

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2020

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Plate-forme DRoPic pour l'étude du clavecin

Épreuve de 4h

Corrigé UPSTI

I - Présentation du contexte et des exigences du robot

I.1 - Robots d'étude des instruments

I.2 - Exigences de la plate-forme robotisée

Question 1 À partir du diagramme SysML des exigences (**figure 13, annexe 1**) et de la **figure 3**, conclure quant au choix du niveau des critères de surface de travail, de durée des trajectoires et de vitesse maximale de l'effecteur.

Comparons les mesures expérimentales avec les exigences du robot

CRITÈRES	MESURES	Exigences ROBOT
Surface de travail	25mm ²	400mm ² <u>plus grand</u>
D=Durée du mouvement	30ms ≤ D ≤ 300ms	30ms <u>plus court</u>
V=Vitesse	V ≤ 0,2m.s ⁻¹	V _{max} = 1,2m.s ⁻¹ <u>plus rapide</u>

Les exigences imposées au robot permettent de reproduire les caractéristiques du jeu d'un musicien dans les conditions de l'expérience.

II - Architecture du robot

II.1 - Validation de l'exigence de surface de travail

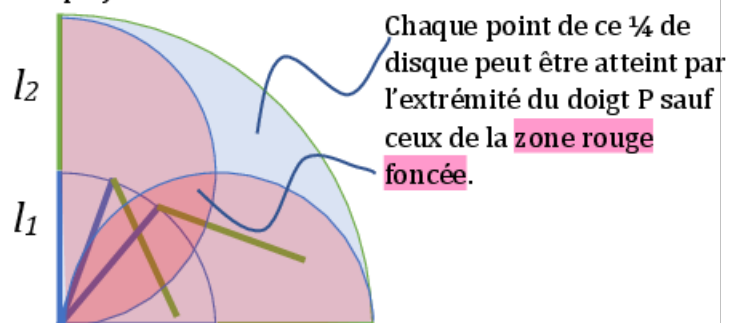
Question 2 Texte de la question (numérotation automatique)

La surface de travail se calcule ainsi avec $l_1=l_2$:

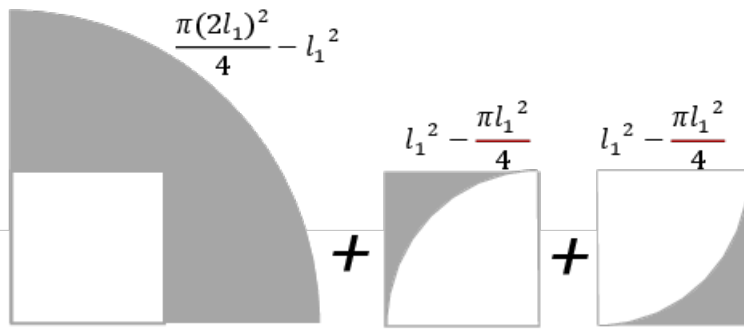
$$S = \frac{\pi(2l_1)^2}{4} - l_1^2 + 2\left(l_1^2 - \frac{\pi l_1^2}{4}\right) \text{ (voir page suivante)}$$

$$\text{Soit } S = l_1^2 \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{AN : } S = (2+\pi)(45)^2/2 = 5206\text{mm}^2$$



La surface de travail respecte l'exigence de 400mm².



II.2 - Modèles géométriques et cinématiques

Question 3 Exprimer la matrice jacobienne $[J]$ en fonction de $l_1, l_2, \theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

Le vecteur position de P dans le repère fixe s'écrit :

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2P} = l_1\overrightarrow{x_1} + l_2\overrightarrow{x_2} = l_1(\cos\theta_1\overrightarrow{x} + \sin\theta_1\overrightarrow{y}) + l_2(\cos\theta_2\overrightarrow{x} + \sin\theta_2\overrightarrow{y})$$

Ce qui donne $\begin{cases} x(t) = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 \\ y(t) = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 \end{cases}$ et en dérivant $\begin{cases} \dot{x}(t) = -l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ \dot{y}(t) = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{cases}$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\sin\theta_1 & -l_2\sin\theta_2 \\ l_1\cos\theta_1 & l_2\cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{D'où } [J] = \begin{bmatrix} -l_1\sin\theta_1 & -l_2\sin\theta_2 \\ l_1\cos\theta_1 & l_2\cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

II.3 - Validation de l'exigence de vitesse maximale

Question 4 Exprimer la norme de la vitesse $\|\vec{v}(P, 2/0)\|$ notée V_p en fonction de $l_1, l_2, \theta_1(t), \theta_2(t)$ et leurs dérivées.

$$\|\vec{v}(P, 2/0)\| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$

D'où après arrangement : $V_p = \|\vec{v}(P, 2/0)\| = \sqrt{(l_1\dot{\theta}_1)^2 + (l_2\dot{\theta}_2)^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

Question 5 Déterminer la relation entre la vitesse de rotation ω_{m_2} de l'axe moteur et la norme de la vitesse V_p du point P.

Le cas le plus défavorable correspond, comme suggéré dans le sujet, à $\omega_{m_1}(t) = 0$; $\omega_{m_2}(t) \neq 0$.

Avec $\frac{4}{49}\omega_{m_2} = \dot{\theta}_2$ et la relation établie précédemment, il vient $V_p = \sqrt{(l_2\dot{\theta}_2)^2} = \frac{4}{49}l_2|\omega_{m_2}|$

Question 6 Dédire des questions précédentes si l'exigence de vitesse maximale peut être vérifiée par les moteurs.

La vitesse maximale du point P dans son mouvement par rapport au bâti 0 doit pouvoir être atteinte dans le cas le plus défavorable.

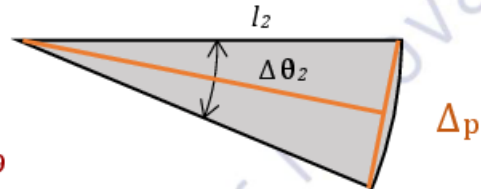
Faisons l'application numérique : $v_p = 0,045 \cdot 4 / 49 \cdot 2\pi / 60 = 1,14 \text{ m.s}^{-1}$

Cette valeur est inférieure à l'exigence de vitesse de $1,2 \text{ m.s}^{-1}$, donc le critère n'est pas satisfait. L'écart est de 5% par rapport à la valeur souhaitée.

II.4 - Validation de l'exigence de résolution spatiale

Question 7 On considère tout d'abord que seul le doigt 2 est actionné ; le doigt 1 est donc immobile. Établir la relation entre la résolution spatiale notée Δ_p et la résolution du codeur lié au doigt 2 notée $\Delta\theta_{c2}$. Conclure quant au respect de l'exigence.

$$\Delta_p = 2l_2 \cdot \tan \frac{\Delta\theta_2}{2}$$



Comme le codeur est monté sur l'axe moteur $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_{c2} \cdot 4/49$

$$\Delta_p = 2l_2 \cdot \tan \left(\frac{4/49 \cdot \Delta\theta_{c2}}{2} \right)$$

$$\text{AN : } \Delta_p = 2 \cdot 45 \cdot \tan \left(\frac{2\pi}{2 \cdot 500} \cdot 4/49 \right) = 0,046 \text{ mm} < 0,05 \text{ mm}$$

La résolution spatiale satisfait dans ce cas l'exigence de $5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$.

