de combustion

**Question 19** Expliquer le rôle tenu par le tenon vertical pour le rouleau synchronisé et par la bande de roulement sphérique pour la roue d'engrenage dans le positionnement des pièces.

Le tenon vertical permet d'assurer le positionnement du rouleau *et* du piston en translation suivant l'axe du rouleau.

La bande de roulement sphérique permet de supporter les efforts radiaux et d'éviter qu'ils ne soient supportés par les dents d'engrenages (qui supporteront les efforts tangentiels).

#### 3.1 Étude dynamique du piston moteur

**Question 20** Exprimer l'effort  $F_{Uz}$  en fonction de  $p_r$  et des caractéristiques géométriques du problème.

$$F_{Uz} = p_r \frac{\pi d^2}{4}$$

**Question 21** Justifier la forme de l'opérateur d'inertie  $[I_{G_P, piston}]$ .

Le plan  $(G_P, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  est un plan de symétrie du piston.

Le plan  $(G_P, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un plan de symétrie *approximative* du piston.

On en déduit que  $I_{G_P, piston}$  est approximativement diagonale.

Remarque : le piston 3 étant en translation par rapport au bâti, cet opérateur ne sera de toute façon pas utile.

**Question 22** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, exprimer  $F_{Jx}$  en fonction des efforts  $F_{Kx}$ ,  $F_{Qx}$ ,  $F_{Kz}$ , de  $p_r$  et des caractéristiques du piston.

L'expression demandée est indépendante de l'accélération du piston. Il faut donc éviter de faire intervenir le torseur dynamique dans l'équation.

On isole le piston de combustion, TMD en  $G_P$  (pour éviter  $m_P \ddot{\lambda}_1$ ) :

$$\vec{\delta}_{G_P, 1/0} \cdot \vec{y}_1 = \vec{M}_{G_P, \vec{F}_J} \cdot \vec{y}_1 + \vec{M}_{G_P, \vec{F}_Q} \cdot \vec{y}_1 + \vec{M}_{G_P, \vec{F}_K} \cdot \vec{y}_1 + \vec{M}_{G_P, \vec{F}_U} \cdot \vec{y}_1$$

Le poids est négligé et même s'il ne l'était pas, il s'applique en  $G_P$  donc sa participation à l'expression est nulle.

La composante du moment dynamique est nulle en  $G_P$  car il s'agit d'un mouvement de translation et le point de réduction  $G_P$  est le centre de masse.

On en déduit alors l'expression :

$$0 = F_{Jx}(z_J - z_G) - F_{Qx}(z_G - z_Q) + F_{Qz}(x_G - x_Q) - F_{Kx}(z_G - z_K) - F_{Kz}(x_K - x_G) + F_{Uz}\left(\frac{d}{2} - x_G\right)$$

$$\text{d'où } F_{Jx} = \frac{1}{z_J - z_G} \left[ F_{Qx}(z_G - z_Q) - F_{Qz}(x_G - x_Q) + F_{Kx}(z_G - z_K) + F_{Kz}(x_K - x_G) - p_r \frac{\pi d^2}{4} \left(\frac{d}{2} - x_G\right) \right]$$

**Question 23** Justifier que le piston moteur soit fabriqué de façon à ce que  $x_K = x_G = \frac{d}{2}$ . Donner alors l'expression simplifiée de  $F_{Jx}$ .

Si  $x_K = x_G = \frac{d}{2}$ , alors deux termes disparaissent de l'expression de  $F_{Jx}$ . Ce sont par ailleurs les composantes d'effort principales dans le mécanisme donc cette propriété géométrique est intéressante.

$$\text{Alors : } F_{Jx} = \frac{1}{z_J - z_G} [F_{Qx}(z_G - z_Q) - F_{Qz}(x_G - x_Q) + F_{Kx}(z_G - z_K)]$$

**Question 24** Montrer que dans ces conditions :  $F_{Jx} = \frac{L}{z_Q - z_J} F_{Qz}$ .

$$\text{Sachant que } z_Q \simeq z_K, F_{Jx} = \frac{1}{z_J - z_G} [(F_{Qx} + F_{Kx})(z_G - z_Q) - F_{Qz}(x_G - x_Q)]$$

On applique le TRS au piston suivant  $\vec{x}_1$  (sachant que l'accélération est verticale) :

$$F_{Jx} + F_{Qx} + F_{Kx} + 0 + 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{Qx} + F_{Kx} = -F_{Jx}$$

On simplifie alors l'expression précédente (sachant que  $x_G = x_K$ ) :

$$(z_J - z_G)F_{Jx} + (z_G - z_Q)F_{Jx} = -F_{Qz}(x_G - x_Q) \quad \Leftrightarrow \quad (z_J - z_Q)F_{Jx} = -F_{Qz}L \quad \Leftrightarrow \quad F_{Jx} = \frac{L}{z_Q - z_J} F_{Qz}$$

### 3.2 Étude du rouleau synchronisé

**Question 25** Exprimer la relation de roulement sans glissement entre le rouleau et la platine en  $I$  et en déduire l'expression de  $\dot{\lambda}_2$  en fonction de  $\dot{\beta}$ .

Le roulement sans glissement en  $I$  conduit à  $\vec{V}_{I,2/0} = \vec{0}$ . Soit :

$$\vec{V}_{O_2,2/0} + \dot{\beta} \vec{y}_0 \wedge \vec{O}_2 \vec{I} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\lambda}_2 \vec{z}_0 + \dot{\beta} R_S \vec{z}_0 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\lambda}_2 = -R_S \dot{\beta}$$

**Question 26** Exprimer la relation de roulement sans glissement entre le rouleau et le corps en  $Q$  et en déduire l'expression de  $\dot{\lambda}_1$  en fonction de  $\dot{\beta}$ .

Le roulement sans glissement en  $Q$  conduit à  $\vec{V}_{Q,1/2} = \vec{0}$ . Soit :

$$\vec{V}_{Q,1/0} = \vec{V}_{Q,2/0} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\lambda}_1 \vec{z}_0 = \vec{V}_{I,2/0} + \dot{\beta} \vec{y}_0 \wedge \vec{I} \vec{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\lambda}_1 \vec{z}_0 = \vec{0} - 2R_S \dot{\beta} \vec{z}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\lambda}_1 = -2R_S \dot{\beta}$$

**Question 27** Montrer alors que  $\dot{\lambda}_1 = 2\dot{\lambda}_2$ .

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -2R_S \dot{\beta} \\ \dot{\lambda}_2 = -R_S \dot{\beta} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_1 = 2\dot{\lambda}_2$$

**Question 28** En appliquant le théorème de l'énergie puissance, exprimer  $F_{Qz}$  en fonction de  $\dot{\lambda}_2$  et des caractéristiques du rouleau synchronisé.

