teaching sciences UPSTI for innovation

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2020

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des droits d'auteur).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Circuit de refroidissement à eau

Corrigé UPSTI

Partie I – Origine de la puissance thermique produite

Question 1 Vérifier que $V_{out} = +V_{DD}$ si $V_{in} = 0$

Si $V_{in} = 0 < V_{tn}$, alors le transistor est bloqué.

Cela entraîne $I_{DS} = 0$.

Or $V_{DD} = R.I_{DS} + V_{out}$

$\boxed{\text{D'où } V_{out} = +V_{DD}}$

Question 2 Des caractéristiques $V_{out} = f(V_{in})$ de l'inverseur NMOS sont tracées figure 7 pour différentes valeurs de R. Pour quelle(s) valeur(s) de R ce circuit peut-il constituer un inverseur logique ? Une justification précise mais succincte est attendue.

Le fonctionnement en inverseur logique signifie qu'on doit avoir $V_{out} = V_{DD}$ pour $V_{in} = 0$ et $V_{out} = 0$ pour $V_{in} = V_{DD}$.

Cela est vrai pour $R = 1\ M\Omega$ et $R = 10\ M\Omega$ avec des tensions seuil respectives d'environ 2,0 V et 1,3 V.

Question 3 Exprimer puis calculer la puissance consommée $p_c = I_{DS}V_{DD}$ pour maintenir l'inverseur dans l'état bas. On prendra $R = 10\ M\Omega$. Commenter.

On se situe dans le cas où $V_{out} = 0$. Donc $V_{DD} = R.I_{DS}$.

On a $p_c = I_{DS}V_{DD} \Leftrightarrow p_c = \frac{{V_{DD}}^2}{R}$

$\boxed{\text{A.N. : } p_c = \frac{5{,}0^2}{10.10^6} = 2{,}5.10^{-6}\ W}$

Ce résultat peut paraitre faible, mais si on prend une CPU composée d'un milliard de transistors, on obtient une puissance consommée de l'ordre de 2500 W, ce qui est aberrant pour un simple microprocesseur.

Question 4 Justifier que le circuit de la figure 8 constitue bien un inverseur logique. Pour cela on pourra se placer dans les cas où $V_{in} = 0$ et $V_{in} = +V_{DD}$.

On se place dans la maille $V_{in} - V_{GS_p} = V_{DD}$

- Si $V_{in} = 0$, alors $I_{DS_n} = 0$ et $-V_{GS_p} = V_{DD}$, ce qui entraine $I_{DS_p} \neq 0$. Le transistor PMOS est donc saturé.

  On a $V_{out} + V_{DS_p} = V_{DD}$ avec $V_{DS_p} = 0$.

$\boxed{\text{D'où } V_{out} = V_{DD}}$

©UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

- Si $V_{in} = V_{DD}$, alors $V_{GS_p} = 0, I_{DS_p} = 0$, ce qui entraine $I_{DS_n} \neq 0$. Le transistor NMOS est bloqué.

  $\boxed{\text{D'où } V_{out} = 0}$.

On a bien le comportement de l'inverseur logique :

$V_{out} = V_{DD}$ si $V_{in} = 0$

$V_{out} = 0$ si $V_{in} = V_{DD}$

Question 5 Dans le cadre de la modélisation proposée pour les transistors, justifier que ce circuit ne consomme pas de puissance pour maintenir la sortie dans l'état haut ou dans l'état bas.

Quel que soit l'état haut ou bas, l'un des transistors est bloqué. Les intensités I_{DS_n} et I_{DS_p} sont nulles. La puissance consommée $p_c = I_{DS_x} V_{DD}$ est donc nulle.

Question 6 Interpréter la puissance consommée par le composant réel pour maintenir l'état de sortie de l'inverseur.

L'énoncé informe que le composant réel consomme une puissance de l'ordre du nW. Cela peut être dû au fait que les transistors ne basculent pas exactement en même temps. Dans ce cas il existe une courte période durant laquelle les deux transistors sont saturés et où un courant circule. Cela peut aussi être dû à un courant de fuite des transistors.

Question 7 Donner une origine des effets capacitifs pris en compte dans le modèle. Pourquoi n'était-il pas nécessaire de les prendre en compte lors de l'étude du comportement statique de l'inverseur ?