Question 8 En considérant maintenant la situation "doigts tendus" $\theta_1(t) = \theta_2(t)$, établir la relation entre la résolution spatiale notée Δ_p , et la résolution du codeur lié au doigt 1 notée $\Delta\theta_{c1}$. Conclure quant au respect de l'exigence.

On a la même relation mais pour une longueur doublée. Soit $\Delta_p = 2(l_2 + l_1) \cdot \tan \left(\frac{\Delta\theta_{c1} \cdot 4/49}{2} \right)$

$$\text{AN : } \Delta_p = 2 \cdot 90 \cdot \tan \left(\frac{2\pi}{2 \cdot 500} \cdot 4/49 \right) = 0,092 \text{ mm} > 0,05 \text{ mm}$$

La résolution spatiale ne satisfait pas l'exigence de $5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$.

III - Modèle du mécanisme d'excitation de la corde : détermination de l'effort de contact.

Question 9 Exprimer l'énergie cinétique $E_c(4/0)$ du sautereau 4 par rapport au bâti 0 en fonction du paramètre cinématique $\dot{y}_4(t)$ et des autres données utiles.

Le solide 4 est en translation dans le bâti 0, donc

$$E_c \left(\frac{4}{0} \right) = \frac{1}{2} m_4 \cdot \dot{y}_4(t)^2$$

Question 10 Exprimer l'énergie cinétique $E_c(3/0)$ de la touche 3 par rapport au bâti 0 en fonction du paramètre cinématique $\dot{\theta}_3(t)$ et des autres données utiles.

Le solide 3 est en rotation d'axe (O_3, \vec{z}_0) dans le bâti 0, donc

$$Ec\left(\frac{3}{0}\right) = \frac{1}{2} I_{(O_2, \vec{z}_0)}(3) \cdot \dot{\theta}_3(t)^2$$

Or le moment d'inertie $I_{(O_2, \vec{z}_0)}(3)$ s'exprime grâce à Huygens : $I_{(O_2, \vec{z}_0)}(3) = I_{(O_2, \vec{z}_0)}(G_3) + I_{(G_3, \vec{z}_0)}(3)$

$$\text{D'où } \boxed{Ec\left(\frac{3}{0}\right) = \frac{1}{2} (I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \cdot \dot{\theta}_3(t)^2}$$

Remarque : une autre possibilité aurait été d'utiliser l'expression de l'énergie cinétique dans le cas d'un mouvement plan.

$$Ec\left(\frac{3}{0}\right) = \frac{1}{2} m_3 V\left(\frac{G_3}{0}\right)^2 + \frac{1}{2} I_3 \cdot \dot{\theta}_3(t)^2$$

Question 11 Exprimer l'énergie cinétique $Ec(E/0)$ de l'ensemble E par rapport au bâti 0 en fonction des paramètres cinématiques $\dot{\theta}_3(t)$, $\dot{y}_4(t)$ et des autres données utiles.

$$\boxed{Ec(E/0) = Ec(3/0) + Ec(4/0) = \frac{1}{2} (I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \cdot \dot{\theta}_3(t)^2 + \frac{1}{2} m_4 \cdot \dot{y}_4(t)^2}$$

Question 12 Exprimer la puissance P_{int} des inter-efforts de l'ensemble E .

La seule action intérieure est ici due aux inter-efforts 3↔4 qui est liée à une liaison ponctuelle parfaite, donc

$$\boxed{P_{\text{int}} = P(3 \leftrightarrow 4) = 0}$$

Question 13 Exprimer la puissance par rapport au bâti 0 des actions extérieures $P_{\text{ext} \rightarrow E/0}$ s'exerçant sur l'ensemble E .

Les puissances extérieures sont :

- $P(0 \rightarrow 3/0)$ qui s'exprime comme $P(0 \leftrightarrow 3)$ qui est nulle car la liaison est parfaite.
- De la même façon $P(0 \rightarrow 4/0) = 0$
- $P(2 \rightarrow 3/0) = (-\vec{F}_t) \cdot \vec{V}\left(P, \frac{3}{0}\right) = F_t \cdot l_3 \cdot \dot{\theta}_3$ on vérifie que cette puissance est positive si $\dot{\theta}_3 > 0$ car motrice
- $P(\text{corde} \rightarrow 4/0) = \vec{F}_p \cdot \vec{V}\left(M, \frac{4}{0}\right) = -F_p \cdot \dot{y}_4$ on vérifie que cette puissance est négative si $\dot{y}_4 > 0$ car résistante
- La pesanteur $P(\text{pesanteur} \rightarrow E/0) = P(\text{pesanteur} \rightarrow 3/0) + P(\text{pesanteur} \rightarrow 4/0)$
 $= -m_3 g \cdot c_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \cos \theta_3 - m_4 g \cdot \dot{y}_4$

$$\text{Soit } \boxed{P(\bar{E} \rightarrow E/0) = F_t \cdot l_3 \cdot \dot{\theta}_3 - F_p \cdot \dot{y}_4 - m_3 g \cdot c_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \cos \theta_3 - m_4 g \cdot \dot{y}_4}$$

Question 14 L'angle $\theta_3(t)$ restant petit au cours du mouvement de la touche, donner une relation linéaire liant $y_4(t)$ et $\theta_3(t)$. Montrer alors que l'on peut obtenir l'équation de mouvement suivante où vous explicitez les termes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 :

$$A_1 \ddot{\theta}_3 + A_2 \theta_3 = A_3 F_t + A_4$$

On a $y_4(t) = a_3 \tan \theta_3(t)$. Or si l'angle $\theta_3(t)$ est petit il vient $y_4(t) = a_3 \theta_3(t)$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à E donne :

$$\frac{dE_{c(E/0)}}{dt} = P(\bar{E} \rightarrow E/0) + P_{int}$$

L'énergie cinétique peut maintenant s'écrire en fonction d'un unique paramètre

$$E_c(E/0) = \frac{1}{2} (I_3 + m_3 \cdot c_3^2) \cdot \dot{\theta}_3(t)^2 + \frac{1}{2} m_4 (a_3 \dot{\theta}_3(t))^2$$

De même pour les puissances :

$$P(\bar{E} \rightarrow E/0) = F_t \cdot l_3 \cdot \dot{\theta}_3 - K_{eq} a_3^2 \theta_3 \cdot \dot{\theta}_3 - m_3 g \cdot c_3 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \cos \theta_3 - m_4 g \cdot a_3 \cdot \dot{\theta}_3$$

D'où la loi de mouvement :

$$(I_3 + m_3 \cdot c_3^2 + m_4 \cdot a_3^2) \cdot \ddot{\theta}_3(t) = F_t \cdot l_3 - K_{eq} a_3^2 \theta_3 - m_3 g \cdot c_3 \cdot \cos \theta_3 - m_4 g \cdot a_3$$

Soit par identification :

$$A_1 = I_3 + m_3 \cdot c_3^2 + m_4 \cdot a_3^2$$

$$A_2 = K_{eq} a_3^2$$

$$A_3 = l_3$$

$$A_4 = -g(m_3 \cdot c_3 + m_4 \cdot a_3)$$

Question 15 Commenter la courbe d'effort de contact vis-à-vis des exigences du robot.

