

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2010

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Corrigé X-ENS 2010 PSI
Transmission de puissance « 4 Motion »

Partie I

- Q1)** Dans la phase de vie considérée, pour quel sens de déplacement, marche avant ou marche arrière, l'accélération sera-t-elle maximale avec une voiture à roues avant motrices ? Justifier qualitativement.

Dans la phase de vie considérée, l'accélération sera maximale en marche arrière car dans ce cas le poids de la voiture est une action motrice.

- Q2)** Pour une voiture à roues avant motrices et roulant en marche arrière, exprimer les trois équations scalaires issues du Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à l'ensemble { voiture + essieux + roues } en G et les deux équations scalaires issues du théorème du moment dynamique appliqué aux roues avant puis aux roues arrière en projection sur leurs axes de rotation. En déduire l'accélération maximale de la voiture dans la phase de vie considérée, indépendamment de la puissance du moteur. Faire l'application numérique.

On suppose garder l'adhérence sur les quatre roues.

- On isole l'ensemble { voiture + essieux + roues }. Le PFD, dans le mouvement par rapport au repère R_0 supposé galiléen, s'écrit au point G :

$$\begin{cases} N_A + N_B - (M - m)g \cdot \cos \alpha = 0 \\ T_A + T_B - (M - m)g \cdot \sin \alpha = (M - m)\ddot{\lambda} \\ a \cdot N_A - b \cdot N_B + c \cdot (T_A + T_B) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En projection sur $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$

- On isole les roues avant. Comme on néglige la masse des roues, le théorème du moment dynamique dans le mouvement par rapport au repère R_0 supposé galiléen, sur leur axe de rotation s'écrit simplement :

$$C_{mot}^A + R \cdot T_A = -J_{roues} \frac{\ddot{\lambda}}{R} \quad (2)$$

- On isole les roues arrière. Ces roues n'étant pas motrices, le couple moteur C_{mot}^B est nul. Comme on néglige la masse des roues, le théorème du moment dynamique sur leur axe de rotation s'écrit simplement :

$$R \cdot T_B = -J_{roues} \frac{\ddot{\lambda}}{R} \quad (3)$$

En combinant (1) et (3), on élimine T_B :

$$\begin{cases} N_A + N_B - (M - m)g \cdot \cos \alpha = 0 \\ T_A - J_{roues} \frac{\ddot{\lambda}}{R^2} - (M - m)g \cdot \sin \alpha = (M - m)\ddot{\lambda} \\ a \cdot N_A - b \cdot N_B + c \cdot (T_A - J_{roues} \frac{\ddot{\lambda}}{R^2}) = 0 \end{cases}$$

On résout :

$$\begin{cases} T_A = (M - m)(g \cdot \sin \alpha + \ddot{\lambda}) + \frac{J_{roues}}{R^2} \cdot \ddot{\lambda} \\ N_A = \frac{(M - m)[b \cdot g \cdot \cos \alpha - c \cdot g \cdot \sin \alpha - c \ddot{\lambda}]}{(a + b)} \end{cases}$$

L'accélération limite correspond à la limite d'adhérence au point A. A la limite d'adhérence, comme $T_A < 0$, on a :

$$\frac{-T_A}{N_A} = f$$

$$-(M - m)(g \cdot \sin \alpha + \ddot{\lambda}) - \frac{J_{roues}}{R^2} \cdot \ddot{\lambda} = f \frac{(M - m)[b \cdot g \cdot \cos \alpha - c \cdot g \cdot \sin \alpha - c \ddot{\lambda}]}{(a + b)}$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{g \cdot \sin \alpha + f \frac{g \cdot [b \cdot \cos \alpha - c \cdot \sin \alpha]}{(a + b)}}{\frac{-J_{roues}}{R^2(M - m)} + f \frac{c}{(a + b)} - 1}$$

AN :

$$\ddot{\lambda} = -4.28 m \cdot s^{-2}$$

Q3) Reprendre le calcul précédent pour une voiture à roues avant motrices et roulant en marche avant, faire l'application numérique. Conclure.

Maintenant $T_A > 0$. Il suffit donc de résoudre :

$$\frac{T_A}{N_A} = f$$

$$(M - m)(g \cdot \sin \alpha + \ddot{\lambda}) + \frac{J_{roues}}{R^2} \cdot \ddot{\lambda} = f \frac{(M - m)[b \cdot g \cdot \cos \alpha - c \cdot g \cdot \sin \alpha - c \ddot{\lambda}]}{(a + b)}$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{-g \cdot \sin \alpha + f \frac{g \cdot [b \cdot \cos \alpha - c \cdot \sin \alpha]}{(a + b)}}{\frac{J_{roues}}{R^2(M - m)} + f \frac{c}{(a + b)} + 1}$$

AN :

$$\ddot{\lambda} = 0.29 m \cdot s^{-2}$$

Q4) Exprimer le couple $C_{moteur}^{1'}$ en fonction de $M, m, \ddot{\lambda}, g, \alpha, R, J_{roues}, J_{essieu}$, puis le travail dépensé par le moteur pendant dix secondes de cette phase d'accélération maximale. Faire l'application numérique.

Autre méthode

On suppose que l'accélération maximale est celle donnée par le cahier des charges ($\ddot{\lambda} = 1,6m.s^{-2}$)

On isole l'ensemble { voiture + essieux + roues }. Théorème de l'énergie cinétique dans le mouvement par rapport au repère R_0 supposé galiléen :

- Puissance moteur : $P_{moteur} = C_{moteur}^{1'} \cdot \omega_1 = -C_{moteur}^{1'} \cdot \frac{\dot{\lambda}}{R}$
- Puissance dissipée en A et en B nulles car roulement sans glissement.
- Puissance de l'action de pesanteur : $P_{pesanteur} = -(M - m) \cdot g \cdot \dot{\lambda} \cdot \sin \alpha$.
- Puissance intérieure nulle.
- Energie cinétique de l'ensemble { voiture + essieux + roues } :

$$Ec_{voiture} = \frac{1}{2} (M - m) \dot{\lambda}^2$$

$$Ec_{roues} = 2 * \frac{1}{2} J_{roues} \left(\frac{\dot{\lambda}}{R} \right)^2$$

$$Ec_{essieux} = \frac{1}{2} J_{essieu} \left(\frac{\dot{\lambda}}{R} \right)^2 \quad (\text{On suppose que l'inertie de l'essieu arrière sans la pièce 2 est nulle})$$

Ainsi,

$$\frac{dEc}{dt} = P_{int} + P_{ext}$$

$$C_{moteur}^{1'} = -R \left((M - m) \cdot g \cdot \sin \alpha + \left((M - m) + \frac{(2 \cdot J_{roues} + J_{essieu})}{R^2} \right) \ddot{\lambda} \right)$$

Travail dépensé pendant 10s à accélération maximale (supposée en marche avant) :

$$W_{moteur} = \int_{0s}^{10s} P_{moteur} dt = \int_{0s}^{10s} -C_{moteur}^{1'} \cdot \frac{\dot{\lambda}}{R} dt$$

$$W_{moteur} = \frac{-C_{moteur}^{1'}}{R} \int_{0s}^{10s} \ddot{\lambda} \cdot t \cdot dt$$

$$W_{moteur} = \frac{-C_{moteur}^{1'}}{R} \cdot \ddot{\lambda} \cdot \frac{t^2}{2}$$

AN :

$$C_{moteur}^{1'} = -1479N.m$$

$$W_{moteur} = 381651J$$

Q5) Déterminer, pour une voiture à transmission intégrale pour laquelle les couples transmis aux roues avant et arrière sont identiques, quelles sont les

premières roues à la limite d'adhérence ? En déduire l'accélération maximale de cette voiture, indépendamment de la puissance du moteur. Conclure.