Il est nécessaire de modéliser les effets capacitifs car dans la réalité l'inverseur est relié à un circuit qui a sa propre impédance. Le système présentera alors des effets capacitifs. Il n'est pas nécessaire de prendre en compte ces effets dans l'étude statique car, en régime établi, aucun courant ne circule dans un condensateur.

Question 8 Déterminer l'équation reliant $\frac{dV_{out}}{dt}(t)$ et $i(t) = -I_{DS_p}(t)$ lors du basculement de la sortie de l'état bas à l'état haut. En déduire l'énergie fournie par la porte lors de cette commutation. Que dire de celle fournie par l'alimentation pour la commutation inverse ?

A l'état haut on a $I_{DS_n} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où } -I_{DS_p}(t) = i(t) = C_L \frac{dV_{out}}{dt}(t)}$$

L'énergie fournie est celle nécessaire pour charger le condensateur, soit $\frac{1}{2} C_L {V_{DD}}^2$ (on peut retrouver ce résultat en intégrant la puissance consommée : $E = \int_0^{+\infty} V_{out}(t).i(t).dt$ et en remplaçant $i(t)$)

Le résultat est le même pour la commutation inverse (énergie de décharge du condensateur).

Question 9 En déduire l'expression de la puissance moyenne consommée par l'inverseur sur une période de la tension d'entrée.

La puissance moyenne consommée s'exprime en divisant l'énergie consommée par les temps de charge et décharge.

$$\boxed{\text{D'où } p_{moy} = \frac{C_L}{\tau} {V_{DD}}^2}$$

Question 10 On peut montrer que la durée τ, nécessaire pour que la tension de sortie passe de $+0{,}9V_{DD}$ à $0{,}1V_{DD}$ (et inversement), a pour expression :

$$\tau = \frac{C_L}{k.(V_{DD} - V_{t_n})}\left[\frac{2(V_{t_n} - 0{,}1V_{DD})}{V_{DD} - V_{t_n}} + ln\left(\frac{19V_{DD} - 20V_{t_n}}{V_{DD}}\right)\right]$$

où k est un paramètre caractéristique des transistors.
Simplifier l'expression de τ pour $V_{t_n} = 0{,}1V_{DD}$. Application numérique pour $V_{DD} = 5{,}0\ V$ et $k = 10\ \mu A.V^{-2}$. A quoi correspond cette durée pour l'opération logique réalisée par la porte ?

En simplifiant l'expression, on obtient

$$\tau = \ln{(17)}\frac{C_L}{0{,}9k.V_{DD}}$$

A.N. : $\tau = 3{,}14\frac{0{,}1.10^{-12}}{10.10^{-6}\times 5{,}0} = 6{,}28.10^{-9}s$

Cela correspond au temps de commutation des transistors (régime transitoire). C'est ce temps qui est à l'origine du temps de calcul des microprocesseurs.

Question 11 En déduire une estimation numérique de la puissance consommée par l'inverseur sur une période $T = 2\tau$. Commenter.

On a $p_{moy} = \frac{C_L}{\tau}V_{DD}{}^2$

A.N. : $p_{moy} = \frac{0{,}1.10^{-12}}{6{,}28.10^{-9}}5^2 = 3{,}98.10^{-4}W$

Problème : Cette puissance n'est pas comparable à celle de la question Q3 pour le NMOS. Le résultat trouvé ici est très largement supérieur à la puissance moyenne du transistor précédent (facteur 100). Etant donné que l'on considère ici que le CMOS ne cesse de basculer (ce qui est une situation extrême) cela pourrait être cohérent ?

Question 12 A l'aide du modèle précédent, discuter qualitativement l'impact de la finesse de gravure sur les performances des processeurs.

$p_{moy} = \frac{C_L}{\tau}V_{DD}{}^2$. La puissance consommée est proportionnelle à la capacité du circuit et au carré de la tension d'alimentation. Si l'amélioration de la finesse permet de réduire ces deux paramètres, alors il y aura aussi une réduction de la puissance moyenne consommée, donc une plus grande efficacité énergétique.

De même pour le temps de commutation τ qui est proportionnel à la capacité. Une meilleure finesse engendrera des transistors qui commutent plus rapidement.

Question 13 Avec la diminution de la taille des transistors, la puissance consommée en fonctionnement statique de l'inverseur CMOS augmente. Expliquer qualitativement cette augmentation.