On isole le rouleau et on applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_{c2}}{dt} = P_{ext \rightarrow 2/0} + P_{int}$$

avec  $E_{c2} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{T}_{2/0} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{2/0} \}$  où  $\{ \mathcal{V}_{2/0} \} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{y}_0 \\ \dot{\lambda}_2 \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$  et  $\{ \mathcal{C}_{2/0} \} = \begin{Bmatrix} m_r \dot{\lambda}_2 \vec{z}_0 \\ B_r \dot{\beta} \vec{y}_0 + \vec{0} \end{Bmatrix}$  (car  $O_2$  est centre de masse).

$$D'o\grave{u} E_{c2} = \frac{1}{2} (B_r \dot{\beta}^2 + m_r \dot{\lambda}_2^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{B_r}{R_S^2} + m_r \right) \dot{\lambda}_2^2$$

Sachant que la liaison entre 0 et 2 est parfaite et que la puissance du poids est n\u00e9gligeable :

$$P_{ext \rightarrow 2/0} = P_{0 \rightarrow 2/0} + P_{1 \rightarrow 2/0} + P_{poids \rightarrow 2/0} = (-F_{Qz}) \times \dot{\lambda}_1 = -2F_{Qz} \dot{\lambda}_2$$

D'o\u00f9 le th\u00e9or\u00e8me de l'\u00e9nergie cin\u00e9tique :

$$\left( \frac{B_r}{R_S^2} + m_r \right) \ddot{\lambda}_2 \dot{\lambda}_2 = -2F_{Qz} \dot{\lambda}_2 \Rightarrow F_{Qz} = \frac{-1}{2} \left( \frac{B_r}{R_S^2} + m_r \right) \ddot{\lambda}_2$$

**Question 29** D\u00e9duire des questions 24 et 28 l'expression de  $F_{Jx}$  en fonction de  $\ddot{\lambda}_2$ .

$$F_{Jx} = \frac{-L}{z_Q - z_J} \frac{1}{2} \left( \frac{B_r}{R_S^2} + m_r \right) \ddot{\lambda}_2$$

**Question 30** \u00c9valuer num\u00e9riquement  $F_{Jx}$ .

$$F_{Jx\max} \simeq \frac{L}{|z_Q - z_J|} \frac{1}{2} \left( \frac{B_r}{R_S^2} + m_r \right) \frac{\ddot{\lambda}_{1\max}}{2} = 60 \text{ N}$$

**Question 31** Rappeler les caract\u00e9ristiques de la mod\u00e9lisation des frottements dans le mod\u00e8le de Coulomb.

Mod\u00e8le de Coulomb :

$$\text{Si le contact est adh\u00e9rent : } \begin{cases} \vec{V}_{J,1/0} = \vec{0} \\ \|\vec{T}_{0 \rightarrow 1}\| \leq f \|\vec{N}_{0 \rightarrow 1}\| \end{cases}$$

$$\text{Si le contact est glissant : } \begin{cases} \|\vec{T}_{0 \rightarrow 1}\| \leq f \|\vec{N}_{0 \rightarrow 1}\| \\ \vec{T}_{0 \rightarrow 1} \wedge \vec{V}_{J,1/0} = \vec{0} \\ \vec{T}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}_{J,1/0} \leq 0 \end{cases}$$

**Question 32** \u00c0 la lumi\u00e8re des valeurs obtenues dans les questions pr\u00e9c\u00e9dentes, discuter de la pertinence de l'hypoth\u00e8se n\u00e9gligeant les frottements entre le piston moteur et le carter en  $J$ .

$f$  est de l'ordre de 0,1 donc  $F_{Jz} \simeq f F_{Jx} \simeq 6 \text{ N}$ , \u00e0 comparer \u00e0  $F_x \simeq p_r \frac{\pi d^2}{4} \simeq 20 \text{ kN} \gg F_{Jz}$ . Il est donc tout \u00e0 fait raisonnable de n\u00e9gliger la part du frottement au contact en  $J$  devant les autres actions m\u00e9caniques en pr\u00e9sence.

**Question 33** Justifier l'importance de conserver, dans la motorisation VCRI, un effort  $F_{Kz}$  \u00e9quivalent \u00e0 l'effort vertical transmis \u00e0 la bielle d'une motorisation FCR.

La course est identique et la vitesse aussi. Il faut donc un effort \u00e9quivalent pour avoir un moteur de puissance \u00e9quivalente.

**Question 34** Justifier la forme de la courbe donnant l'\u00e9volution de  $F_{Jx}$ .

$F_{Jx}$  est l'action du guidage du piston dans le carter. Cette action est tr\u00e8s faible compar\u00e9e aux autres efforts transmis dans le m\u00e9canisme du fait des bonnes propri\u00e9t\u00e9s de la g\u00e9om\u00e9trie \u00e9voqu\u00e9es en question 23. En particulier elle n'est pas sensible \u00e0 la pression dans le piston. La forme de la courbe montre un aspect p\u00e9riodique de m\u00eame p\u00e9riode que le moteur.



**Question 35** Proposer au moins une explication sur l'origine de cette forte amplitude de  $F_{Qx}$ .

L'effort transmis verticalement présente un pic lors de la combustion et donc de l'élévation de la pression dans la chambre. Cet effort conduit à un effort horizontal  $F_{Qx}$  du fait de l'angle de pression de l'engrenage.

**Question 36** Discuter de l'influence de  $F_{Qx}$  sur le rendement général du système.

$F_{Qx}$  ne conduit pas à des pertes importantes car il n'y a pas de glissement dans les guidages supportant cet effort mais du roulement.

## 4 Maintien de l'isostatisme simultanément sur le système de transmission de puissance et de réglage

### 4.1 Présence du vérin presseur

**Question 37** Identifier les deux mobilités internes présentes dans cette modélisation.

Les deux mobilités internes qui sont immédiatement identifiables correspondent à :

- la rotation de la pièce 2 autour de  $(BC)$  ;
- la rotation de la pièce 8 autour de  $(H, \vec{x}_0)$ .