Pour cette loi de déplacement imposé (appui et relâchement d'une touche en 0,25s soit tempo lente à 230 battements par minutes), l'effort maximal ne dépasse pas l'exigence d'effort de 20N. Il resterait à vérifier que cela est aussi le cas pour le tempo rapide.

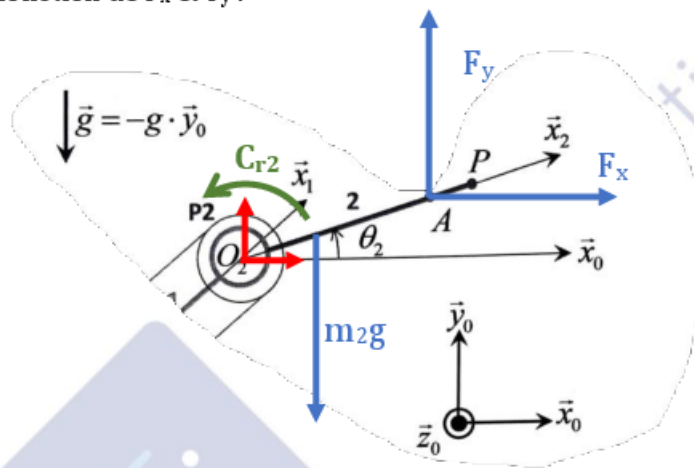
IV - Modèle dynamique du robot DRoPic

Objectif : réaliser un modèle dynamique du robot afin, d'une part, de prévoir son comportement lorsqu'il est asservi en position et, d'autre part, de valider le choix des groupes motoréducteurs.

Question 16 Isoler le solide 2 et exprimer les moments des actions extérieures à l'isolement au point O_2 . On exprimera l'effort de la touche en fonction de F_x et F_y .

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action de la touche sur 2
- Pesanteur sur 2
- Doigt 1 sur 2 (inconnues)
- Courroie sur 2 (voir remarque 3)

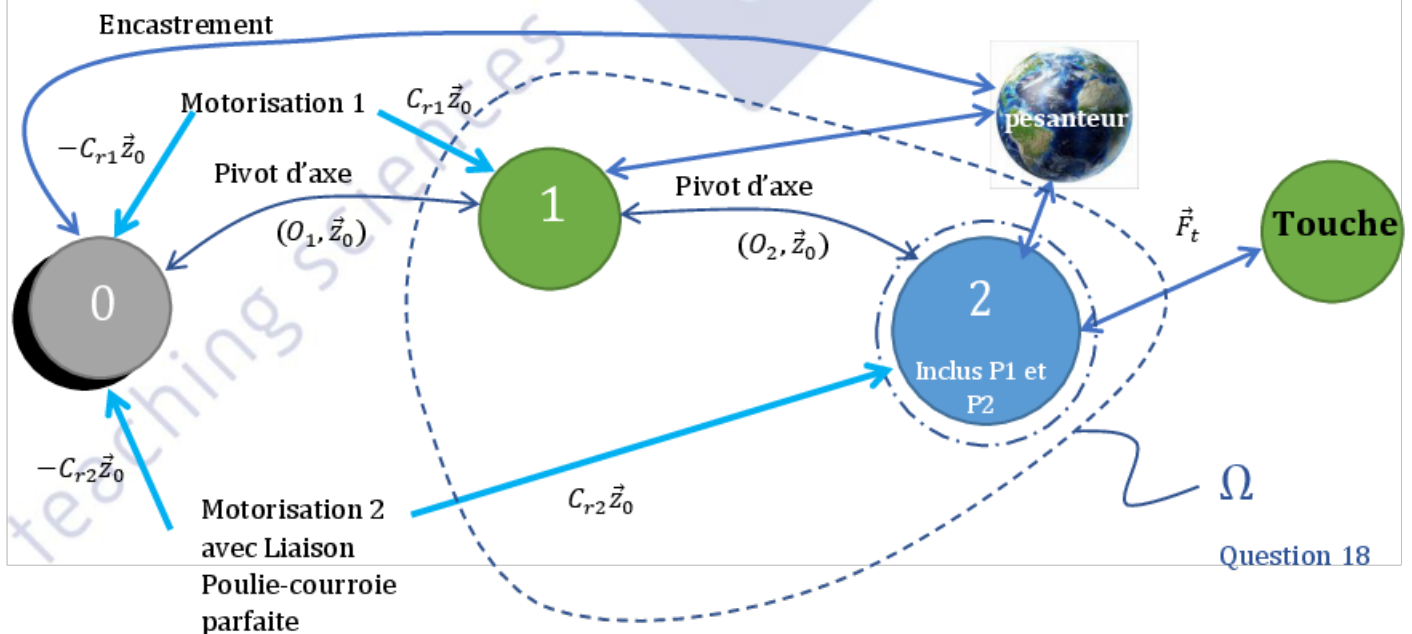


$$\vec{M}(O_2, \vec{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0 = C_{r2} + a_2 (F_y \cos \theta_2 - F_x \sin \theta_2) - m_2 g c_2 \cos \theta_2$$

Remarque 1: le choix du point O_2 permet d'éliminer les inconnues dans la liaison 1-2

Remarque 2: on considère que la masse et l'inertie de P2 sont incluses dans les caractéristiques de 2.. Cette précision n'apparait pas dans le sujet.

Grphe des actions mécaniques cohérent avec la présentation du sujet.



Question 17 Appliquer au solide 2 le théorème du moment dynamique exprimé au point O_2 en projection sur \vec{z}_0 .
En déduire l'expression du couple en sortie du groupe motoréducteur 2 $C_{r2}(t)$.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 2 exprimé au point O_2 en projection sur z_0 s'écrit :

$$\delta^{\vec{}}(O_2, \frac{2}{0}) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(O_2, \bar{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0$$

On a grâce à la relation du champ des moments : $\delta^{\vec{}}(O_2, \frac{2}{0}) \cdot \vec{z}_0 = \delta^{\vec{}}(G_2, \frac{2}{0}) \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge \overrightarrow{Rd}(\frac{2}{0}) \cdot \vec{z}_0$