En diminuant la taille, on diminue la longueur des conducteurs électriques qui constituent les transistors. Or, la résistance électrique R d'un conducteur s'exprime avec $R = \frac{\rho L}{S}$ où L est la longueur du conducteur. Diminuer la longueur revient donc à diminuer la résistance électrique. Si la puissance s'exprime sous une forme $p_c = \frac{V_{DD}{}^2}{R}$, on a alors une augmentation de la puissance consommée.

Question 14 En l'absence de système de refroidissement, exprimer la durée Δt nécessaire à un microprocesseur (substrat en silicium) possédant une enveloppe thermique de $P_{th} = 100$ W pour s'échauffer de :

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_0$$

©UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Sachant que le microprocesseur ne doit pas dépasser les 70°C, estimer sa durée de fonctionnement pour $\theta_0 = 20\ °C$. Commenter.

On a $P_{th} = \rho_s . V . c_s . \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\boxed{\text{Donc } \Delta t = \rho_s . V . c_s . \frac{\Delta\theta}{P_{th}}}$

$\boxed{\text{A.N. : } \Delta t = 2{,}3 \times 0{,}1 \times 50 \times \frac{0{,}7}{100} = 0{,}08\ s}$

Δt étant très faible, on voit bien la nécessité d'utiliser des dispositifs de refroidissement afin de maintenir le microprocesseur dans des conditions de fonctionnement acceptables.

PARTIE II – MODELISATION DU SYSTEME DE REFROIDISSEMENT

I - Rôle de la pâte thermique

Question 15 Justifier que l'on puisse négliger les effets de bord et considérer que T ne dépend que de y dans la couche d'air.

On peut négliger les effets de bord étant donné que e est très petit par rapport à S_u.

Dans ce cas, les plans Oxy et Oyz sont plan de symétrie vis-à-vis des conditions aux limites. Ainsi, T ne dépendra que de y.

Question 16 Rappeler la loi de Fourier. A l'aide d'un bilan d'énergie sur un système bien choisi, établir l'équation vérifiée, en régime stationnaire, par T dans la couche d'aire de surface S_u.

La loi de Fourier permet d'exprimer la densité de courant thermique $\overrightarrow{J_{th}}$ dans un milieu de conductivité thermique λ soumis à un gradient de température ∇T.

On a la relation $\overrightarrow{J_{th}} = -\lambda \overrightarrow{\nabla T}$

On fait le bilan d'énergie sur le système plaque d' air d'épaisseur dy. Le microprocesseur est ici une source de chaleur surfacique homogène. La chaleur se dissipe dans l'air, en régime permanent la chaleur entrante égale la chaleur sortante : $\phi_{th}(y) = \phi_{th}(y + dy)$

Or on exprime le flux de chaleur $\phi_{th} = -\lambda \frac{\delta T}{\delta y} S_u$

donc il vient $\frac{\delta^2 T}{\delta y^2} = 0$

Question 17 En déduire l'expression de T(y) puis l'expression de la résistance thermique R_a de la couche d'air.

$\boxed{\text{On a donc : } T(y) = T_p - y \frac{\phi_{th}}{\lambda_a S_u}}$

$\boxed{\text{où } \phi_{th} = -\lambda \frac{T_R - T_p}{e} S_u}$

©UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Remarque : il n'est pas précisé dans l'énoncé s'il est question de résistance thermique unitaire ou surfacique. La notation R est habituellement attribuée à la résistance thermique surfacique (r pour l'unitaire ici la résistance unitaire r=(T_P-T_R)/Φ_{th} = e / (Su λ)). C'est donc la résistance thermique surfacique que nous utiliserons.

D'où : $R_a = \frac{e}{\lambda_a}$

Question 18 Il est conseillé d'appliquer une goutte, supposée sphérique, de pâte thermique d'environ 3 mm de diamètre qui est étalée par pression lors de l'installation du radiateur. A l'aide des photographies de la figure 12, exprimer en fonction des paramètres pertinents l'épaisseur e_p de la couche de pâte thermique. Application numérique.