En reprenant la démarche de la question 2, on a :

$$C_{mot}^A + R.T_A = -J_{roues} \frac{\ddot{\lambda}}{R}$$

$$C_{mot}^B + R.T_B = -J_{roues} \frac{\ddot{\lambda}}{R} \text{ avec } C_{mot}^A = C_{mot}^B$$

Donc les efforts tangentiels sont égaux $T_A = T_B$.

L'isolement de l'ensemble { voiture + essieux + roues } donne au point G :

$$\begin{cases} N_A + N_B - (M - m)g \cdot \cos \alpha = 0 \\ 2.T_A - (M - m)g \cdot \sin \alpha = (M - m)\ddot{\lambda} \\ a.N_A - b.N_B + 2.c.T_A = -2(J_{roues} + J_{essieu}) \frac{\ddot{\lambda}}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_A = \frac{M - m}{2} (\ddot{\lambda} + g \cdot \sin \alpha) \\ N_A = (M - m) \cdot \frac{b.g \cdot \cos \alpha - c.(\ddot{\lambda} + g \cdot \sin \alpha) - 2(J_{roues} + J_{essieu})\ddot{\lambda}/R}{a + b} \\ N_B = (M - m) \cdot \frac{a.g \cdot \cos \alpha + c.(\ddot{\lambda} + g \cdot \sin \alpha) - 2(J_{roues} + J_{essieu})\ddot{\lambda}/R}{a + b} \end{cases}$$

On résout ensuite chaque inéquation :

$$\frac{T_A}{N_A} < f \text{ et } \frac{T_B}{N_B} < f$$

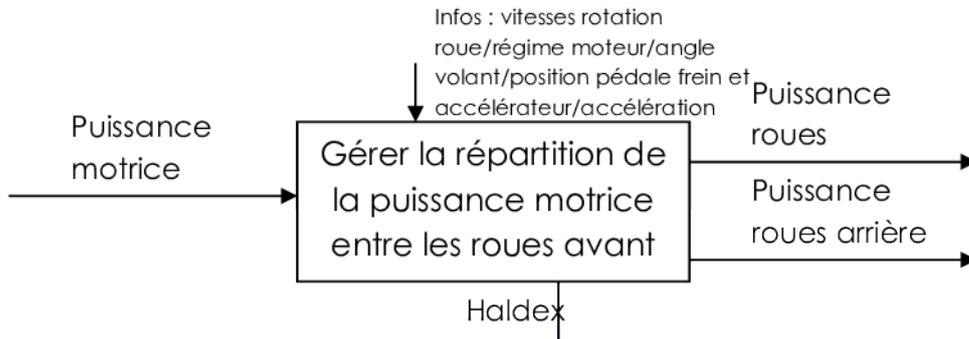
On trouve :

- Glissement en A si $\ddot{\lambda} > 1.86m.s^{-2}$
- Glissement en B si $\ddot{\lambda} > 1.35m.s^{-2}$

Le glissement aura lieu d'abord en B.

La valeur d'accélération maximale est inférieure à celle donnée dans le cahier des charges. Cette solution ne convient donc pas.

Q6) Représenter le diagramme SADT niveau A-0 de l'Haldex.



Q7) Préciser le phénomène physique au niveau des roues avant qui déclenche le changement de fonctionnement de l'Haldex.

Le mouvement de glissement donc le phénomène physique de frottement au niveau des roues avant implique une différence de vitesse avec les roues arrière. Le système Haldex se met alors en marche et transfert de la puissance vers les roues arrière.

Q8) Dans la phase de vie étudiée, déterminer la répartition de couple entre les roues avant et arrière et exprimer le résultat en pourcentage. Donner les paramètres qui influent sur cette répartition.

On suppose être en montée, à la limite du glissement au point A.

- On isole les roues avant. Le théorème du moment dynamique sur leur axe de rotation s'écrit simplement :

$$C_{mot}^A + R.T_A = -J_{roues} \frac{\ddot{\lambda}}{R}$$

La puissance sur la roue avant étant maximale, et donc à la limite du glissement sur les roues avant, le couple C_{mot}^A vaut :

$$C_{mot}^A = -J_{roues} \frac{\ddot{\lambda}}{R} - R.f.N_A$$

- On isole les roues arrière. Le théorème du moment dynamique sur leur axe de rotation s'écrit simplement :

$$C_{mot}^B + R.T_B = -J_{roues} \frac{\ddot{\lambda}}{R}$$

- On isole l'ensemble { voiture + essieux + roues }. Le PFD s'écrit au point G :

$$\begin{cases} N_A + N_B - Mg \cdot \cos \alpha = 0 \\ f.N_A + T_B - Mg \cdot \sin \alpha = M\ddot{\lambda} \\ a.N_A - b.N_B + c.(f.N_A + T_B) = -2(J_{roues} + J_{essieu}) \frac{\ddot{\lambda}}{R} \end{cases}$$

On extrait N_A et T_B des équations précédentes :

$$\begin{cases} (a+b+c.f)N_A + c.T_B = M.g.b.\cos\alpha - 2(J_{roues} + J_{essieu})\frac{\ddot{\lambda}}{R} \\ f.N_A + T_B = M.g.\sin\alpha + M.\ddot{\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_A = \frac{M.(g.b.\cos\alpha - g.c.\sin\alpha - c.\ddot{\lambda}) - 2(J_{roues} + J_{essieu})\frac{\ddot{\lambda}}{R}}{a+b} \\ T_B = M.g.\sin\alpha + M.\ddot{\lambda} - f.\frac{M.(g.b.\cos\alpha - g.c.\sin\alpha - c.\ddot{\lambda}) - 2(J_{roues} + J_{essieu})\frac{\ddot{\lambda}}{R}}{a+b} \end{cases}$$

Par conséquent, les couples sur les roues valent :

$$C_{mot}^A = -J_{roues}\frac{\ddot{\lambda}}{R} - R.f.N_A = -J_{roues}\frac{\ddot{\lambda}}{R} - R.f.\frac{M.(g.b.\cos\alpha - g.c.\sin\alpha - c.\ddot{\lambda}) - 2(J_{roues} + J_{essieu})\frac{\ddot{\lambda}}{R}}{a+b}$$

$$C_{mot}^B = -J_{roues}\frac{\ddot{\lambda}}{R} - R.T_B$$

$$C_{mot}^B = -J_{roues}\frac{\ddot{\lambda}}{R} - R.\left(M.g.\sin\alpha + M.\ddot{\lambda} - f.\frac{M.(g.b.\cos\alpha - g.c.\sin\alpha - c.\ddot{\lambda}) - 2(J_{roues} + J_{essieu})\frac{\ddot{\lambda}}{R}}{a+b} \right)$$

AN :

$$C_{mot}^A = 62.\ddot{\lambda} - 998$$

$$C_{mot}^B = -561.\ddot{\lambda} + 163,6$$

C_{mot}^A augmente linéairement avec l'accélération $\ddot{\lambda}$.

C_{mot}^B diminue linéairement avec l'accélération $\ddot{\lambda}$.