Avec $\overrightarrow{Rd}(\frac{2}{0}) = m_2 \vec{a}(G_2, \frac{2}{0}) = m_2 [l_1 (\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1) + c_2 (\ddot{\theta}_2 \vec{y}_2 - \dot{\theta}_2^2 \vec{x}_2)]$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge \overrightarrow{Rd}(\frac{2}{0}) \cdot \vec{z}_0 &= [c_2 \vec{x}_2 \wedge m_2 [l_1 (\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1) + c_2 (\ddot{\theta}_2 \vec{y}_2 - \dot{\theta}_2^2 \vec{x}_2)]] \cdot \vec{z}_0 \\ &= m_2 c_2 [l_1 (\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) + c_2 \ddot{\theta}_2] \end{aligned}$$

et $\delta^{\vec{}}(G_2, \frac{2}{0}) \cdot \vec{z}_0 = I_2 \ddot{\theta}_2$ car on est au centre d'inertie et le mouvement est plan

Finalement :

$$\delta^{\vec{}}(O_2, \frac{2}{0}) \cdot \vec{z}_0 = I_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 c_2 [l_1 (\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) + c_2 \ddot{\theta}_2] = C_{r2} + a_2 (F_y \cos \theta_2 - F_x \sin \theta_2) - m_2 g c_2 \cos \theta_2$$

Question 18 Expliquer de manière détaillée (système isolé, points et projections éventuels) quel(s) théorème(s) de dynamique permettrai(en)t d'obtenir le plus simplement cette équation.

Isolons l'ensemble des pièces mobiles $\Omega = (1+2)$

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action de la motorisation 1 sur 1 : C_{r1}
- Action de la motorisation 2 sur 2 : C_{r2}
- Action du bâti 0 sur 1
- Action du bâti 0 sur P1
- Action de la pesanteur sur Ω

L'écriture du théorème du moment dynamique en O_1 en projection sur \vec{z}_0 donne

$$\delta^{\vec{}}(O_1, \frac{1}{0}) \cdot \vec{z}_0 + \delta^{\vec{}}(O_1, \frac{2}{0}) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(O_1, \bar{\Omega} \rightarrow \Omega) \cdot \vec{z}_0$$

Les inconnues de liaison disparaissent ici, soit :

$$\delta^{\vec{}}(O_1, \frac{1}{0}) \cdot \vec{z}_0 + \delta^{\vec{}}(O_1, \frac{2}{0}) \cdot \vec{z}_0 = C_{r1} + C_{r2} + \vec{M}(O_1, \text{pesanteur} \rightarrow \Omega) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}(O_1, \text{touche} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0$$

Avec le résultat de la question 17 on trouve C_{r1} .

Remarque: Il y a une petite erreur de frappe dans le sujet sur le facteur du terme en $\dot{\theta}_2^2$ mais cela n'a pas d'incidence dans la suite.

$$C_{r1} = (I_1 + m_1 c_1^2 + l_1^2 m_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 c_2 (\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) + c_1 m_1 g \cos(\theta_1) + l_1 m_2 g \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 F_y \cos(\theta_1) + l_1 F_x \sin(\theta_1)$$

Question 19 Expliquer succinctement ce qui rend difficile la résolution des équations associées au modèle de la figure 7 et quels moyens et/ou hypothèses vous mettriez en œuvre pour les résoudre.

Deux difficultés :

- Équations non-linéaires (présence de fonctions trigo et termes en $\dot{\theta}^2$)
- Les deux équations de mouvement sont couplées

Mise en place d'un calcul numérique approché.

Question 20 En considérant la situation $\theta_1(t) = \theta_2(t) = 0 \text{ rad}$ et le réducteur de rendement unitaire, établir l'expression du couple statique $C_{r1}(t)$ puis du couple statique $C_{m1}(t)$.

En statique il vient :

$$C_{r1} = c_1 m_1 g + l_1 m_2 g - l_1 F_y$$

En appliquant le TEC en quasi-statique, on retrouve aisément que $\dot{\theta}_1 \cdot C_{r1} = \dot{\theta}_{m1} \cdot C_{m1}$

D'où $C_{m1} = \frac{4}{49} \cdot C_{r1}$

Question 21 Conclure quant à la capacité des moteurs à imposer l'effort maximal sur la touche.

AN : on prend un effort en P de 20N dans le sens du poids afin d'avoir un couple maximum (le sens de l'effort change peu la valeur du couple car l'effet du poids est faible).

$$C_{r1} = \frac{3,45 \cdot 10^{-3} \cdot 22,3 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{2} + 45 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0,914 \text{ N.m}$$

$$\text{Et } C_{m1} = \frac{4}{49} \cdot C_{r1} = 0,074 \text{ N.m}$$

Or le couple nominal peut se déduire des données du moteur (Constante de couple x Intensité nominale) :

$$C_{\text{nominal}} = 0,119 \cdot 0,915 = 0,11 \text{ N.m}$$

Conclusion : le moteur peut aisément fournir le couple statique avec un coefficient de sécurité de 1,5. Il resterait à valider ce résultat en dynamique.

V - Modèle des asservissements du robot DRoPic

Rappel du contexte :

Pour toute la partie V, l'axe 1 est considéré comme immobile, seul l'axe 2 est en mouvement.

V.1 - Modèle complet

Question 22 À partir des caractéristiques du réducteur planétaire et du système poulies-courroie données dans le diagramme de définition de blocs (figure 14, annexe 1 et figure 15, annexe 2), déterminer le gain R_2 du transmetteur situé entre l'axe moteur et l'axe 2.

Le réducteur planétaire et le système poulies-courroie sont considérés de rendement unitaire

$$\dot{\theta}_2 = R_2 \cdot \dot{\theta}_m \text{ d'une part et } \dot{\theta}_2 = \frac{4}{49} \cdot \dot{\theta}_m \text{ d'autre part.}$$

Donc R_2 est le rapport de réduction du réducteur.

$$R_2 = \frac{4}{49}$$

Question 23 À partir des caractéristiques de l'axe 2 données dans le diagramme de définition de blocs (figure 14, annexe 1), exprimer l'énergie cinétique $E_c(\Sigma/0)$ de l'ensemble de l'axe 2 mis en mouvement par le moteur, par rapport au châssis du robot. En déduire l'inertie équivalente $J_{\text{éq}}$ ramenée au moteur. Faire l'application numérique.

$$E_c\left(\frac{\Sigma}{0}\right) = \frac{1}{2} (I_{P2} + I_{P1} + I_2 + m_2 \cdot c_2^2) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} (I_{\text{rotor}} + I_{\text{réducteur}}) \dot{\theta}_m^2$$

$$E_c\left(\frac{\Sigma}{0}\right) = \frac{1}{2} [I_{\text{rotor}} + I_{\text{réducteur}} + (I_{P2} + I_{P1} + I_2 + m_2 \cdot c_2^2) \cdot R_2^2] \dot{\theta}_m^2$$

$J_{\text{éq}}$

$$\text{AN : } J_{\text{éq}} = 65,5 + 15 + (2,7 \cdot 2 + 40 + 22,3 \cdot (4,5/2)^2) \cdot (4/49)^2 = 81,55 \text{ gr.cm}^2$$

Inertie moteur + réducteur prépondérante

Question 24 À partir des caractéristiques du codeur incrémental données dans le diagramme de définition de blocs (figure 14, annexe 1), déterminer le gain K_{cod} du codeur incrémental.