On exprime le volume de la goutte $V_g = \frac{4}{3}\pi {r_g}^3$

Et le volume du disque de pâte étalée $V_d = \frac{\pi d_d^2}{4} e_p = \frac{\pi}{4} e_p \left(\sqrt{2}\sqrt{S_u}\right)^2$, soit $V_d = \frac{\pi . S_u}{2} e_p$

Le volume étant invariant, on a $V_g = V_d \Leftrightarrow \frac{\pi . S_u}{2} e_p = \frac{4}{3}\pi {r_g}^3$

D'où $e_p = \frac{8{r_g}^3}{3S_u}$ avec $r_g = 1{,}5\ mm$

A.N. : $e_p = \frac{8\times 1{,}5^3}{3\times 20^2} = 22{,}5\ \mu m$

Question 19 Calculer la résistance thermique R_a de la couche d'air et celle R_p de la couche de pâte thermique de surface S_u.

Ici nous exprimons la résistance unitaire :

$$\boxed{r_a = \frac{e}{\lambda_a S_u} = \frac{1{,}0.\ 10^{-6}}{0.03 \times 4{,}0.\ 10^{-4}} = 0{,}083\ K.W^{-1}}$$

$$\boxed{r_p = \frac{e_p}{\lambda_p S_u} = \frac{22{,}5.\ 10^{-6}}{10 \times 4{,}0.\ 10^{-4}} = 0{,}0056\ K.W^{-1}}$$

Question 20 Pour un flux thermique de 100 W, estimer la différence de température $\Delta T = T_p - T_r$ entre le processeur et le radiateur avec et sans pâte thermique. Commenter à l'aide des valeurs numériques indiquées à la question Q14.

On repart de la relation $T(y) = T_p - y\frac{\phi_{th}}{\lambda_a S_u}$

Cas de l'air : $\Delta T = r_a \phi_{th}$

Cas de la pâte : $\Delta T = r_p \phi_{th}$

A.N. :

Cas de l'air : $\Delta T = r_a \phi_{th} = 0{,}083 \times 100 = 8{,}3\ K = 8{,}3\ °C$

Cas de la pâte : $\Delta T = r_p \phi_{th} = 0.0056 \times 100 = 0{,}56\ K = 0{,}56\ °C$

©UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Question 21 Proposer une autre méthode permettant de diminuer la résistance thermique du contact entre les deux plaques.

On a $r = \frac{e}{\lambda S_u}$

Il y a donc trois possibilités :

- Réduire la distance e (en améliorant les états de surface en l'absence de pâte, ou en écrasant davantage la pâte si cela est compatible avec les recommandations du fabriquant).
- Changer la pâte pour un matériau de conductivité thermique supérieure.
- Augmenter la surface de contact entre microprocesseur et radiateur.

II - Description d'un module de watercooling

Question 22 Lequel des deux métaux (aluminium ou cuivre) est le plus adapté pour réaliser l'échangeur thermique. Quel est son inconvénient ?

Si on se focalise sur les performances thermiques, le cuivre est meilleur que l'aluminium car il a une meilleure conductivité thermique. En revanche, il est plus cher, plus lourd et plus difficile à mettre en forme.

Question 23 Le débit massique D_m de l'écoulement à travers l'échangeur est de l'ordre de 10^{-2} kg.s^{-1}. A l'aide d'un bilan d'énergie sur un système bien choisi, estimer la température du fluide en sortie de l'échangeur pour une puissance thermique dissipée de 100 W. On rappelle la valeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide c_e = 4,18 kJ.K^{-1}.kg^{-1}.

On fait le bilan d'énergie sur le fluide à l'intérieur de l'échangeur. Durant un temps dt, la quantité d'eau entrante dm_e = la quantité d'eau sortante dm_s. On note dm = dm_e = dm_s = Dm dt

Le premier principe donne ici dU* = δQ et donc D_m dt $C_e \Delta T$ = P_{th} dt. On a donc $D_m = \frac{P_{th}}{c_e . \Delta T}$

$$\boxed{\text{D'où } \Delta T = \frac{P_{th}}{c_e . D_m}}$$

$$\boxed{\text{A.N. : } \Delta T = \frac{P_{th}}{c_e . D_m} = \frac{100}{4180 \times 0{,}01} = 2{,}39\ K = 2{,}39\ °C}$$

III - Détermination du champ de température dans l'échangeur

Question 24 Selon une logique analogue, expliquer comment approcher $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y)$, d'abord à partir des dérivées premières de $T(x,y)$, puis sans aucune dérivée. Les expressions finales pourront faire intervenir $T(x+h,y)$, $T(x-h,y)$, $T(x,y+h)$, $T(x,y-h)$ et $T(x,y)$.

