

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2010

Filière : MP

Épreuve : Physique et Sciences de l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

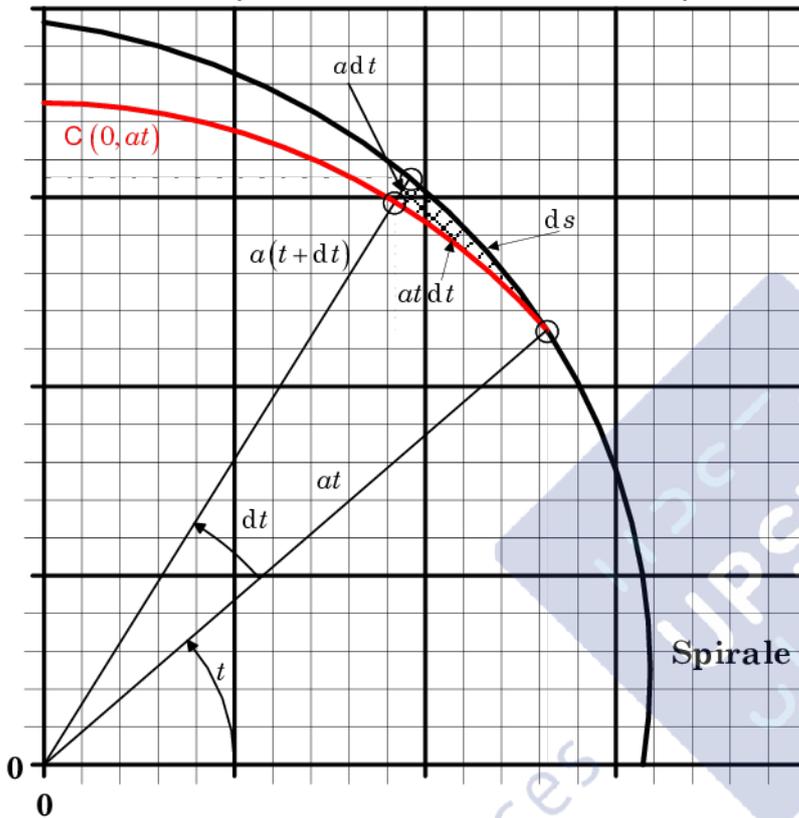
L'équipe UPSTI

Lecteurs optiques numériques

Partie I

1. $r(\theta) = a\theta$. Cela m'a semblé plus facile d'utiliser la forme linéaire plutôt que la forme affine proposée par l'énoncé.

$$\left. \begin{array}{l} r(0) = 0 \\ r(2\pi) = a2\pi = p \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{p}{2\pi}} \text{ et } \left. \begin{array}{l} r(\theta_0) = a\theta_0 = r_0 \\ r(\theta_1) = a\theta_1 = r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\theta_i = \frac{r_i}{a} = \frac{2\pi r_i}{p}}. \quad [1]$$



Les côtés du triangle curvilignes sont « petits » :

$$ds = \sqrt{a^2 dt^2 + a^2 t^2 dt^2} = a\sqrt{1+t^2} dt,$$

$$s(\theta) = a \int_0^\theta \sqrt{1+t^2} dt ;$$

$$L = s(\theta_1) - s(\theta_0) = \boxed{a \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{1+t^2} dt = L} ;$$

on pose : $t = \text{sh} x \Rightarrow dt = \text{ch} x dx$, avec $\text{ch}^2 x = 1 + \text{sh}^2 x$:

$$L = a \int_{x_0}^{x_1} \text{ch}^2 x dx, \text{ avec}$$

$$\text{ch}^2 x = \frac{1 + \text{ch} 2x}{2} \text{ et } \text{sh} 2x = 2 \text{sh} x \text{ch} x$$

$$L = \frac{a}{2} \left[\int_{x_0}^{x_1} dx + \int_{x_0}^{x_1} \text{ch} 2x dx \right]$$

$$L = \frac{a}{2} \left[x + \frac{\text{sh} 2x}{2} \right]_{x_0}^{x_1} = \frac{a}{2} \left[x + \text{sh} x \text{ch} x \right]_{x_0}^{x_1}$$