$$\text{On a 500 impulsions pour 1 tour soit } 2\pi \text{ rad. Donc } K_{\text{cod}} = \frac{500}{2\pi}$$

$$\text{AN : } K_{\text{cod}} = 79,58 \text{ inc/rad}$$

Question 25 Exprimer l'écart $\varepsilon_p(p)$ en sortie du comparateur de l'asservissement de position en fonction de la consigne de position angulaire $\theta_{2c}(p)$ et de la position angulaire de l'axe 2 $\theta_2(p)$. En déduire le réglage du gain K_{conv} du convertisseur de consigne afin d'asservir correctement la position angulaire de l'axe 2. Faire l'application numérique.

$$\varepsilon_p(p) = K_{\text{conv}} \cdot \theta_{2c}(p) - K_{\text{cod}} \cdot \theta_m(p) = K_{\text{conv}} \cdot \theta_{2c}(p) - \frac{K_{\text{cod}}}{R_2} \cdot \theta_2(p)$$

$$\text{Lorsque } \theta_{2c} = \theta_2 \text{ on doit avoir l'erreur qui est nulle. Soit } K_{\text{conv}} = \frac{K_{\text{cod}}}{R_2}$$

$$\text{AN : } K_{\text{conv}} = \frac{500 \cdot 49}{2\pi \cdot 4} = 974,8 \text{ inc/rad}$$

V.2 - Boucle d'asservissement du courant

Objectif : validation des performances de l'asservissement du courant du moteur de l'axe 2

Question 26 À partir du schéma bloc de la commande de l'axe 2 (figure 17, annexe 5), déterminer la fonction de transfert du moteur complet, sous forme canonique :

$$M(p) = \frac{I(p)}{U_m(p)}$$

En prenant $C_{pert}(p)=0$:

$$M(p) = \frac{\frac{1}{R + Lp}}{1 + \frac{K_c \cdot K_e}{J_{\dot{q}} p \cdot (R + Lp)}} = \frac{J_{\dot{q}} p}{J_{\dot{q}} p \cdot (R + Lp) + K_c \cdot K_e} = \boxed{\frac{J_{\dot{q}}}{K_c \cdot K_e} \cdot \frac{p}{\frac{L \cdot J_{\dot{q}}}{K_c \cdot K_e} p^2 + \frac{R \cdot J_{\dot{q}}}{K_c \cdot K_e} p + 1}}$$

Question 27 Le réglage de la boucle d'asservissement du courant est réalisé en bloquant la rotation du moteur ($\Omega_m(p) = 0$). En déduire l'expression simplifiée de la fonction de transfert du moteur :

$$M_{reg}(p) = \frac{I(p)}{U_m(p)}$$

En prenant $\Omega_m(p) = 0$ on a $E(p)=0$ et il vient :

$$\boxed{M_{reg}(p) = \frac{1}{R + Lp}}$$

Question 28 À partir de ces diagrammes de Bode, en faisant apparaître clairement les constructions graphiques sur le document, déterminer le réglage du gain proportionnel K_{pl} afin de respecter l'exigence de marge de gain de la boucle de courant du diagramme des exigences (**figure 13, annexe 1**). Conclure pour ce réglage quant au respect de l'exigence de marge de phase, en précisant la valeur relevée sur les diagrammes de Bode et en faisant apparaître clairement les constructions graphiques sur le document réponse.

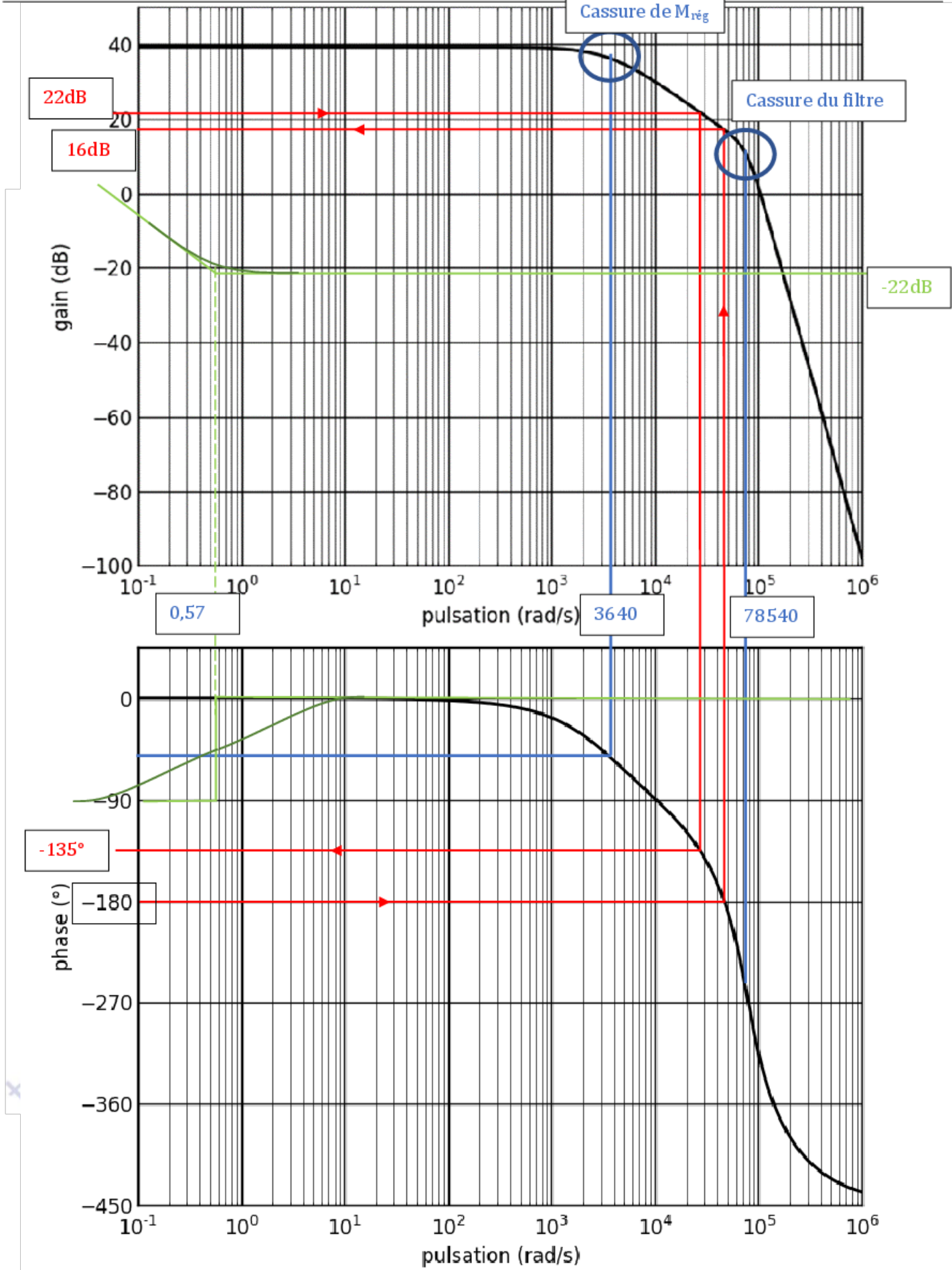
La marge de gain est définie à la pulsation telle que le déphasage en boucle ouverte est égal à -180° .