On utilise l'expression de l'énoncé en remplaçant $T(x,y)$ par $\frac{\partial T}{\partial x}(x,y)$.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) \cong \frac{\frac{\partial T}{\partial x}\left(x+\frac{h}{2},y\right) - \frac{\partial T}{\partial x}\left(x-\frac{h}{2},y\right)}{h}$$

©UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) \cong \frac{\frac{T\left(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2},y\right)-T\left(x-\frac{h}{2}+\frac{h}{2},y\right)}{h}-\frac{T\left(x-\frac{h}{2}+\frac{h}{2},y\right)-T\left(x-\frac{h}{2}-\frac{h}{2},y\right)}{h}}{h}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) \cong \frac{T(x+h,y)-2T(x,y)+T(x-h,y)}{h^2}$$

De la même manière :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y) \cong \frac{T(x,y+h)-2T(x,y)+T(x,y-h)}{h^2}$$

Question 25 En déduire les coefficients a, b, c, d et e de l'équation différentielle sous forme discrétisée suivante :

$$a.T_{(i-1,j)}+b.T_{(i+1,j)}+c.T_{(i,j-1)}+d.T_{(i,j+1)}+e.T_{(i,j)}=0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y)=0 \Leftrightarrow T(x+h,y)+T(x-h,y)+T(x,y+h)+T(x,y-h)-4T(x,y)=0$$

D'où $a=b=c=d=1, e=-4$

Question 26 Ecrire les équations pour i=1, j=1, pour i=1, j=2 et pour i=1, j=3.

Pour $i=j=1$: $T(0,1)+T(2,1)+T(1,0)+T(1,2)-4T(1,1)=0$

$2T_1+T_2+T(1,2)-4T(1,1)=0$

Pour $i=1\ j=2$: $T(0,2)+T(2,2)+T(1,1)+T(1,3)-4T(1,2)=0$

$2T_1+T(1,1)+T(1,3)-4T(1,2)=0$

Pour $i=1\ j=3$: $T(0,3)+T(2,3)+T(1,2)+T(1,4)-4T(1,3)=0$

$3T_1+T(1,2)-4T(1,3)=0$

Question 27 En déduire le système d'équations à résoudre, le mettre sous forme de deux matrices A et B tel que :

$$A.T=B$$

$$T=\begin{bmatrix}T_{(1,1)}\\T_{(1,2)}\\T_{(1,3)}\end{bmatrix}$$

Avec A une matrice 3×3 et B un vecteur de 3 composantes.

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}2T_1+T_2+T(1,2)-4T(1,1)=0\\2T_1+T(1,1)+T(1,3)-4T(1,2)=0\\3T_1+T(1,2)-4T(1,3)=0\end{cases}$$

Ce système vérifie l'équation matricielle $A.T = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2T_1 + T_2 \\ 2T_1 \\ 3T_1 \end{pmatrix}$

Question 28 Déterminer la valeur de n correspondant à l'énergie interne permettant d'assurer que la discrétisation du domaine Ω soit suffisamment fine pour avoir une bonne approximation du champ de température $T_{(x,y)}$ sur l'ensemble de la structure.

La figure 18 montre qu'une erreur de 5 % est atteinte pour n =700.

Question 29 Parmi les valeurs $\{-10\ 000, -1000, -1, 1, 1000, 10\ 000\}$ pour *cond(A)*, donner la valeur de *cond(A)* qui entraînera un bon conditionnement de notre matrice.

On veut une valeur de *cond(A)* telle que les variations de B influencent peu les variations de T. On veut donc une valeur minimale pour $\|cond\,(A)\|$. D'où *cond(A)* = 1.

Question 30 Calculer $\|A\|_\infty$ et $\|A^{-1}\|_\infty$.

On trouve trivialement $\|A\|_\infty$ et $\|A^{-1}\|_\infty$:

$$\|A\|_\infty = 8 + 23 + 73 + 130 = 234$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 41 + 28 + 24 + 6 = 99$$

Question 31 Calculer *cond(A)*. Est-ce bien conditionné ?

On calcule $cond\,(A) = 234 \times 99 = 23\ 166$. On en déduit que la matrice est mal conditionnée.