**Question 38** Mettre en place le graphe des liaisons du système modélisé sur la figure 25 en précisant les caractéristiques de chaque liaison : nom, point d'application et direction.

Le graphe des liaisons est donné sur la figure 3, où P=pivot, PG=pivot-glissant, S=sphérique, SC=sphère-cylindre, SP=sphère-plan et LR=linéaire-rectiligne.

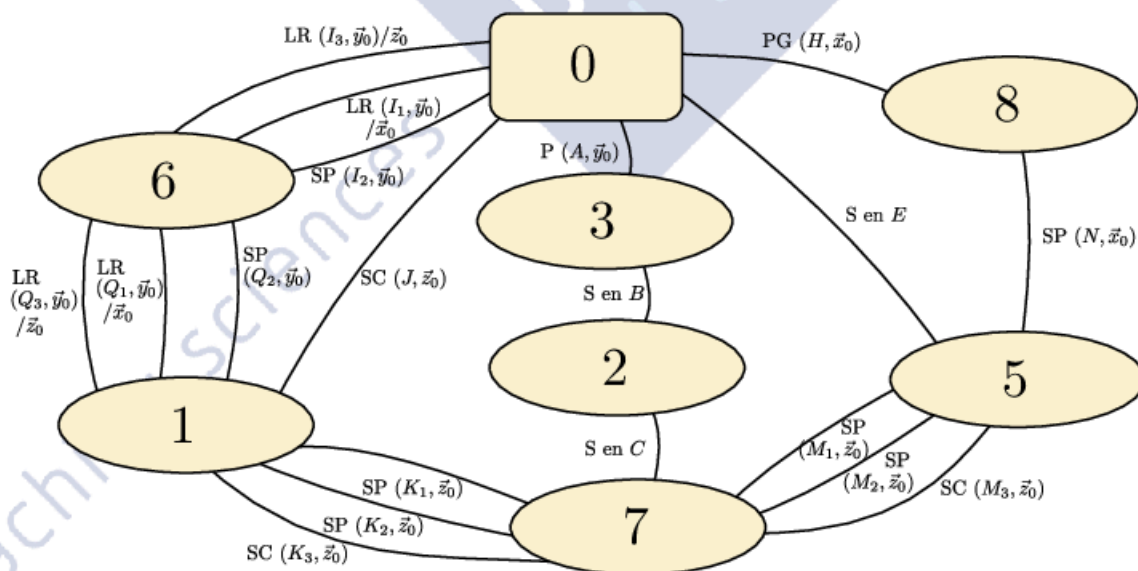


FIGURE 3 – Q38 - Graphe de structure

**Question 39** Calculer le nombre de boucles présentes dans la modélisation proposée (aussi appelé nombre cyclomatique).

Le nombre de boucle présentes dans le modèle à  $S = 8$  solides et  $N = 19$  liaisons s'écrit  $\gamma = N - S + 1 = 12$

boucles. Le graphe des liaisons confirme ce calcul.

**Question 40** Calculer le degré d'hyperstatisme de cette modélisation et conclure sur le respect de l'exigence d'isostatisme du cahier des charges.

Vu le titre de la partie, la réponse la plus probablement attendue était la suivante :

- 2 mobilités internes comme indiqué en question 37, une mobilité utile (la rotation du vilebrequin ; la translation du vérin de réglage n'est pas modélisée ici vue la rotule entre 0 et 5 en  $E$ ), soit une mobilité totale de  $m = 3$  ;
- un nombre cyclomatique  $\gamma = 12$  comme indiqué en question 39 ;
- un nombre d'inconnues cinématiques conduisant pour 4 linéaires rectilignes, 7 sphère-plans, 3 sphère-cylindre, 3 sphériques, une pivot et une pivot-glissant à  $I_c = 4 \times 4 + 7 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 75$  ;
- un coefficient d'hyperstaticité  $h = 6\gamma - I_c + m = 6 \times 12 - 75 + 3 = 0$ .

Le modèle serait donc isostatique conformément au titre de la partie. Les candidats ayant apporté cette réponse auront fort probablement eu les points.

Cependant, le modèle est bien hyperstatique au niveau de la boucle 0-6-1-0. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer uniquement le sous-ensemble  $\{0,6,1\}$  du mécanisme et on trouve  $m = 1$ ,  $\gamma = 5$ ,  $I_c = 4 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 4 = 30$ , soit  $h = 6 \times 5 - 30 + 1 = 1$ . La surcontrainte associée est assez facile à trouver : l'association parallèle des deux linéaires rectilignes et d'une ponctuelle est équivalente à une liaison pivot. La boucle 0-6-1-0 est donc constituée de 2 pivots équivalentes d'axes  $(I_1 I_3)$  et  $(Q_1 Q_3)$  et une sphère-cylindre. Il est alors évident que le solide 1 présente un mouvement plan dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{z}_0)$ , que les deux liaisons pivots en série bloquent toute translation de 1 suivant  $\vec{y}_0$ , et que la liaison sphère-cylindre bloque elle aussi la translation suivant  $\vec{y}_0$ , de façon redondante...

Le calcul conduisant à  $h = 0$  comporte donc une erreur : il y a en réalité 3 mobilités internes et pas deux, la troisième étant (très) difficile à visualiser. Pour tenter de l'identifier, il faut considérer que l'association parallèle de deux ponctuelles et une sphère-cylindre entre 1 et 7 d'une part, et entre 7 et 5 d'autre part, sont équivalentes chacune à une sphérique à doigt (ou un joint de cardan pour bien identifier le mouvement).

Il faut remarquer que si l'on considère la mobilité principale (utile) bloquée, le point  $C$  est fixe. Par ailleurs, l'association série d'une sphère-plan et une pivot-glissant entre 5 et 0 revient à une liaison équivalente libre (pas de liaison).

On a déjà vu que la boucle 0-6-1-0 conduit à un mouvement à 1 ddl de  $1/0$ , essentiellement une translation verticale.

Le solide 7 peut donc pivoter autour de l'axe  $(C, \vec{y}_0)$ , le solide 1 étant libre de translater suivant  $\vec{z}_0$  et le solide 5 étant libre de tourner suivant  $(E, \vec{y}_0)$ . Il s'agit de cette troisième mobilité interne difficile à voir *a priori*. En refaisant le calcul initial avec 3 mobilités internes, on retrouve un hyperstatisme  $h = 1$  qui trouve son origine dans la boucle 0-6-1-0.