Grâce à la construction on trouve qu'il faut translater la courbe de gain de $-16-6=-22\text{dB}$, soit un gain

$$\boxed{K_{pl} = 10^{-22/20} = 0,08 \text{V} \cdot \text{A}^{-1}}$$

La marge de phase est définie à la pulsation au gain unité c-à-d à 0dB. Sur la courbe de gain non corrigée, le point d'ordonnée 22dB se retrouve après correction proportionnelle à 0dB. On trouve donc la phase correspondant à ce point particulier : -135° . Ceci nous donne une marge de phase de $180 - 135 = 45^\circ$ ce qui correspond à la valeur minimale du diagramme d'exigence.

Conclusion : ce réglage permet de satisfaire aux marges de stabilité imposées.



Remarque : le filtre de Butterworth sert ici à filtrer les fréquences supérieures à la fréquence d'échantillonnage sur 2 (afin de vérifier le théorème de Shannon). Sa pulsation de coupure doit donc être de $\frac{1}{2} \frac{2\pi}{40.10^{-6}} = 78540 \text{ rad.s}^{-1}$

Cela est bien le cas sur le diagramme fourni. Ce filtre introduit en haute fréquence un déphasage de $4(-90^\circ) = -360^\circ$.

Le premier ordre lié à l'équation électrique ajoute un déphasage supplémentaire de -90° . Soit au total -450° .

La pulsation de cassure de ce premier ordre est par ailleurs $R/L = 3640 \text{ rad.s}^{-1}$ ce que l'on retrouve clairement sur le diagramme.

Question 29 Préciser en le justifiant l'exigence (ou les exigences) que permettra (ou permettront) de respecter cet ajout de correction intégrale.

L'ajout d'une correction intégrale permet d'assurer l'exigence de précision. On apporte une intégration dans la boucle ouverte, ainsi l'erreur statique indicielle sera nulle (sous réserve de stabilité et en l'absence de perturbation).

Remarque : l'exigence erreur statique nulle n'est pas suffisamment précise. Il faudrait préciser pour quel signal canonique d'entrée.

Question 30 Tracer sur le document réponse les diagrammes asymptotiques de Bode en gain et en phase du correcteur proportionnel intégral $C_I(p)$, ainsi que l'allure des diagrammes réels.

$$C_I(p) = K_{pI} + \frac{K_{iI}}{p} = K_{pI} \left(1 + \frac{4}{7p} \right) = K_{pI} \left(\frac{4+7p}{7p} \right) = \frac{4K_{pI}}{7} \left(\frac{1+\frac{7}{4}p}{p} \right)$$

La pulsation de cassure du correcteur est $4/7 = 0,57 \text{ rad/s}$

Le gain, au-delà de cette pulsation est égal à K_{pI} le déphasage étant nul. En amont on a une pente de -20 dB/décade et un déphasage de -90° .

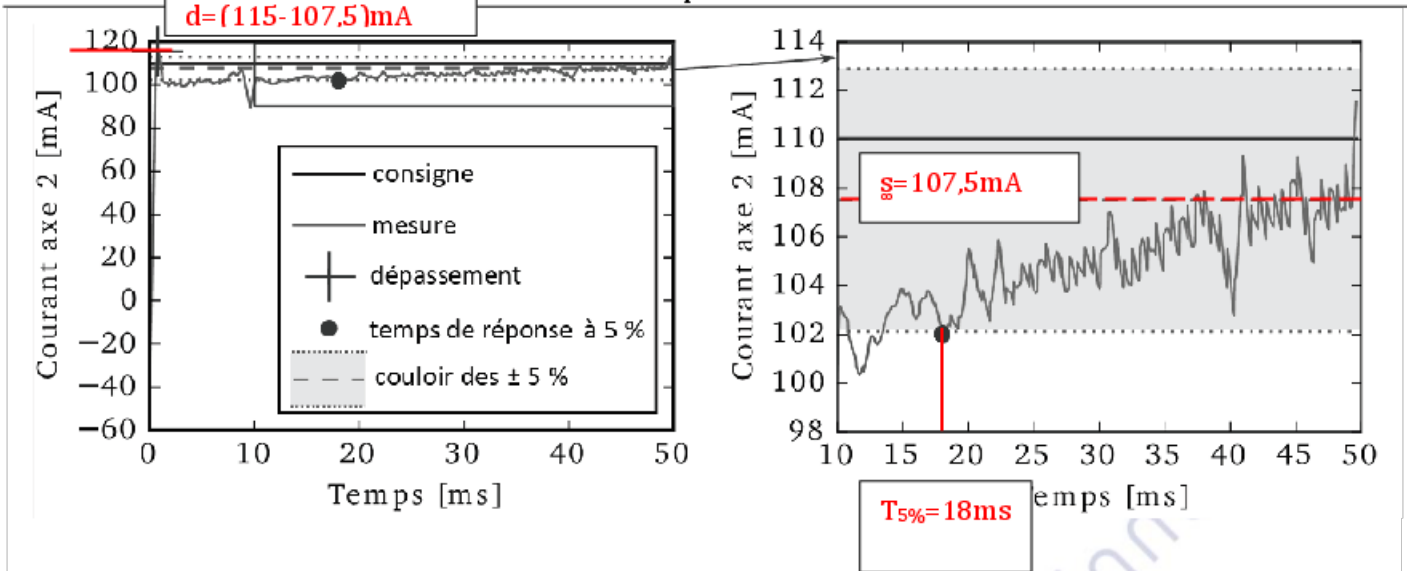
Question 31 Conclure quant à l'effet de l'ajout de l'action intégrale dans le correcteur vis-à-vis du respect des exigences de marges de gain et de phase de la boucle de courant.

On remarque que, à proximité du domaine de fréquence où se fait le réglage des marges, le correcteur a un gain proportionnel égal à celui réglé à la question 28 et la phase n'est pas modifiée. La conclusion reste valable car les marges sont inchangées.

Question 32 En précisant les valeurs, relever sur la **figure 8** les performances mesurées. Comparer aux performances du modèle étudié dans les questions précédentes, ainsi qu'aux performances souhaitées de la boucle de courant du diagramme des exigences (**figure 13, annexe 1**).

Le temps de réponse est de l'ordre de $18 \text{ ms} < 30 \text{ ms}$ donc l'exigence de rapidité est vérifiée.

Le dépassement relatif est $d\% = 100(115 - 107,5)/107,5 = 7\% \ll 25\%$ donc l'exigence de dépassement est vérifiée.