Pour une accélération $\ddot{\lambda} = 1.6m.s^{-2}$, la répartition de puissance est :

$$\frac{C_{mot}^A}{C_{mot}^A + C_{mot}^B} = 55\%$$

$$\frac{C_{mot}^B}{C_{mot}^A + C_{mot}^B} = 45\%$$

Q9) Déterminer l'accélération maximum de la voiture à transmission intégrale « 4Motion » dans la phase de vie étudiée, indépendamment de la puissance du moteur. Conclure quant à la satisfaction de la prestation attendue.

- Le système « 4Motion » évite le glissement au niveau du point A. La situation limite est donc maintenant quand on est à la limite du glissement en A ET en B. Le PFD appliqué à l'ensemble { voiture + essieux + roues } s'écrit au point G :

$$\begin{cases} N_A + N_B - Mg \cdot \cos \alpha = 0 \\ f \cdot N_A + f \cdot N_B - Mg \cdot \sin \alpha = M \ddot{\lambda} \\ (a + c \cdot f) \cdot N_A + (c \cdot f - b) \cdot N_B = -2(J_{roues} + J_{essieu}) \frac{\ddot{\lambda}}{R} \end{cases}$$

Donc,

$N_A + N_B = Mg \cdot \cos \alpha$ donne l'accélération limite:

$$\ddot{\lambda} = g \cdot (f \cdot \cos \alpha - \sin \alpha)$$

AN :

$$\ddot{\lambda} = g \cdot (f \cdot \cos \alpha - \sin \alpha) = 1,68 m \cdot s^{-2}$$

Le critère du cahier des charges est vérifié.

- Q10)** A l'aide des résultats précédents, exprimer le couple $C_{moteur}^{1''}$ en fonction de $C_{moteur}^{1'}$, J_{essieu} , J_{trans} , $\ddot{\lambda}$, R , m , g , et α . En supposant que l'Haldex ne consomme pas d'énergie, exprimer le travail dépensé par le moteur pendant dix secondes de cette phase d'accélération maximale. Faire l'application numérique.

Par rapport au modèle de la question Q4, il faut mettre en mouvement la masse m , l'arbre de transmission, et la pièce 2 en plus. En reprenant le calcul de la question Q4, et en réécrivant le théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble { voiture + essieux + roues }, on trouve :

$$C_{moteur}^{1''} = C_{moteur}^{1'} - R \left(m \cdot g \cdot \sin \alpha + \left(m + \frac{J_{trans} + J_{essieu}}{R^2} \right) \ddot{\lambda} \right)$$

Travail dépensé pendant 10s à accélération maximale (supposée en marche avant) :

$$W_{moteur} = \int_{0s}^{10s} P_{moteur} dt = \int_{0s}^{10s} -C_{moteur}^{1''} \cdot \frac{\dot{\lambda}}{R} dt$$

$$W_{moteur} = \int_{0s}^{10s} \left[-C_{moteur}^{1'} + R \left(m \cdot g \cdot \sin \alpha + \left(m + \frac{J_{trans} + J_{essieu}}{R^2} \right) \ddot{\lambda} \right) \right] \frac{\dot{\lambda}}{R} dt$$

$$W_{moteur} = \int_{0s}^{10s} \left[-C_{moteur}^{1'} + R \left(m \cdot g \cdot \sin \alpha + \left(m + \frac{J_{trans} + J_{essieu}}{R^2} \right) \ddot{\lambda} \right) \right] \frac{\dot{\lambda}}{R} dt$$

Pour une accélération $\ddot{\lambda} = 1,6 m \cdot s^{-2}$, on trouve :

$$C_{moteur}^{1''} = -1632 N \cdot m$$

$$W''_{moteur} = 4,21.10^6 J$$

Q11) Conclure vis-à-vis du critère de surconsommation de la prestation attendue par le client.

Surconsommation :

$$Surconsommation = \frac{W''_{moteur} - W_{moteur}}{W_{moteur}} = 10\%$$

La surconsommation est acceptable (<15%)

Q12) Critiquer le résultat précédent et préciser les hypothèses à remettre en cause, des pistes d'évolution de la transmission « 4Motion » pour diminuer cette surconsommation.

Le résultat précédent a été obtenu en négligeant les pertes dans le système Haldex, la masse des roues, essieux... La surconsommation est donc plus grande en réalité que celle trouvée. Cependant, il reste un peu de marge par rapport au cahier des charges (10% pour 15% de surconsommation).

Pour diminuer la surconsommation, il faut limiter un maximum les pertes énergétiques dans les liaisons. Il est aussi possible de chercher des matériaux plus légers résistant aussi bien aux actions mécaniques, ou travailler sur l'aérodynamisme de la voiture pour diminuer son coefficient Cx.

Q13) Valider le moteur de la voiture au critère d'accélération de la prestation attendue. Conclure.

Le moteur peut fournir un couple de 200N.m, et nous avons besoin de 1600N.m sur la pièce 1. Il faut donc une boîte de vitesse avec un rapport de réduction inférieur à 1/8 en première.

$$\text{Vérification : } Rapport_{1\text{ère}} = \frac{\left(\frac{40}{3.6 * R}\right)}{\left(\frac{4500.\pi}{30}\right)} = 0.07 < \frac{1}{8}$$

En première vitesse, à 3750 tr.min⁻¹, le couple disponible pour entraîner les roues est :

$$C_{disponible} = \frac{200}{0.07} = 2860 N.m > 1632 N.m$$

Le couple disponible permet bien de monter une pente de 10% avec l'accélération voulue. Il y a même une marge assez grande.

$$\text{Remarque : En déterminant le rapport de 2^{ème} vitesse (} Rapport_{2\text{ème}} = \frac{\left(\frac{60}{3.6 * R}\right)}{\left(\frac{4400.\pi}{30}\right)} = 0.1167 \text{),}$$

le couple disponible est encore supérieur aux 1632N.m.