Partie III – Modelisation de la pompe centrifuge

Question 32 Montrer que le moment dynamique du fluide au point O dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 s'écrit :

$$\overrightarrow{\delta_{O(fluide/0)}} = 2\pi\,.\,\rho.\,(R_2^2.V_{2r}.V_{2\theta}.e_2 - R_1^2.V_{1r}.V_{1\theta}.e_1).\vec{z}$$

Le fait que l'écoulement soit constant fait que les pressions internes au volume de fluide sont nulles. Le premier terme du moment dynamique est donc nul.

D'où $\overrightarrow{\delta_{O(fluide/0)}} = \iint_{\delta D}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \rho\vec{V}\right).\left(\vec{V}.\vec{n}\right)ds$

Cette intégrale double doit se calculer en trois termes : un pour S_1, un pour S_2 et un pour $S_{latérale}$.

On peut déjà remarquer que pour $S_{latérale}$, $\vec{V}.\vec{n} = (V_r.\overrightarrow{e_r} + V_\theta.\overrightarrow{e_\theta}).\vec{z} = 0$

Pour S_1 $\vec{n} = -\overrightarrow{e_r}$ e pour S_2 $\vec{n} = \overrightarrow{e_r}$. D'où :

$$\overrightarrow{\delta_{O(fluide/0)}} = \iint_{S_1}(R_1.V_{1\theta}.\vec{z} + z.V_{1r}.\overrightarrow{e_\theta} - z.V_{1\theta}.\overrightarrow{e_r}).(-V_{1r}).R_1.d\theta dz$$
$$+ \iint_{S_2}(R_2.V_{2\theta}.\vec{z} + z.V_{2r}.\overrightarrow{e_\theta} - z.V_{2\theta}.\overrightarrow{e_r}).V_{2r}.R_2.d\theta dz$$

Sachant que $\int_0^{2\pi}\overrightarrow{e_r}.d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi}\overrightarrow{e_\theta}.d\theta = 0$, il reste :

$$\overrightarrow{\delta_{O(fluide/0)}} = -\rho.R_1^2.V_{1r}.V_{1\theta}.\vec{z}.\int_0^{2\pi} d\theta \,.\int_0^{e_1} dz + \rho.R_2^2.V_{2r}.V_{2\theta}.\vec{z}.\int_0^{2\pi} d\theta \,.\int_0^{e_2} dz$$

D'où : $\overrightarrow{\delta_{O(fluide/0)}} = 2\pi.\rho.(R_2^2.V_{2r}.V_{2\theta}.e_2 - R_1^2.V_{1r}.V_{1\theta}.e_1).\vec{z}$

Question 33 Calculer le débit massique du fluide au niveau de l'entrée.

Le débit s'exprime uniquement en fonction de V_{1r} normal à la surface d'entrée.

D'où : $Q_{me} = 2\pi.\rho.R_1.V_{1r}.e_1$

Question 34 Calculer le débit massique du fluide au niveau de la sortie.

Même principe qu'à la question précédente :

D'où : $Q_{ms} = 2\pi.\rho.R_2.V_{2r}.e_2$

Question 35 En déduire une relation entre le débit massique Q_m et le couple moteur.

On applique au système Σ le théorème du moment dynamique au point O en négligeant les effets de la pesanteur.

$$\overrightarrow{M_{O,moteur\to\Sigma}} = \overrightarrow{\delta_{O(fluide/0)}} \Leftrightarrow C = 2\pi.\rho.(R_2^2.V_{2r}.V_{2\theta}.e_2 - R_1^2.V_{1r}.V_{1\theta}.e_1)$$

$$\Leftrightarrow C = R_2.V_{2\theta}.Q_{ms} - R_1.V_{1\theta}.Q_{me}$$

D'où : $C = Q_m.(R_2.V_{2\theta}.-R_1.V_{1\theta})$

Question 36 Montrer que W_θ, W_r et U_θ s'écrivent :

$$W_\theta = -W.cos\beta$$
$$W_r = V_r = W.sin\beta$$
$$U_\theta = U$$

$\vec{U}$ étant la vitesse d'entraînement, on a $\frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|} = \overrightarrow{e_\theta}$.

D'où $U_\theta = U$.

Ensuite, on a : $\vec{W} = -W.cos\beta.\vec{U} + W.sin\beta\,\overrightarrow{e_r}$

D'où $W_\theta = -W.cos\beta$ et $W_r = W.sin\beta$.