V.3 - Boucle d'asservissement en position

Question 33 En considérant le système non perturbé ($C_{\text{pert}}(p) = 0$), déterminer l'écart statique ε_s , suite à une entrée de type échelon, ainsi que l'écart de traînage ε_v , suite à une entrée de type rampe. En supposant à présent une perturbation constante ($C_{\text{pert}}(p) \neq 0$), préciser en le justifiant l'exigence (ou les exigences) que permettra de respecter l'action intégrale contenue dans le correcteur $C_P(p)$. Préciser également l'exigence (ou les exigences) que permettra de respecter l'action dérivée contenue dans le correcteur $C_D(p)$.

En supposant le système stable en boucle fermée :

- Sans perturbation : l'erreur statique indicielle ε_s et l'erreur de traînage ε_v sont nulles car la fonction de transfert en boucle ouverte possède 2 intégrations. Une est dans le correcteur et l'autre entre les variables Ω_m et θ_m .
- En présence d'une perturbation constante, l'action intégrale permet de satisfaire à l'exigence d'erreur statique indicielle nulle. En effet l'intégration placée dans le correcteur est en amont de la perturbation.

Remarque : le dernier raisonnement est incomplet car la perturbation arrive dans la boucle interne du moteur. Mais cette boucle en statique « disparaît » car Ω_m est nulle et donc le raisonnement peut être considéré comme valable (en statique pour un couple perturbateur constant mais pas s'il varie). Je ne vois pas comment conclure autrement sans calcul ni manipulation du schéma bloc (pas de place sur le doc réponse pour ça!).

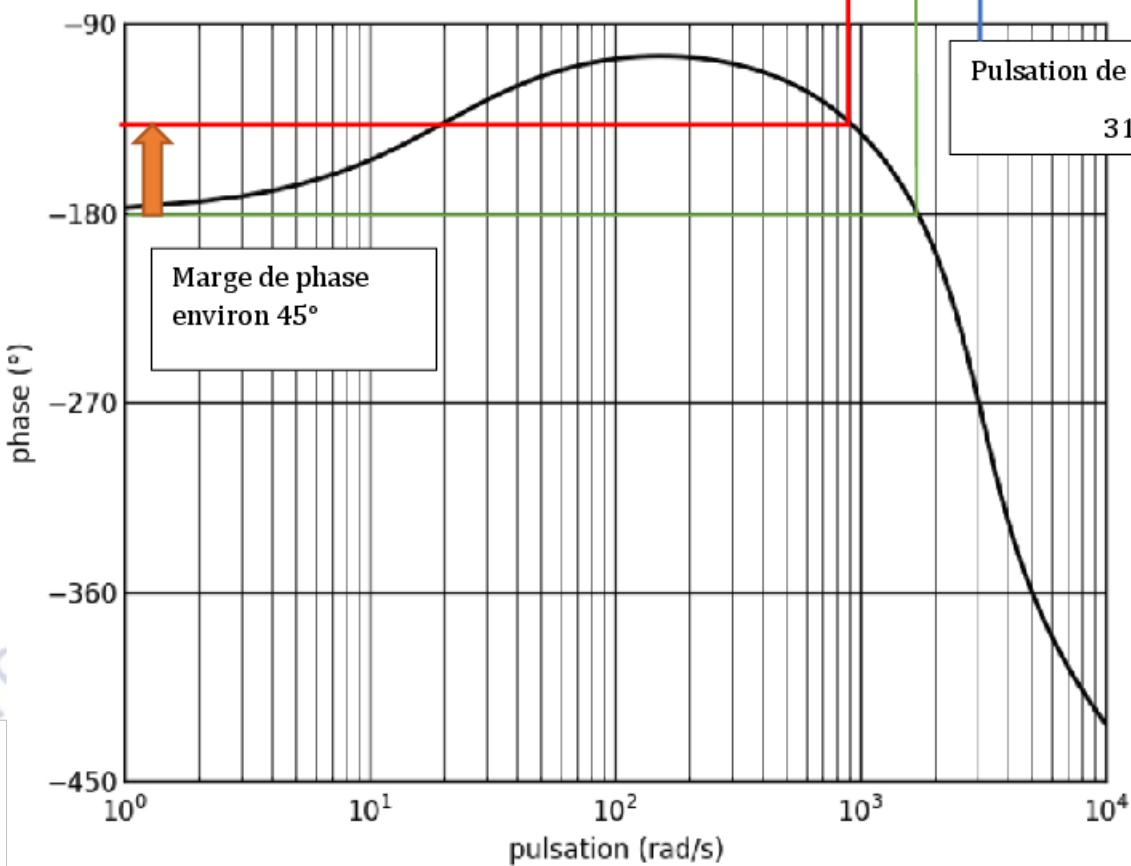
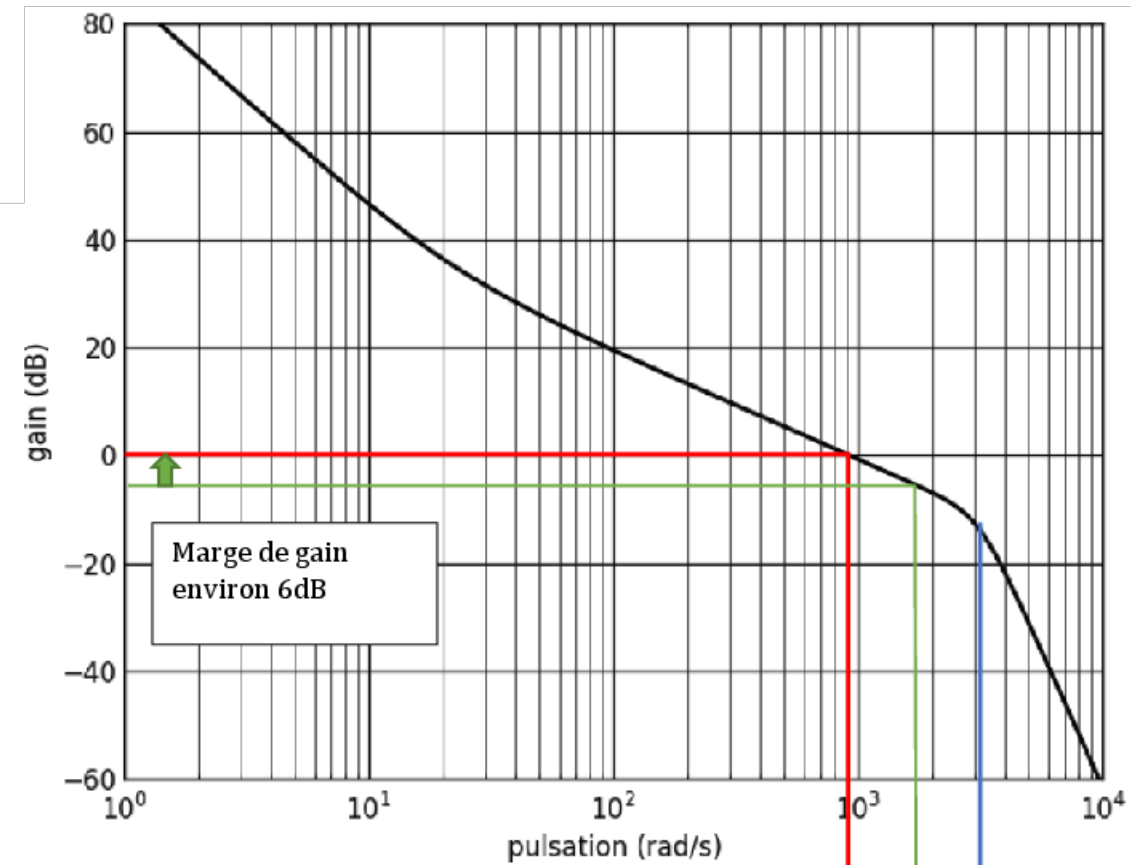
L'action dérivée quant à elle permettra de satisfaire aux marges de stabilité. En effet avec un système de classe 2 en boucle ouverte, il faut nécessairement pour assurer la stabilité, un ajout de phase sous forme de « zéro » dans la FTBO non corrigée ou sous forme d'effet dérivé dans le correcteur.