**Question 41** Décrire succinctement le rôle du vérin presseur et son intérêt pour le système par rapport à un appui direct du piston de commande 5 sur le carter 0.

Sur le modèle de la figure 25, le piston de commande 5 s'appuie sur le piston presseur 8 (liaison sphère-plan), lui-même en liaison pivot-glissant avec le bâti 0. L'association série d'une sphère-plan et d'une pivot-glissant (dont la normale de l'une est confondue avec l'axe de l'autre) conduit à une liaison libre : le piston presseur n'introduit donc aucun hyperstatisme dans le modèle. Le contrôle de la pression s'exerçant sur le piston presseur permet de maîtriser les efforts dans le mécanisme et de rattraper les éventuels jeux.

Si au contraire le piston de commande était en appui direct sur le bâti, cela revient à supprimer la liaison pivot-glissant (soit 2 inconnues cinématiques), et une mobilité (interne), ce qui va mécaniquement augmenter l'hyperstatisme de 1.

Les efforts seront donc indéterminés dans le calcul, non maîtrisés dans la réalité et les jeux éventuels non rattrapés.

**Question 42** La solution actuelle est visiblement plus simple puisqu'elle est composée de moins de pièces. Démontrer par le calcul que ces deux solutions sont bien équivalentes sur le plan cinématique.

La figure 28 montre une association série d'une pivot-glissant (une translation entre autres) et une sphère-plan (2 translations complémentaires et 3 rotations), ce qui conduit à une liaison libre.

La figure 29 montre une association série d'une pivot-glissant (une translation entre autres), une sphérique (3 rotations) et un appui-plan (2 translations complémentaires), ce qui conduit à nouveau à une liaison libre.

Le sujet demande de « démontrer par le calcul », ce qui se fait facilement par composition des vitesses.

$$\text{Pour la figure 28, } \left\{ \mathcal{V}_{5/0} \right\} = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & V \\ \gamma & W \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} \omega & U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} = \begin{Bmatrix} \alpha + \omega & U \\ \beta & V \\ \gamma & W \end{Bmatrix}_{R_0}$$

$$\text{Pour la figure 29, } \left\{ \mathcal{V}_{5/0} \right\} = \begin{Bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & V \\ 0 & W \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} \omega' & U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} = \begin{Bmatrix} \omega + \alpha + \omega' & U \\ \beta & V \\ \gamma & W \end{Bmatrix}_{R_0}$$

Dans les deux cas le torseur équivalent est celui d'une liaison libre.

## 4.2 Dimensionnement du vérin presseur

**Question 43** Déterminer, à l'aide des théorèmes généraux, l'expression de  $F_{Nx}$  en fonction de  $F_{Mx}$  et des grandeurs géométriques du piston de commande.

On isole le piston et on applique le théorème du moment statique en  $E$  suivant  $\vec{y}_0$  (pour éviter  $F_{Ex}$  et  $F_{Ez}$ ).

$$-(z_E - (-z_M))F_{Mx} + (z_E - (-z_N))F_{Nx} + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Nx} = \frac{z_E + z_M}{z_E + z_N} F_{Mx}$$

**Question 44** À partir de la figure 31 et des résultats précédents, évaluer numériquement la plage de variation de l'amplitude de  $F_{Nx}$ .

$F_{Mx}$  varie de 0 à 18500 N. Le maximum est (très significativement) atteint en  $\theta = 400^\circ$  (environ le PMH), c'est-à-dire pour  $z_M = 45$  mm (position haute).

L'effort maximal vaut donc  $F_{Nx\max} = \frac{40+45}{40+90} F_{Mx\max} = 12,1$  kN, d'où un effort  $F_{Nx}$  compris entre 0 et 12,1 kN, soit une « amplitude de  $F_{Nx}$  » de 12,1 kN.

Remarque : La question demande la « plage de variation de l'amplitude de  $F_{Nx}$  » et l'énoncé précise la plage de variation de la position  $z_M$  du point  $M$  selon l'instant du cycle. Il faut cependant bien remarquer que  $F_{Mx}$  présente un pic à  $\theta = 400^\circ$ , correspondant au PMH, donc la variation de  $z_M$  au cours du cycle ne participe pas à une variation d'amplitude de  $F_{Nx}$ .

Il y a bien une variation d'amplitude due au réglage possible par le piston de réglage, mais le réglage ne modifie pas l'altitude  $z_M$  pour le PMH donc la variation sera uniquement due à l'effet du taux de compression, que la courbe ne précise pas. Par ailleurs, ce déplacement a pour amplitude 10 mm et non pas 40 mm et l'énoncé n'indique pas pour quel réglage l'intervalle  $z_M \in [45 \text{ mm}; 85 \text{ mm}]$  est donné (la position verticale du piston de commande est même supposée constante dans le paramétrage du point  $N$ ).

**Question 45** Le piston proposé pour le vérin presseur possédant un rayon de 15 mm, conclure sur son

adéquation avec les besoins du système.

L'ensemble piston, ressort et clapet anti-retour est essentiellement un système de rattrapage de jeu. Lorsque les efforts sont nuls ou faibles, l'action du ressort et de la pression à 30 bars permettent de sortir le piston jusqu'à combler les jeux de fonctionnement. Lors de la combustion, des efforts importants sont transmis et le clapet anti-retour bloque l'échappement de l'huile, ce qui maintient le piston en position (la pression pouvant alors monter à des valeurs importantes).

Pour la valeur de pression maximale admissible de 270 bars, la force développée par le piston serait de  $F_{maxi} = \pi R^2 p = 19 \text{ kN} > F_{Nx\ maxi}$  ce qui valide l'adéquation du rayon choisi au regard du besoin.

**Question 46** Justifier la nécessité du ressort en tant qu'« organe de sécurité ».

Le ressort est utile en cas de défaillance de la source de pression à 30 bars, pour rattraper les jeux dans les phases d'efforts nuls et compenser les fuites des phases de pression élevée.

## 5 Modélisation de la commande

### 5.1 Asservissement simple de la commande du taux de compression

**Question 47** Décrire le fonctionnement d'un capteur à effet Hall. Que faut-il rajouter au piston de commande au niveau de la zone en regard du capteur ?

Un capteur à effet Hall mesure l'intensité d'un champ magnétique dans une direction donnée. Il faut donc ajouter un aimant en regard du capteur pour mesurer un changement de champ magnétique autour du capteur.