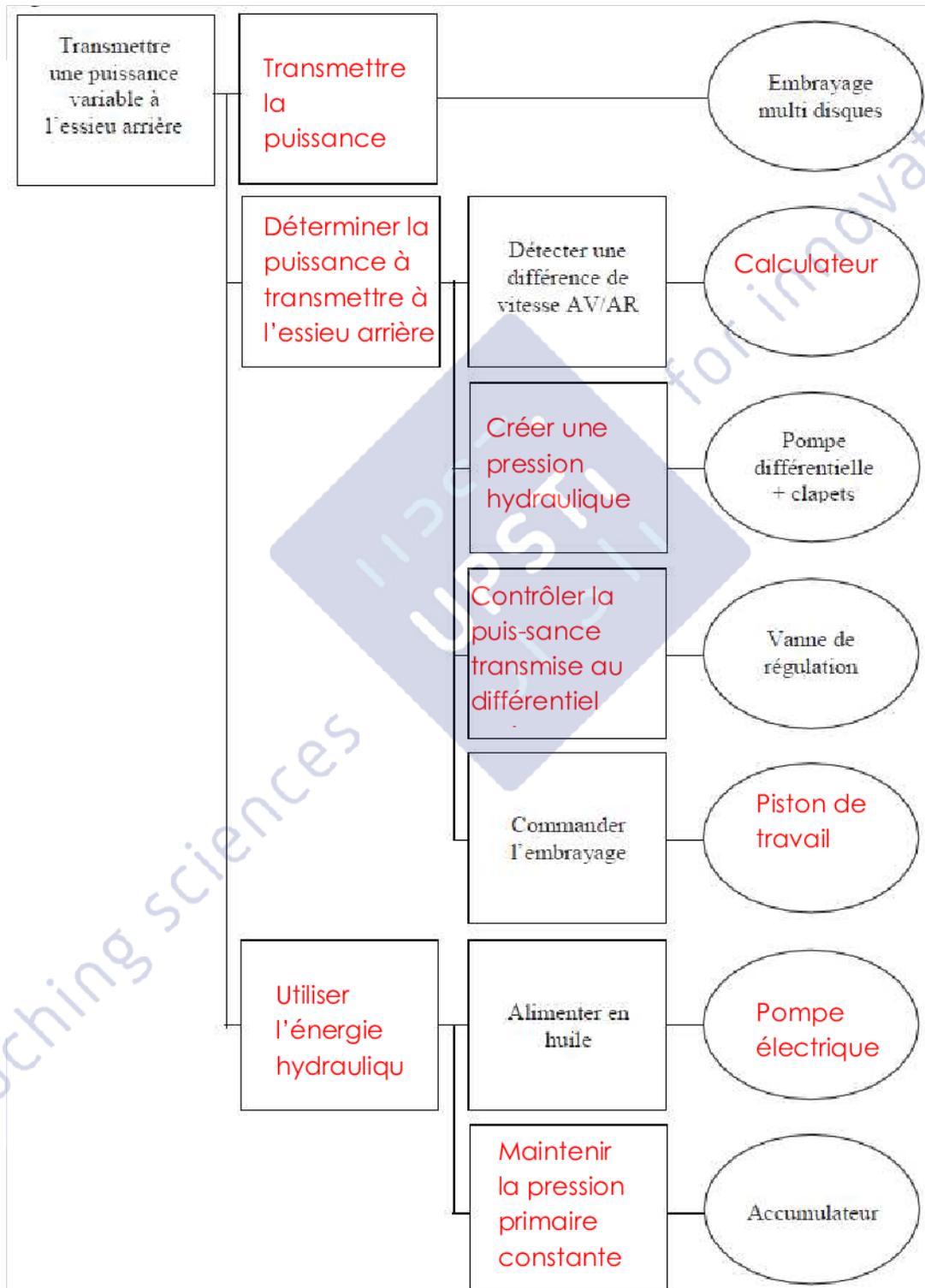
$$C_{disponible 2} = \frac{200}{0.1167} = 1713 N.m > 1632 N.m$$

Il est aussi possible de monter une pente de 10% en deuxième vitesse.



Partie II

Q14) A l'aide de la figure 9, compléter le diagramme FAST de l'Haldex donné sur le document réponse DR1.



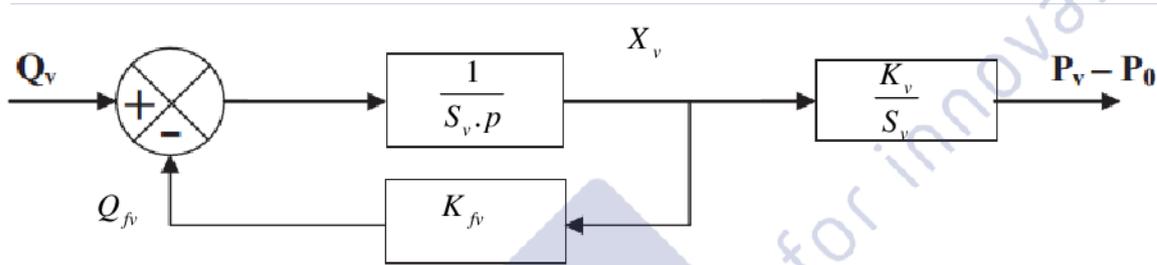
Q15) Compléter le schéma bloc donné ci-dessous. En déduire la fonction de transfert de la vanne de régulation $\frac{P_v(p) - P_0}{Q_v(p)}$.

Relations :

$$Q_v(p) - Q_{fv}(p) = S_v \cdot p \cdot X_v(p)$$

$$Q_{fv}(p) = K_{fv} \cdot X_v(p)$$

$$(P_0 - P_v(p)) \cdot S_v + k_v \cdot X_v(p) = 0$$



$$\frac{P_v(p) - P_0}{Q_v(p)} = \frac{\left(\frac{1}{S_v \cdot p}\right) \cdot \frac{K_v}{S_v}}{1 + \frac{K_{fv}}{S_v} \cdot S_v} = \frac{K_v / S_v}{K_{fv} + S_v \cdot p}$$

$$\frac{P_v(p) - P_0}{Q_v(p)} = \frac{\left(\frac{K_v}{S_v \cdot K_{fv}}\right)}{1 + \left(\frac{S_v}{K_{fv}}\right) \cdot p}$$

Q16) Donner la condition pour que la pompe différentielle délivre un débit.

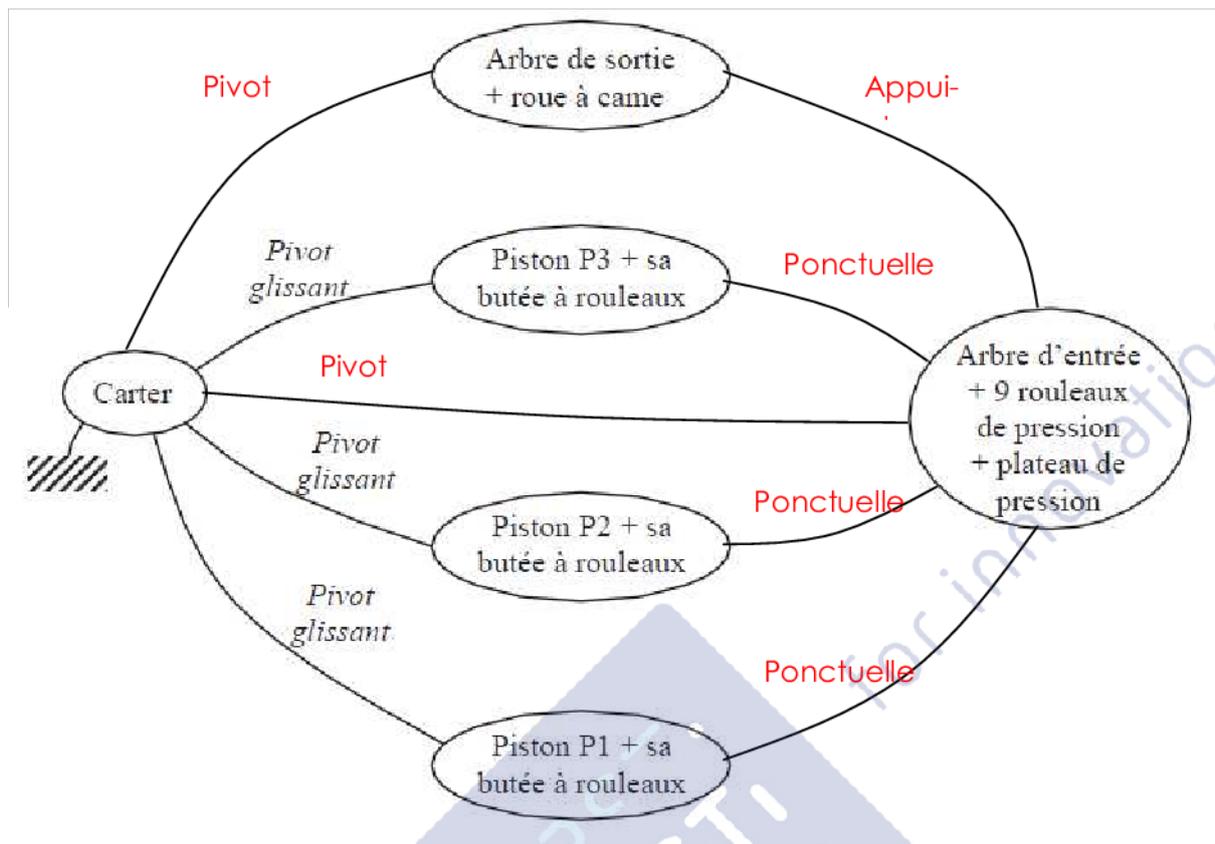
Il doit y avoir une différence de vitesse de rotation entre les deux arbres pour que la roue à came fasse se déplacer les pistons de pompage intérieur et extérieur.