Soit, en revenant à t :

$$L = \frac{a}{2} \left[\text{sh}^{-1} t + t\sqrt{1+t^2} \right]_{\theta_0}^{\theta_1} \text{ et comme } \text{sh}^{-1} t = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \text{ on a finalement :}$$

$$L = \frac{a}{2} \left[\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2} \right]_{\theta_0}^{\theta_1} \quad [2]$$

$$L = \frac{a}{2} \left[\ln \frac{\theta_1 + \sqrt{1+\theta_1^2}}{\theta_0 + \sqrt{1+\theta_0^2}} + \theta_1 \sqrt{1+\theta_1^2} - \theta_0 \sqrt{1+\theta_0^2} \right]$$

$$L = \frac{p}{4\pi} \left[\frac{4r_1\pi}{p^2} \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + r_1^2} - \frac{4r_0\pi}{p^2} \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + r_0^2} + \ln \frac{r_1 + \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + r_1^2}}{r_0 + \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} + r_0^2}} \right] \quad [3]$$

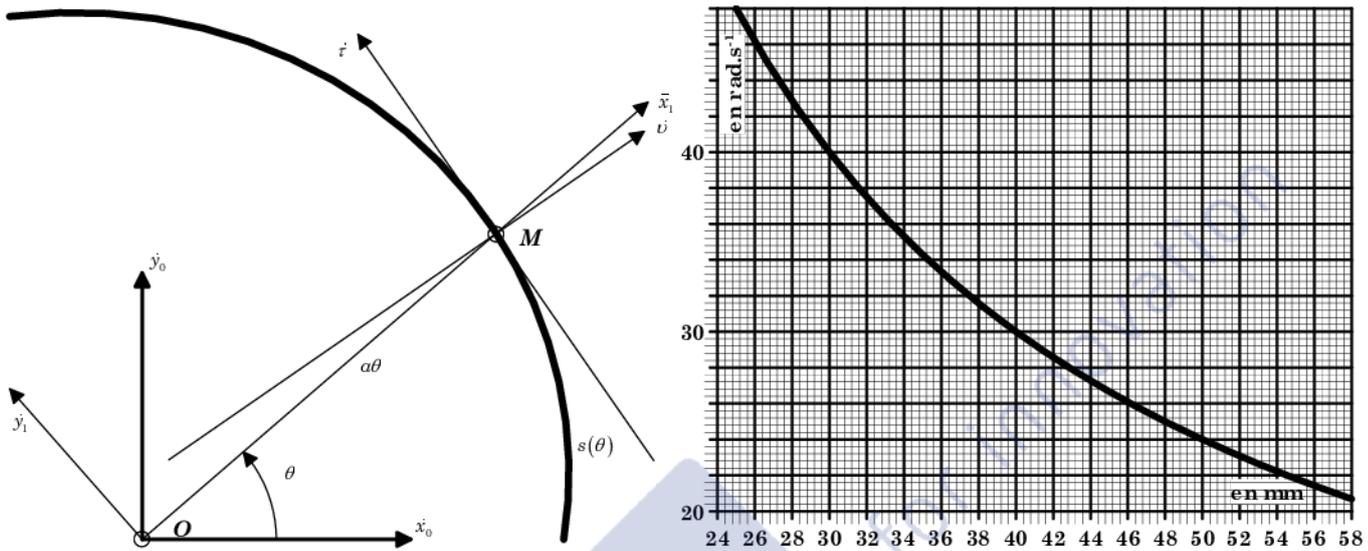
$$L \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{4\pi} \left[\frac{4 \times 58\pi}{1,6^2 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{1,6^2 \cdot 10^{-6}}{4\pi^2} + 58^2} - \frac{4 \times 25\pi}{1,6^2 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{1,6^2 \cdot 10^{-6}}{4\pi^2} + 25^2} + \ln \frac{58 + \sqrt{\frac{1,6^2 \cdot 10^{-6}}{4\pi^2} + 58^2}}{25 + \sqrt{\frac{1,6^2 \cdot 10^{-6}}{4\pi^2} + 25^2}} \right]$$

$$\boxed{L \approx 5,4 \text{ km}}$$

[4]