**Question 48** En vous basant sur les mesures expérimentales (figure 34), proposer la loi de comportement du capteur à effet Hall dans le domaine de Laplace notée  $H_h(p) = \frac{U_h(p)}{Z(p)}$ .

Loi du capteur linéaire :  $u_h = K_h z$ , où  $H_h(p) = K_h = \frac{\Delta u_h}{\Delta z} = \frac{2 - (-2)}{7 - (-7)} = 0,29 \text{ V/mm}$ .

**Question 49** Compléter sur le document réponse DR3 la représentation du système sous forme de schémas blocs. Préciser l'unité physique des entrées/sorties de chaque bloc sous la forme : [unité].

Le schéma bloc est donné figure 4.

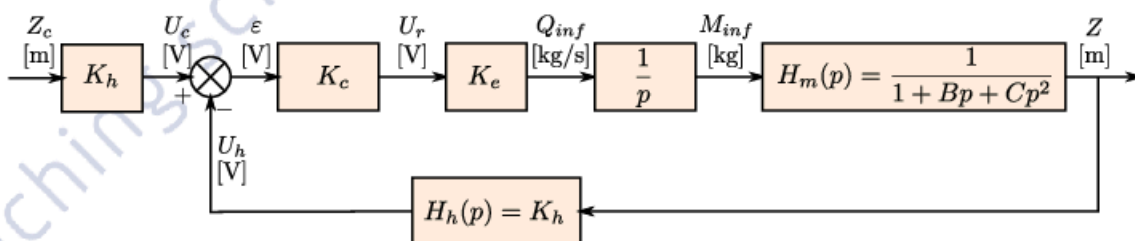


FIGURE 4 – Q49 - Schéma bloc

**Question 50** Transformer le schéma de la figure 35 en système à retour unitaire.

Le schéma à retour unitaire est donné sur la figure 5.

**Question 51** Préciser la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la mettre sous la forme canonique.

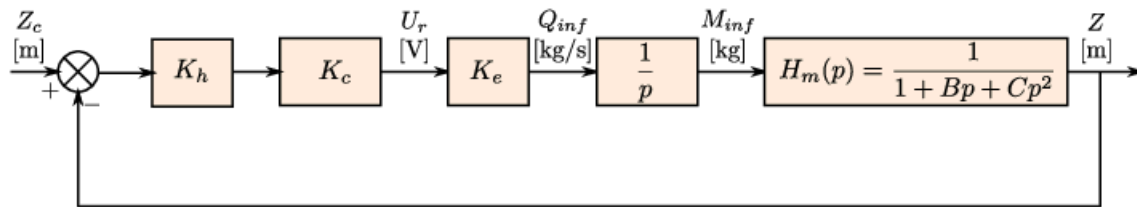


FIGURE 5 – Q50 - Schéma bloc à retour unitaire

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$FTBO(p) = K_h K_c K_e \frac{1}{p} H_m(p) = \frac{K_h K_c K_e A}{p(1 + Bp + Cp^2)}$$

**Question 52** Quelle est la précision de ce système pour une entrée en échelon unitaire ?

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 donc, sous réserve qu'il soit stable, le système est précis pour une entrée en échelon.

**Question 53** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du système et la mettre sous la forme canonique.

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$FTBF(p) = \frac{K_h K_c K_e A}{p(1 + Bp + Cp^2) + K_h K_c K_e A} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_h K_c K_e A} p + \frac{B}{K_h K_c K_e A} p^2 + \frac{C}{K_h K_c K_e A} p^3}$$

**Question 54** Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5%  $t_{5\%}$ , la valeur du premier dépassement  $D_1$  et la pseudo-pulsation  $\omega_p$ .

Le temps de réponse vaut environ  $t_{5\%} = 0,066$  s et le dépassement vaut  $D_1 = \frac{9,2-8}{8} = 15\%$ .

La pseudo-période se mesure à environ  $T_p = 0,09$  s d'où  $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = 70$  rad/s.

**Question 55** En déduire le gain statique, le coefficient d'amortissement et la pulsation propre de la FTBF.

Le système converge vers la consigne donc le gain statique vaut  $K = 1$ .

Pour un second ordre, l'amortissement  $\varepsilon$  est lié au dépassement :

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\ln^2 D_1}}} = 0,52 \quad \text{pour la valeur } D_1 = 15\%$$

On en déduit la pulsation propre :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 70 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = 82 \text{ rad/s}$$

**Question 56** En vous appuyant sur l'identification précédente et les abaques de la figure 37, du temps de réponse réduit  $T_r \cdot \omega_n$  et du dépassement  $D$  d'un système du second ordre, proposer une valeur de  $K_c$  permettant de respecter le cahier des charges.

Le cahier des charges impose un dépassement de 0,3 mm pour un échelon supposé de 8 mm, ce qui correspond à un dépassement  $D_1 = \frac{0,3 \text{ mm}}{8 \text{ mm}} = 4\%$ , d'où en utilisant l'abaque des dépassement  $\varepsilon' \geq 0,75$ .

Le temps de réponse imposé est de  $t_{5\%} = 100$  ms et pour une valeur d'amortissement proche de 0,7,  $t_{5\%}\omega_r = 3$ , d'où  $\omega'_r \geq 30$  rad/s.

La fonction de transfert en boucle fermée est de la forme  $\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{K_c}p + \frac{\beta}{K_c}p^2}$  (voir Q53) donc si on envisage une évolution de la valeur de  $K_c$  telle que  $K_c \rightarrow \lambda K_c$ , alors la FTBF évolue de telle sorte que :

$$FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\varepsilon}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \rightarrow FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\varepsilon}{\lambda\omega_0}p + \frac{p^2}{\lambda\omega_0^2}}$$

Les nouvelles caractéristiques du second ordre sont donc :

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varepsilon \rightarrow \lambda = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^2 = \left(\frac{0,5}{0,75}\right)^2 = 0,8 \text{ maxi} \\ \omega'_0 = \sqrt{\lambda}\omega_0 \rightarrow \lambda = \left(\frac{\omega'_0}{\omega_0}\right)^2 = 0,18 \text{ mini} \end{array} \right.$$

Toute valeur dans l'intervalle  $[0,18; 0,8]$  convient.

**Question 57** Représenter la FTBF asymptotique et l'allure de la courbe réelle ainsi obtenue sur le diagramme de Bode du document réponse DR4.

Pour  $\lambda = 0,8$ ,  $\varepsilon = 0,7 \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}$  correspondant au régime limite de résonance. La pulsation propre vaut alors  $\omega'_0 = \sqrt{\lambda}\omega_0 = 62$  rad/s. Le diagramme de Bode est donné figure 6.