Q17) Pour chaque piston, les rouleaux de pression sont au nombre de trois et disposés à 120°. Justifier ce choix technologique.

Ces rouleaux sont chacun au contact d'un piston annulaire. Si on modélise ces contacts par un contact ponctuel, on ne peut avoir plus de 3 contacts ponctuels pour garder un système isostatique. En mettre moins de 3 pourrait bloquer le piston par arc-boutement dans son guidage.

Donc en mettant 3 rouleaux à 120°, on a un système isostatique, et les efforts sont répartis équitablement.

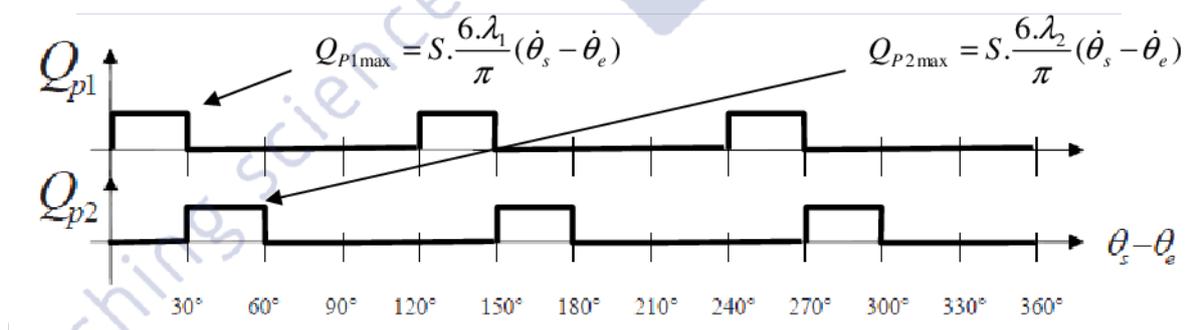
Q18) Compléter le graphe de structure de cette pompe donné sur le document réponse DR2.



Q19) Représenter l'allure des débits Q_{P1} et Q_{P2} sur le document réponse DR2.

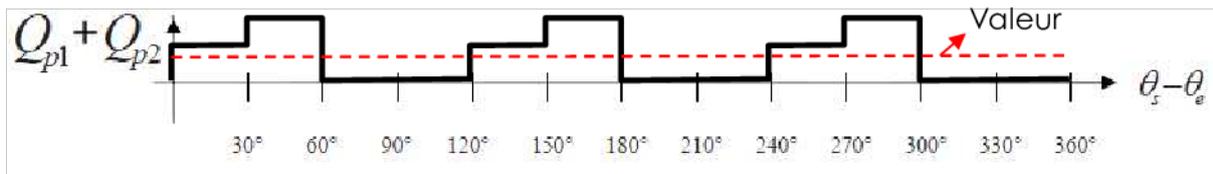
Le débit volumique dans chaque vérin « i » s'exprime par : $Q_i = S.V_i = S \cdot \frac{dX_i}{dt}$.

Pendant, les clapets anti-retour empêchent les débits de devenir négatifs.



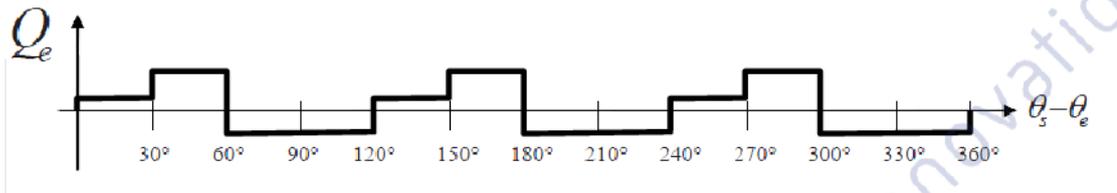
Q20) Sur le document DR2, représenter l'allure que doit avoir le débit Q_e pour satisfaire la fonction technique précédente.

En supposant l'huile incompressible, on a : $Q_{P1} + Q_{P2} = Q_e + Q_v$

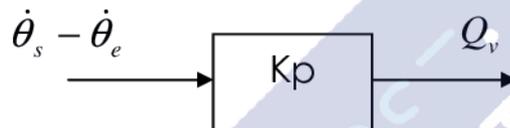


Si on veut un débit Q_v constant, il doit être égal à la valeur moyenne de $Q_{p1} + Q_{p2}$. Le débit Q_e est donc égal à :

$Q_e = Q_{p1} + Q_{p2} - \langle Q_{p1} + Q_{p2} \rangle$ si on note $\langle Q_{p1} + Q_{p2} \rangle$ la valeur moyenne de $Q_{p1} + Q_{p2}$.



Q21) Montrer que la fonction de transfert de la pompe différentielle peut se modéliser par un gain pur K_p :



D'après la question précédente, on a : $Q_v = \langle Q_{p1} + Q_{p2} \rangle$.

Ainsi :

$$Q_v = \frac{1}{4} (Q_{p1\max} + Q_{p2\max}) = \frac{3.S}{2\pi} (\lambda_1 + \lambda_2) (\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_e)$$

Le gain K_p est en $[m^3]$, et vaut :

$$K_p = \frac{3.S}{2\pi} (\lambda_1 + \lambda_2)$$

Q22) Donner la fonction technique satisfaite par la pression primaire.

La pression primaire permet de « transmettre constamment une partie de la puissance motrice au différentiel arrière ». Ceci permet notamment de pouvoir déplacer le véhicule dès la mise en route du moteur, et même si les roues avant sont dans un endroit sans adhérence (glace, boue, ...).

Q23) Déterminer l'expression de k_a permettant de vérifier la condition « $X_a = 0$ si

$$P_a = P_0 \text{ »}$$

L'équilibre du piston s'écrit :

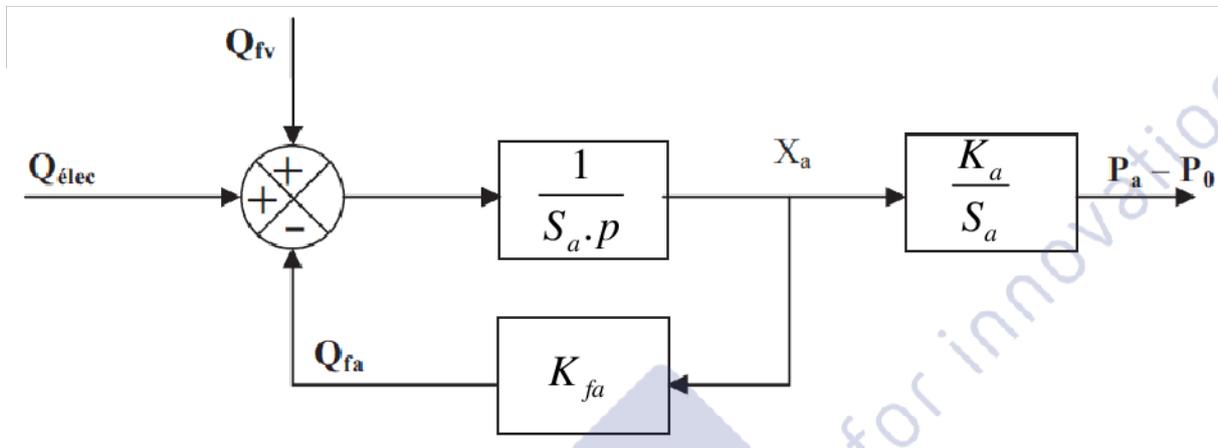
$$P_a \cdot S_a = k_a (l_0 - (L - X_a))$$

Or on veut $X_a = 0$ quand $P_a = P_0$. Par conséquent, la raideur k_a vérifie :

$$P_0 \cdot S_a = k_a (l_0 - L)$$

$$k_a = \frac{P_0 \cdot S_a}{l_0 - L}$$

Q24) Compléter le schéma bloc donné ci-dessous.