Question 34 À partir de ces diagrammes de Bode, en faisant apparaître clairement les constructions graphiques sur le document réponse, déterminer les valeurs des marges de stabilité (gain et phase). Conclure quant au respect des exigences de marges de gain et de phase de la boucle de position du diagramme des exigences (figure 13, annexe 1).

La marge de gain est égale à l'exigence de 6dB minimum

La marge de phase est supérieure à l'exigence de 35° minimum.

Conclusion : les marges de stabilité sont bien réglées



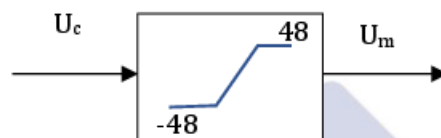
Question 35 En comparant aux caractéristiques du moteur à courant continu données dans le diagramme de définition de blocs (figure 14, annexe 1), analyser les niveaux de tension et d'intensité atteints. Conclure quant à la représentativité du modèle vis-à-vis du fonctionnement du système réel. D'après la structure de commande présentée figure 17, annexe 5, préciser le(s) grandeur(s) physique(s) devant faire l'objet d'une limitation (saturation) dans le modèle.

Les niveaux de tension et d'intensité n'ont rien de réaliste.

La tension nominale du moteur est de 48V or la tension simulée atteint 5000V !

De même l'intensité de démarrage est de l'ordre de 4A alors que la simulation donne une intensité de démarrage de 350A !

En fait le système réel possède une saturation évidente. L'alimentation en tension du moteur est limitée par le niveau de tension d'alimentation du hacheur (ici 48V).



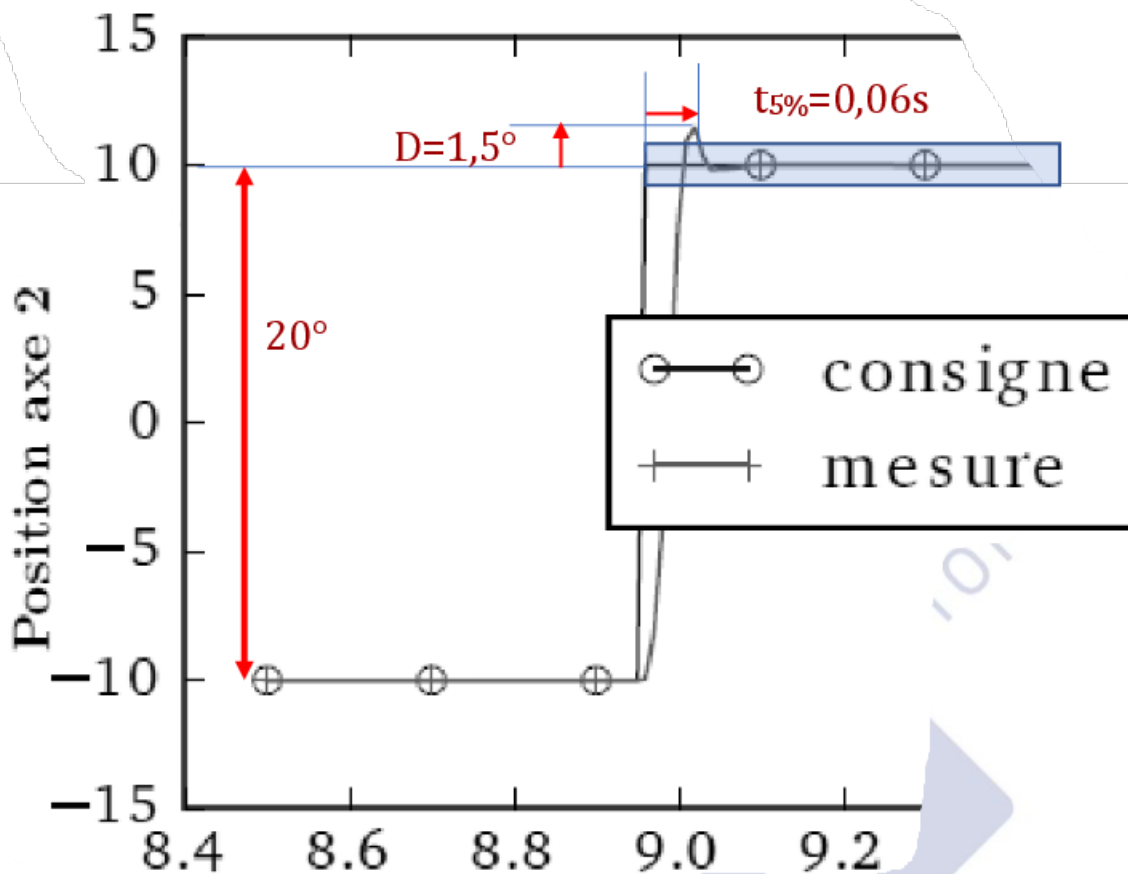
Il est certain qu'en incluant cette saturation dans le modèle, on obtiendra des niveaux d'intensité inférieurs au courant de démarrage (calculé avec $I=U/R=48/11,5=4,16A$).

Question 36 En précisant les valeurs, relever sur la figure 10 les performances mesurées. Comparer aux performances souhaitées de la boucle de position du diagramme des exigences (figure 13, annexe 1).

On a $t_{5\%} = 60ms$ ce qui ne satisfait pas l'exigence de rapidité qui devrait être inférieur à 30ms

$D\% = (1,5/20) \times 100 = 7,5\%$ ce qui est inférieur au dépassement maximal de 30%

L'erreur statique est proche de zéro sinon nulle, idem pour l'erreur de trainage (figure 11).



VI - Comparaison avec les essais et validation

Question 37 En analysant les courbes de la figure 12, conclure quant aux choix des paramètres effectués dans la partie V.

Le réglage assure la stabilité et un bon amortissement. On observe une bonne cohérence spatiale entre consigne et mesure ce qui traduit le fait que les erreurs statiques indicielles et de trainage ont pu être annulées. Cependant, le manque de rapidité du robot peut causer des écarts plus importants lors de changements rapides de trajectoire. C'est ce que l'on observe sur le graphe A.