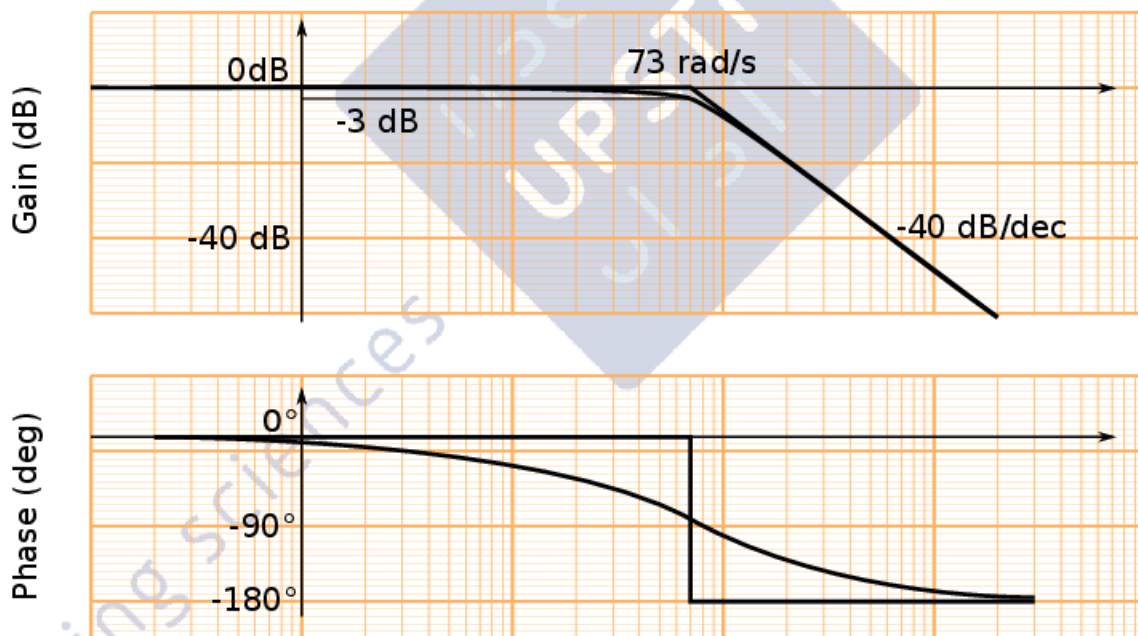


FIGURE 6 – Q57 - Diagramme de Bode

**Question 58** Quelle devra être la forme du signal de commande pour chaque cycle ?

Cette question n'est pas très claire car les notions de « phase favorable » et de « cycles favorables » ne sont pas définies.

Le moteur tourne à 4000 tr/min ce qui conduit à un cycle de 2 tours toutes les 30 ms. Nous allons supposer qu'une « phase favorable » de 2 ms correspond à une fraction du temps d'un cycle où le vérin n'est pas sous charge ce qui permet à l'actionneur de taux de déplacer le piston. Un « cycle favorable » serait alors cette

période de phase favorable, présente une seule fois par cycle thermodynamique (1 cycle pour 2 tours moteurs). Le nombre de cycle favorable correspond donc au nombre de cycle thermodynamiques.

Le temps de réponse lu sur la figure 36, de l'ordre de 65 ms, est très supérieur au temps d'une phase favorable de 2 ms. Il n'y a donc pas lieu d'ajuster la commande à l'échelle de temps d'une phase favorable, mais de définir une commande à l'échelle de temps de plusieurs cycles.

Pour une commande de course du piston de 8 mm, il serait donc approprié d'imposer une consigne de déplacement en échelon de 8 mm, constante à chaque cycle.

**Question 59** En vous appuyant sur la figure 36, préciser  $n_c$ .

Il manque des hypothèses sur le fonctionnement de l'actionneur de taux de compression hors des « phases favorables » pour pouvoir donner une réponse claire.

En négligeant en première approche la notion de « phase favorable », et en considérant que la réponse à un échelon figure 36 ne sera pas affectée, on divise le temps de réponse de 65 ms par la période d'un cycle de 30 ms pour trouver un nombre de cycle légèrement supérieur à 2, donc en arrondissant au nombre de cycle immédiatement supérieur, il faut 3 cycles pour converger.

Si l'actionneur de taux ne peut délivrer de débit au piston *que* durant les « phases favorables », alors la réponse est tout autre : le débit  $Q_{inf}$  serait alors non nul durant seulement 2 ms sur les 30 ms d'un cycle, ce qui va réduire la vitesse de déplacement du piston d'un facteur 15 par rapport à la courbe figure 36, et donc potentiellement nécessiter 15 fois plus de cycles, soit  $15 \times \frac{65}{30} = 33$  cycles. Mais dans cette situation, on peut légitimement s'interroger sur l'intérêt de s'appuyer sur la figure 36 dont les oscillations sont en partie dues au comportement du piston  $H_m(p)$  qui n'a aucune raison d'attendre les phases favorables pour réagir...

## 6 Mise en place d'une correction réglable

### 6.1 Ajout d'une correction donnée à régler

**Question 60** Montrer que le correcteur admet un maximum de phase  $\varphi_{max}$  pour une pulsation  $\omega_\varphi$ .

La phase peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi = \arg(C(p)) = \arg(1 + \alpha\tau j\omega) - \arg(1 + \tau j\omega) = \arctan(\alpha\tau\omega) - \arctan(\tau\omega)$$

Sachant que  $\alpha > 1$ ,  $\alpha\tau\omega > \tau\omega$  et comme l'arctangente est une fonction monotone croissante, on en déduit que  $\varphi$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs,  $\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$  et  $\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$ , donc  $\varphi(\omega)$  présente bien au moins un maximum sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Question 61** Déterminer  $\omega_\varphi$  en fonction de  $\alpha$  et  $\tau$ .

L'extremum de phase s'obtient en  $\omega$  solution de  $\frac{d\varphi}{d\omega}(\omega) = 0$ , soit :

$$\frac{\alpha\tau}{1 + (\alpha\tau\omega)^2} - \frac{\tau}{1 + (\tau\omega)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(1 + (\tau\omega)^2) = 1 + (\alpha\tau\omega)^2$$

$$(\alpha\tau^2 - \alpha^2\tau^2)\omega^2 = 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\tau^2\omega^2(1 - \alpha) = (1 - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \omega_\varphi = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

Cette expression correspond à la moyenne géométrique des deux pulsations de cassure et peut s'identifier sur les propriétés de symétrie du diagramme de Bode du correcteur.