Enfin, $\vec{V} = \vec{W} + \vec{U} \Leftrightarrow \vec{V} = \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_\theta} + \overrightarrow{U_\theta}$

D'où $V_r = W_r$.

Question 37 Montrer que $V_\theta = U - \frac{V_r}{tan\beta}$

©UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

$V_\theta = W_\theta + U_\theta \Leftrightarrow V_\theta = U - W.cos\beta$ avec $W = \frac{V_r}{sin\beta}$

Donc $V_\theta = U - \frac{V_r}{sin\beta} cos\beta$

D'où $V_\theta = U - \frac{V_r}{tan\beta}$

Question 38 Définir la relation entre le débit volumique Q_v et la vitesse V_r puis la vitesse U en fonction de ω.

On trouve $Q_v = 2\pi.\mathrm{R}.V_r$ et $U = \mathrm{R}.\omega$

Question 39 Déterminer $V_{1\theta}$ et $V_{2\theta}$ en fonction de Q_v, R_1, R_2, ω, β_1 et β_2, en déduire la relation entre C et Q_m.

On part de la relation de la question 37.

On a $V_{1\theta} = U_1 - \frac{V_{1r}}{tan\beta_1} \Leftrightarrow V_{1\theta} = R_1.\omega - \frac{Q_v}{S_1 tan\beta_1}$

D'où $V_{1\theta} = R_1.\omega - \frac{Q_v}{2\pi.R_1.e_1.tan\beta_1}$

De même $V_{2\theta} = R_2.\omega - \frac{Q_v}{2\pi.R_2.e_2.tan\beta_2}$

On injecte les expressions précédentes dans la relation de la question 35 qui donne $C = Q_m.(R_2.V_{2\theta}.-R_1.V_{1\theta})$

D'où : $C = Q_m.\left[\frac{Q_m}{2\pi.\rho}\left(\frac{1}{R_1.e_1.tan\beta_1} - \frac{1}{R_2.e_2.tan\beta_2}\right) + \omega.(R_2^2 - R_1^2)\right]$

Question 40 Est-ce compatible avec le débit maximum de 500 L/h donné par le constructeur de la pompe ? Justifier cette modélisation.

On calcule $Q_v = 0{,}0005\ m^3.s^{-1} = 1\,800\ L.h^{-1}$

La valeur calculée est beaucoup plus importante que celle donnée par le constructeur. On en déduit que la modélisation est probablement trop simplifiée. Il doit exister des pertes de charge qui n'ont pas été prise en compte ici.

Question 41 En déduire la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la pompe ΔP.

En exprimant les pressions d'entrée et de sortie avec l'équation d'Euler, on obtient :

$$\Delta P = \rho\left(\frac{W_1^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - U_2^2}{2}\right)$$

Avec $W = \frac{V_r}{sin\beta} = \frac{Q_v}{2\pi.R.e.sin\beta}$ et $U = \mathrm{R}.\omega$

©UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

D'où : $\Delta P = \frac{\rho}{2}.\left[Q_v{}^2\left(\left(\frac{1}{2\pi.R_1.e_1\,sin\beta_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\pi.R_2.e_2\,sin\beta_2}\right)^2\right) + \omega^2.(R_2^2 - R_1^2)\right]$

Question 42 Comment justifier cet écart ?

L'écart est dû à plusieurs raisons :

- nous ne sommes pas en présence d'un fluide parfait incompressible.
- Toutes les pertes de charge n'ont probablement pas été prises en compte.
- Les transferts thermiques ne sont pas pris en compte.
- L'écoulement du fluide est supposé non tourbillonnaire alors qu'on est dans le cas d'une pompe centrifuge.
- La pression annoncée par le constructeur est mesurée en sortie du collecteur et non au niveau de la surface S_2.

Question 43 D'après la figure 23, quelle est la puissance maximale développée par la pompe ?

On lit $P_{max} \cong 0{,}76\ W$

Question 44 Calculer la puissance mécanique transmise à la pompe puis en déduire le rendement maximal de la pompe.

On a $P_{méca} = C.\omega = \frac{2\pi.C.N}{60}$

A.N. : $P_{méca} = 7{,}85\ W$

$\frac{P_{max}}{P_{méca}} \cong 0{,}1$, soit un rendement de 10 %.

teaching sciences for innovation UPSTI