Q25) Montrer que l'accumulateur se comporte comme un système du 1^{er} ordre vis-à-vis des deux débits Q_{fv} et Q_{elec} . Discuter de l'influence de la constante de temps en fonction du comportement attendu de l'accumulateur.

$$\frac{P_a(p) - P_0(p)}{Q_{elec}(p) + Q_{fv}(p)} = \frac{K_a}{S_a} \left(\frac{1/(S_a \cdot p)}{1 + K_{fa}/(S_a \cdot p)} \right) = \frac{K_a/S_a \cdot K_{fa}}{1 + \left(\frac{S_a}{K_{fa}} \right) p}$$

L'accumulateur se comporte bien comme un premier ordre.

La constante de temps du premier ordre induit un temps de réponse pour garantir une pression primaire constante.

Q26) Discuter de la pertinence du modèle de frottement retenu compte tenu des critères de la fonction technique à valider de l'Haldex.

Le modèle de frottement choisi est de type « frottement de Coulomb ». Ce modèle s'applique à des contacts secs, or ici l'embrayage est dans un bain d'huile. Cependant, la différence des vitesses de rotation $\Delta \dot{\theta} = \dot{\theta}_s(t) - \dot{\theta}_e(t)$ restera faible. Le modèle de frottement visqueux ne se justifie donc pas.

D'autre part, on se place à la limite du glissement. Ceci permet de calculer le couple maximum transmissible dans l'embrayage.

Q27) Montrer que cette fonction de transfert peut s'écrire sous la forme d'un gain pur K_e . Déterminer l'expression de K_e .

Relation entre le couple transmissible $C_e(t)$, et la pression $p_v(t)$ appliquée sur le piston de travail :

$$C_e(t) = \frac{2}{3} n \cdot f_e \cdot p_v(t) \cdot S_c \left(\frac{R_e^3 - r_e^3}{R_e^2 - r_e^2} \right)$$

Ainsi,

$$\frac{C_e(p)}{p_v(p)} = \frac{2}{3} n \cdot f_e \cdot S_c \left(\frac{R_e^3 - r_e^3}{R_e^2 - r_e^2} \right) = K_e$$

for innovation



teaching sciences

Partie III

Q28) Justifier que ce système ne présente aucun risque d'instabilité.

La fonction de transfert de la grande boucle est de degré 2 au dénominateur. Le déphasage ne sera donc jamais inférieur à -180° . Le système est stable.

Q29) Valider le critère « continue C0 » de la prestation attendue.

D'après le cahier des charges, l'accélération doit être de classe C0 (au sens mathématique). Sur la figure 18, la réponse indicielle n'a pas de tangente horizontale à l'origine, et donc l'accélération n'est pas nulle en ce point. Néanmoins, elle reste faible

$$(\ddot{\theta}_s(0) = \frac{0.22}{5} = 0.044 \text{ rad.s}^{-2}).$$

D'autre part, au regard du schéma bloc, la fonction de transfert est du 2^{ème} ordre. La tangente à l'origine est donc bien horizontale, et cela ne se voit pas sur la figure.

Le critère « continue C0 » est bien vérifié.

Q30) Mesurer la précision en position et le temps de réponse du système, conclure quant à la satisfaction de la fonction technique de l'Haldex.

D'après la réponse indicielle donnée sur la figure 18, la précision statique est nulle, et le temps de réponse à 5% vaut $t_{r5\%} = 60\text{s}$.

Le temps de réponse est largement trop grand.

Q31) Montrer que la constante de temps de la vanne de régulation T_h influe sur la rapidité du système.

On suppose $F_{\text{ext}}=0$. Soit K le gain de la boucle interne. La fonction de transfert de l'Haldex est du deuxième ordre :

$$\frac{\dot{\theta}_s(p)}{\dot{\theta}_e(p)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{K_h \cdot K}\right)p + \left(\frac{T_h}{K_h \cdot K}\right)p^2}$$

Ainsi, le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 dépendent de T_h . Cette constante de temps T_h influe donc sur la rapidité du système.

Q32) Justifier l'intérêt d'une étude harmonique du système pour l'entrée F_{ext} .

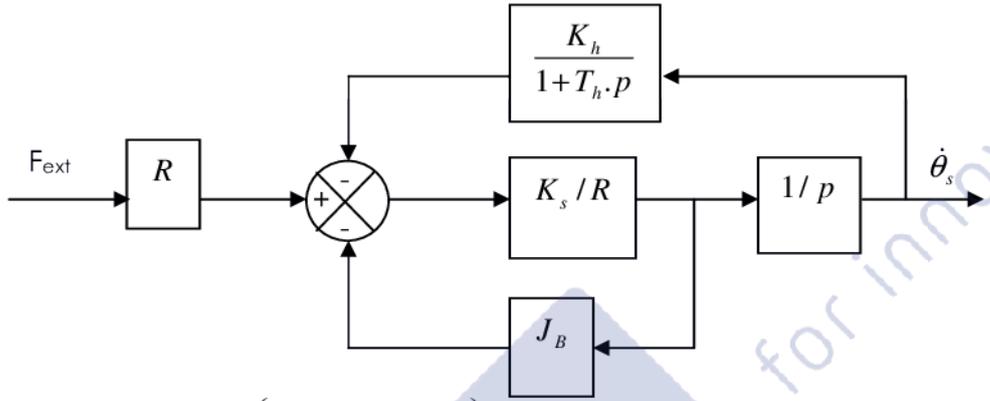
La pente de la route et le coefficient de frottement pneu/route peuvent évoluer au cours du déplacement de la voiture (nids de poule, neige, terre, bitume,...). Ces variations vont solliciter le système avec des pulsations variables. Une étude harmonique est donc nécessaire.

Q33) Tracer l'allure asymptotique de la fonction de transfert $\frac{\dot{\theta}_s(p)}{F_{ext}(p)}$ dans le plan de

Bode. Quelle condition doit vérifier le gain statique de cette fonction de transfert au regard du comportement attendu par le client vis-à-vis de cette entrée ?