**Question 62** Montrer que  $\sin(\varphi_{max}) = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ .

L'expression de la phase en son maximum s'écrit :

$$\varphi(\omega_\varphi) = \arg\left(\frac{1+j\sqrt{\alpha}}{1+j/\sqrt{\alpha}}\right) = \arg\left(\frac{(1+j\sqrt{\alpha})(1-j/\sqrt{\alpha})}{1+1/\alpha}\right) = \arg(2+j(\sqrt{\alpha}-1/\sqrt{\alpha}))$$

On en déduit :

$$\sin \varphi_m = \frac{Im}{\sqrt{Re^2 + Im^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}-1/\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4+(\alpha-2+1/\alpha)}} = \frac{\alpha-1}{\sqrt{2\alpha+\alpha^2+1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

**Question 63** Montrer que le gain en basse fréquence est alors  $G_{bf} = 20 \log(K_P)$ .

$$C(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} K_p \text{ donc } G_{dB} = 20 \log C(j\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log K_p.$$

**Question 64** Pour ce jeu de valeurs, donner la représentation asymptotique ainsi que l'allure de la courbe réelle dans le plan de Bode du correcteur seul  $C(p)$  sur le document réponse DR5.

Le diagramme de Bode du correcteur est donné figure 7.

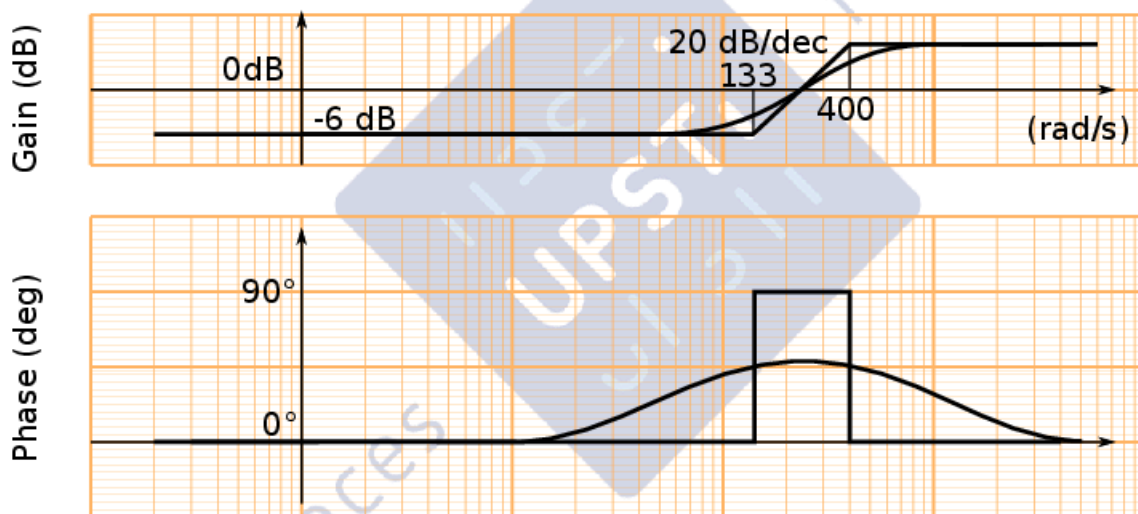


FIGURE 7 – Q64 - Diagramme de Bode du correcteur

**Question 65** Représenter sur le document réponse DR6 les diagrammes asymptotiques de Bode de la FTBO corrigée.

La FTBO non corrigée semble être un deuxième ordre de pulsation propre  $\omega_0 = 80 \text{ rad/s}$  et d'amortissement proche de 0,6. On en déduit le diagramme de Bode asymptotique.

La FTBO corrigée est la superposition du second ordre précédent avec le correcteur à avance de phase, dont les pulsations de cassure sont en  $\frac{1}{\alpha\tau} = 130 \text{ rad/s}$  et  $\frac{1}{\tau} = 400 \text{ rad/s}$ . Le gain à basse fréquence du correcteur vaut  $20 \log K_p = -6 \text{ dB}$ , d'où un décalage de 6 dB vers le bas à basse fréquence.

On en déduit le diagramme de Bode figure 8.

**Question 66** Préciser les marges de gain de la FTBO non corrigée puis corrigée.

La phase n'atteignant jamais  $-180^\circ$ , la marge de gain est non définie (ou infinie par abus de langage) pour les FTBO non corrigée et corrigée.



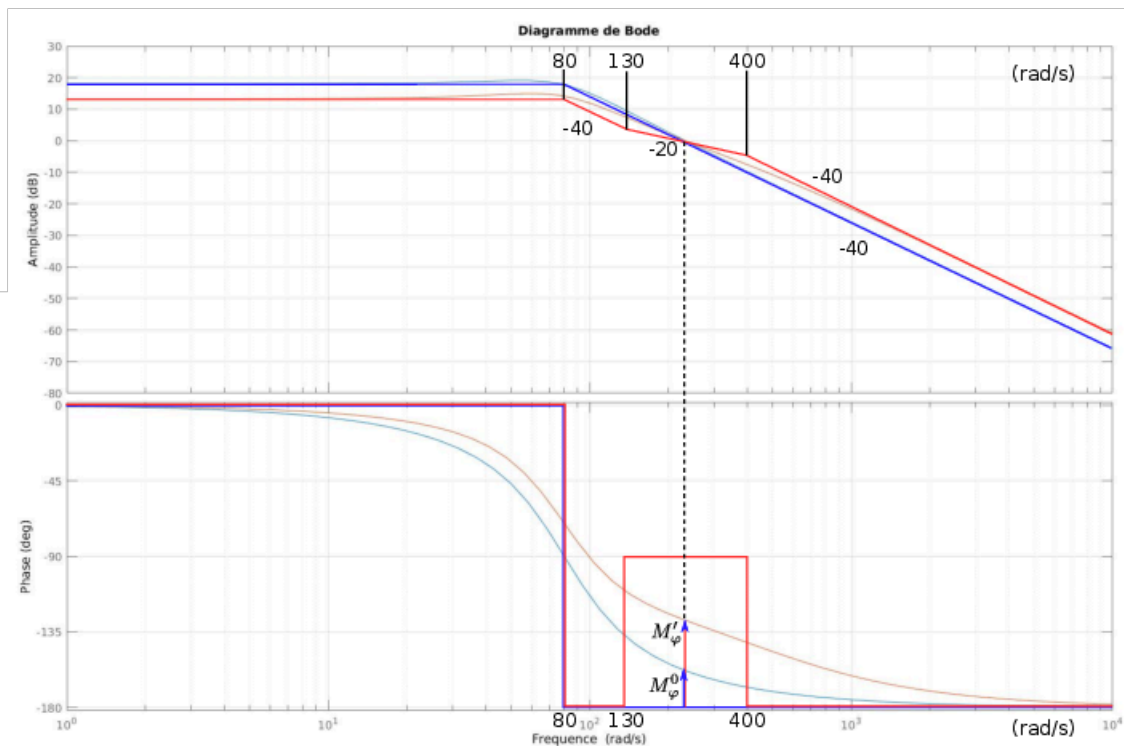


FIGURE 8 – Q64 - Diagramme de Bode corrigé

**Question 67** Représenter sur le document réponse DR6 les marges de phase de la FTBO non corrigée  $M_{\varphi}^0$  et corrigée  $M'_{\varphi}$ .

Voir figure 8 pour le tracé des marges de phase.

**Question 68** Estimer les valeurs de  $M_{\varphi}^0$  et  $M'_{\varphi}$ .

La lecture graphique conduit à  $M_{\varphi}^0 \simeq 18^\circ$  pour la FTBO non corrigée et  $M'_{\varphi} \simeq 50^\circ$  pour la FTBO corrigée.

**Question 69** Le correcteur a été réglé pour conserver la bande passante de la FTBO. Vérifier alors que l'on retrouve bien les paramètres  $\alpha$ ,  $\tau$  et  $K_P$  du correcteur  $C(p)$ .

La bande passante (à 0dB pour la FTBO) a bien été conservée puisque les deux tracés coupent l'axe 0dB à la même pulsation.

Il est habituel pour un correcteur à avance de phase, dont l'objectif principal est d'améliorer la stabilité, de le régler de telle sorte que le maximum de phase du correcteur coïncide avec la pulsation à 0dB visée.

La pulsation du maximum de phase est la moyenne géométrique des deux pulsations de cassure, soit  $\omega_{\varphi max} = \sqrt{\frac{1}{\alpha\tau} \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$ . Cela semble réalisé (aux erreurs de lecture près sur l'échelle logarithmique) car on lit  $\omega_{0dB} \simeq 240 \text{ rad/s}$  et on calcule  $\frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} = 231 \text{ rad/s}$ .

Il faut alors que le gain du correcteur en  $\omega_{0dB}$  soit nul. L'écart entre le gain à haute fréquence et le gain à basse fréquence du correcteur vaut  $20 \log \alpha$ , et pour la pulsation milieu  $\omega_{\varphi max}$ , la baisse de gain est de  $20 \log \sqrt{\alpha}$ , ce qui impose la valeur de  $K_P$  telle que  $K_P = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 0,58$ , ce qui confirme la valeur proche choisie  $K_P = 0,5$ .

**Question 70** Expliquer dans quelle mesure la variation de gain en basse fréquence due à l'ajout du correcteur impacte la précision du système en réponse à un échelon.

La FTBO est de classe 0 donc l'erreur pour une entrée en échelon unitaire sera de la forme  $\frac{1}{1+K_{BO}}$ . Ainsi, si la valeur du gain à basse fréquence (le  $K_{BO}$ ) diminue, la précision se dégrade.

**Question 71** Commenter l'effet de l'ajout de ce correcteur sur la stabilité et la rapidité du système.

Ce correcteur :

- améliore la stabilité (car la marge de phase augmente) ;
- dégrade la précision (car  $K_{BO}$  diminue) ;
- change peu la rapidité (car la bande passante est conservée).

On peut toutefois prévoir une probable augmentation de la rapidité car l'augmentation de la marge de phase à  $40^\circ$  va se traduire par des dépassements plus faibles, ce qui sera favorable à un temps de réponse réduit à bande passante identique.

**Question 72** Expliquer pourquoi la flexion de la crémaillère de commande sous l'effort du vérin presseur est néfaste à la bonne commande du taux de compression.

Une flexion de la crémaillère va conduire à un décalage suivant  $\vec{x}_0$  de l'aimant et par conséquent un changement du champ magnétique  $\vec{B}$  au voisinage du capteur à effet Hall. Le capteur présentera alors une erreur de mesure qui perturbera la commande du taux de compression.

**Question 73** À taux de compression fixé, décrire ce qu'il va se passer durant un cycle entier du point de vue de la partie commande si cette flexion n'est plus négligeable.

Un cycle correspond à deux tours d'arbre moteur, dont un tour où la chambre de combustion est sous pression et un tour de transvasement de gaz où la pression est négligeable. Le tour sous pression conduira à des effets de flexion sensibles tandis que le tour de transvasement ne présentera pas de flexion.

Du point de vue de la partie commande, la mesure sera différente un tour sur deux, ce qui va conduire à des oscillations de la commande de l'actionneur de taux de compression.

**Question 74** Proposer une solution qui permettrait de lisser le signal provenant du capteur à effet Hall.

La commande électronique permet de savoir à chaque tour de l'arbre quel chambre est en phase de combustion ou de transvasement. Les évolutions du piston de réglage étant lente à l'échelle de temps d'un cycle, il est possible de ne relever la mesure du capteur que durant le tour de transvasement et ainsi avoir une mesure précise un tour sur deux.

Cela va néanmoins ajouter un retard dans la mesure qui peut réduire la stabilité de l'asservissement s'il est trop important par rapport à la bande passante de l'asservissement. Ici, la bande passante est à 240 rad/s et la période d'échantillonnage serait à 4000 tr/min (donc 2000 cycles/min) de 30 ms. En considérant un retard de la moitié de la période d'échantillonnage, soit  $\tau = 0,015$  s, cela conduit à un retard  $e^{j\tau\omega}$  de déphasage  $\tau\omega = 3,6$  rad =  $206^\circ$  considérable et le système deviendra instable.

Remarquons que même en prenant une mesure à chaque cycle, le retard conduira à un déphasage de  $103^\circ$  déjà très pénalisant. Il sera nécessaire de limiter volontairement la bande passante de l'asservissement pour s'adapter à la fréquence d'échantillonnage de la mesure imposée par la vitesse du moteur.