Méthode graphique :

Avec $\dot{\theta}_s(p) = 0$, le système est équivalent au schéma bloc suivant :



$$\frac{\dot{\theta}_s(p)}{F_{ext}(p)} = R \cdot \frac{\left(\frac{K_s/R}{1 + K_s \cdot J_B / R} \cdot \frac{1}{p} \right)}{1 + \left(\frac{K_s/R}{1 + K_s \cdot J_B / R} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{K_h}{1 + T_h \cdot p} \right)} = \frac{K_s (1 + T_h \cdot p)}{p(1 + T_h \cdot p) \left(1 + \frac{K_s \cdot J_B}{R} \right) + \frac{K_s K_h}{R}}$$

$$\frac{\dot{\theta}_s(p)}{F_{ext}(p)} = \frac{\frac{R}{K_h} (1 + T_h \cdot p)}{p(1 + T_h \cdot p) \left(\frac{R}{K_s K_h} + \frac{J_B}{K_h} \right) + 1}$$

Méthode analytique :

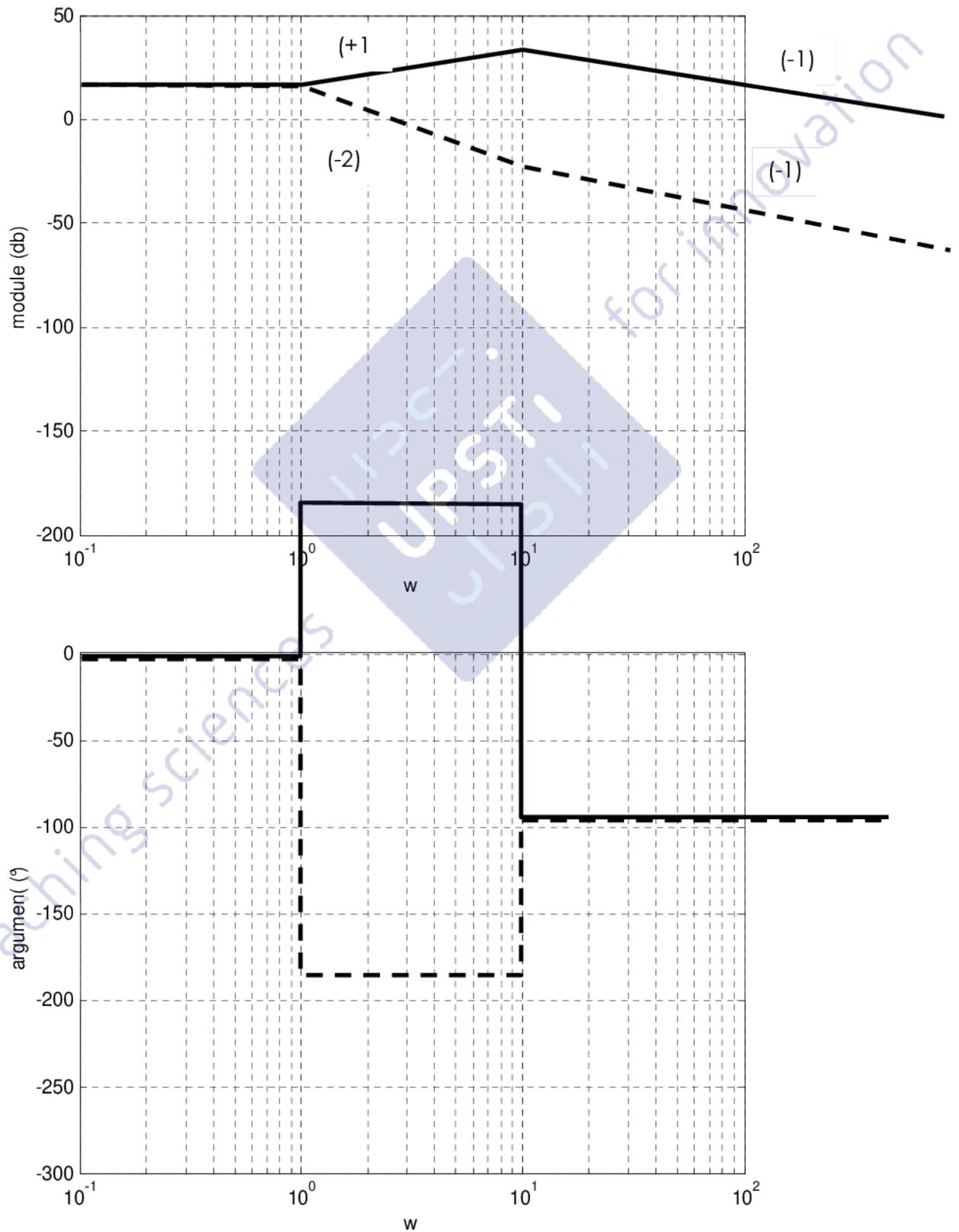
La lecture du schéma bloc donne l'équation suivante :

$$\left[F_{ext} + \frac{1}{R} \left(\frac{K_h}{1 + T_h p} (-\dot{\theta}_s) - J_B \cdot p \cdot \dot{\theta}_s \right) \right] \cdot \frac{K_s}{p} = \dot{\theta}_s$$

$$\frac{\dot{\theta}_s(p)}{F_{ext}(p)} = \frac{K_s / p}{1 + \frac{K_s}{Rp} \left(\frac{K_h}{1 + T_h p} + J_B p \right)}$$

$$\frac{\dot{\theta}_s(p)}{F_{ext}(p)} = \frac{\frac{R}{K_h} (1 + T_h \cdot p)}{p(1 + T_h \cdot p) \left(\frac{R}{K_s K_h} + \frac{J_B}{K_h} \right) + 1}$$

Selon les valeurs relatives de la constante de temps du numérateur et la pulsation propre du dénominateur, on a deux types de diagrammes de Bode (trait continu si $\frac{1}{T_h} < \omega_0$ et trait pointillé si $\frac{1}{T_h} > \omega_0$) :



Pour que le système ne soit pas influencé par la « perturbation » F_{ext} , le gain statique doit être le plus faible possible. Comme il n'est pas possible de l'annuler, le système est modifié en ajoutant un moteur à courant continu pour commander la vanne de régulation.

Q34) Préciser quelle doit être la limite en régime permanent de la sortie $\dot{\theta}_s(t)$ pour cette entrée pour que le comportement de l'Haldex soit satisfaisant. Proposer une fonction de transfert pour le correcteur $C(p)$ qui satisfasse cette exigence. Valider la fonction de transfert proposée en effectuant le calcul de la limite.

$\dot{\theta}_s(t)$ doit tendre vers 0 en régime permanent. Pour cela, il faut augmenter la classe de la boucle de retour.

On propose de prendre comme correcteur $C(p) = \frac{K}{p}$. On remplace dans le résultat précédent K_h par $\frac{K_h^* \cdot K}{p}$.

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\theta}_s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \dot{\theta}_s(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{R(1+T_h \cdot p)}{p(1+T_h \cdot p) \left(\frac{R}{K_s} + J_B \right) + \frac{K_h^* \cdot K}{p}} \cdot F_{ext}(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\theta}_s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{Rp(1+T_h \cdot p) \cdot F_0}{p^2(1+T_h \cdot p) \left(\frac{R}{K_s} + J_B \right) + K_h^* \cdot K} = 0$$

Un correcteur intégrateur pur annule bien la perturbation F_{ext} .

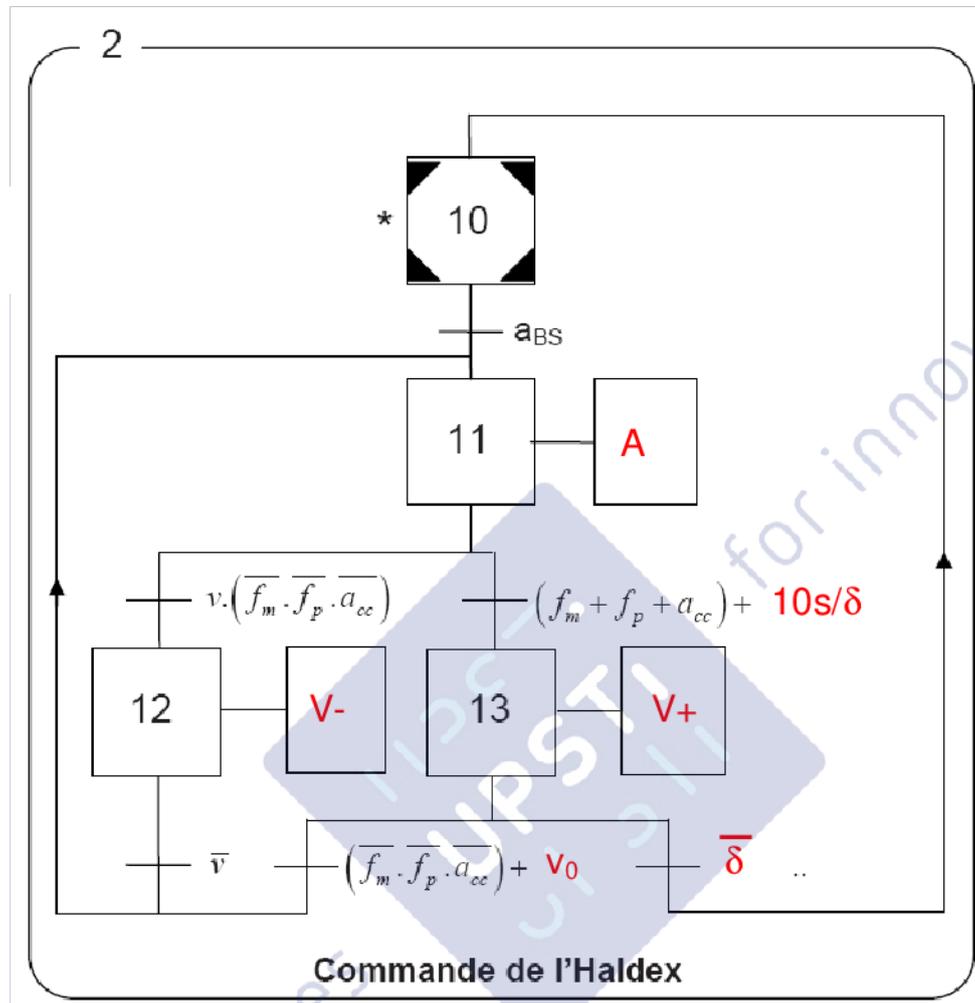
Cependant un correcteur intégral pur rend la FTBO de classe 2. La phase est alors toujours inférieure à -180° . Le système est instable. On ne peut donc pas annuler totalement l'effet de la perturbation. Une solution pour limiter cet effet est d'utiliser un correcteur intégral de type « premier ordre » (i.e. de la forme $C(p) = \frac{K}{1+T_i p}$ avec $T_i \gg 1$). A la vue du diagramme de Black de la figure 21, on obtient bien un tracé correspondant à ce type de correcteur avec $T_i \approx \frac{1}{0.22} * \tan(-78^\circ - 90^\circ) \approx 21s$ (en calculant le déphasage d'un premier ordre).

Q35) Mesurer sur la figure 21 la marge de phase M_ϕ de ce système. Justifier l'absence du critère de marge de phase minimum dans le cahier des charges de l'Haldex.

La marge de phase est d'environ $M_\phi = 12^\circ$.

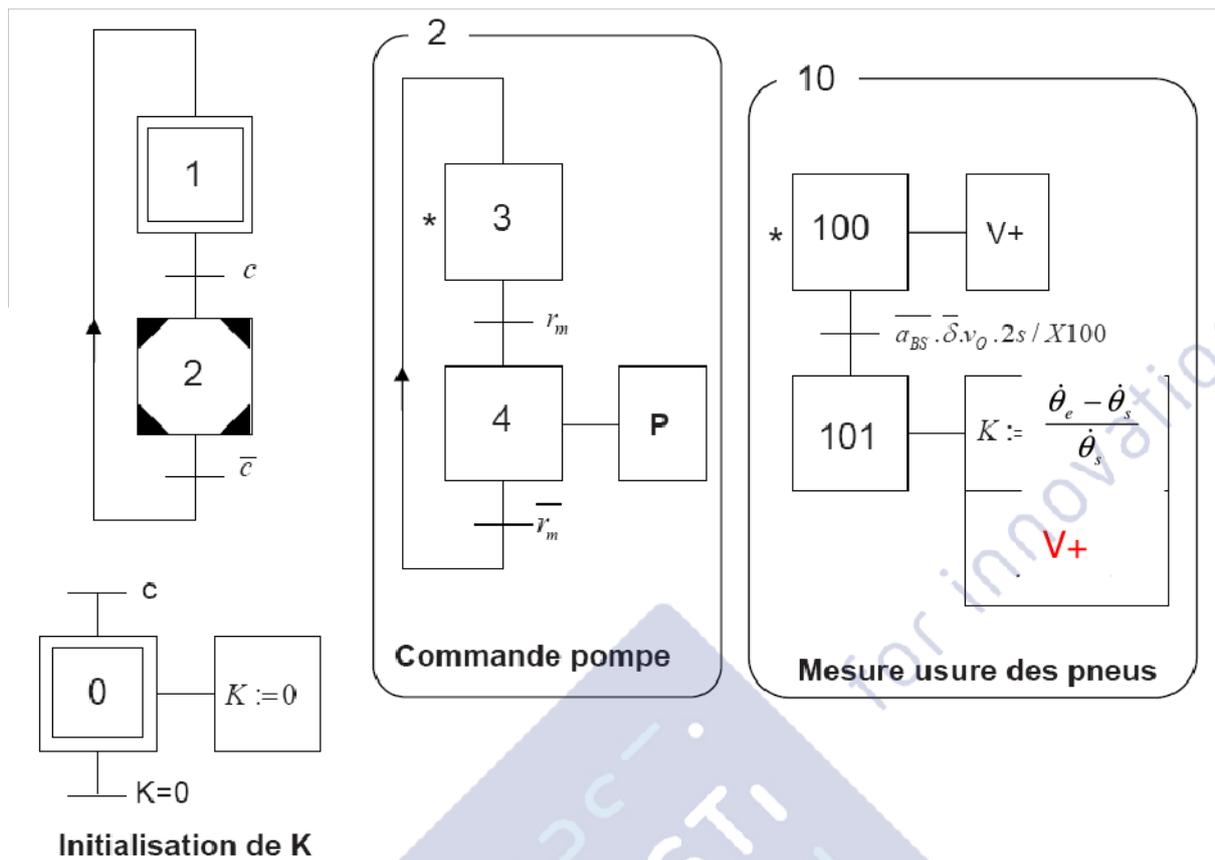
Le critère sur la marge de phase n'est pas dans le cahier des charge car, vis-à-vis de l'entrée $\dot{\theta}_e(t)$, le système fonctionnera en statique (ou quasi-statique). Les pulsations de sollicitation du système sont donc basses.

Q36) Compléter le grafcet « Commande de l'Haldex ».



Q37) Justifier les conditions à vérifier pour la mesure de K et compléter le grafcet « Mesure usure des pneus ».

Pour déterminer K , il ne faut pas que les roues glissent sur la route. On ne doit donc pas avoir $a_{BS} = 1$. La demande de mesure de K s'effectue au démarrage ($c=1$) et lorsque les deux différentiels ne tournent pas à la même vitesse ($\delta=0$).



Q38) Proposer une modification du schéma bloc donné figure 20 faisant apparaître la prise en compte de la variable K dans l'asservissement.