2. $\frac{ds}{dt} = V = C^{ste} \Rightarrow L = \int_0^L ds = \int_0^T V dt = VT \Rightarrow \boxed{T = \frac{L}{V} = \frac{5\,378\,10^3}{1\,200} = 4\,482\text{ s} \approx T \approx 74\text{ min}}$.

3. $\vec{V}(M/0) = \left. \frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_0 = \left. \frac{d a \theta \vec{x}_1}{dt} \right)_0 = a \dot{\theta} \vec{x}_1 + a \theta \dot{\theta} \vec{y}_1$



$V^2(M/0) = V^2 = a^2 \dot{\theta}^2 (1 + \theta^2) = a^2 \omega_{10}^2 (1 + \theta^2) \Rightarrow \omega_{10}(\theta) = \frac{V}{a\sqrt{1 + \theta^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_{10}(r) = \frac{V}{\sqrt{a^2 + r^2}}}$ [5]

$\omega_{10}(r_i) = \frac{V}{\sqrt{a^2 + r_i^2}}$

$\omega_{10}(r_0) \approx \frac{1200}{\sqrt{\frac{0,001\,6^2}{4\pi^2} + 25^2}} \approx \boxed{48\text{ rad.s}^{-1} \approx \omega_{10}(r_0) \approx 460\text{ tr.min}^{-1}}$ [6]

$\omega_{10}(r_1) \approx \frac{1200}{\sqrt{\frac{0,001\,6^2}{4\pi^2} + 58^2}} \approx \boxed{21\text{ rad.s}^{-1} \approx \omega_{10}(r_1) \approx 200\text{ tr.min}^{-1}}$ [7]

4.

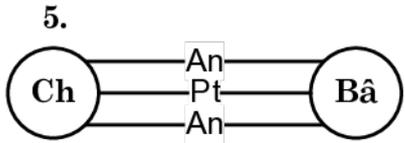
• $\vec{V}(M/0) \cdot \vec{x}_1 = a \dot{\theta}$ avec Erreur ! Source du renvoi introuvable.

$\dot{V}(M/0) \cdot \vec{x}_1 = \frac{aV}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \dot{u}(r) \Leftrightarrow \dot{u}(\theta) = \frac{V}{\sqrt{1 + \theta^2}}$ [8]

$\dot{u}(\theta_i) = \frac{V}{\sqrt{1 + \theta_i^2}}$

$\dot{u}(r_0) \approx \frac{1200}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi \times 25}{1,6 \cdot 10^{-3}}\right)^2}} \approx \boxed{12\ \mu\text{m.s}^{-1} \approx \dot{u}(r_0)}$ [9]

$\dot{u}(r_1) \approx \frac{1200}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi \times 58}{1,6 \cdot 10^{-3}}\right)^2}} \approx \boxed{5\ \mu\text{m.s}^{-1} \approx \dot{u}(r_1)}$ [10]



- Les liaisons en A et B sont des annulaires ; d'après la Figure 5 et d'après leur torseur cinématique.
- La liaison en C est une ponctuelle ; pour les mêmes raisons.

- 6.
- Le seul mouvement possible entre ces deux solides – en respectant ces trois liaisons en parallèle – est une translation. La liaison équivalente est donc une glissière. Résultat conforme à la Figure 6 de l'énoncé !!!

- $\mathbf{V} (Ch/Bâ) : \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{u}\vec{x} \end{Bmatrix}$; en tout point. Évidence à écrire, car le mouvement résiduel est une translation le long de x .

- 7.
- $m_{th} = E_S - I_S = 6(s-1) - \sum_{i=1}^3 i_s = 6(2-1) - 2 \times \underset{An}{2} - 1 \times \underset{Pt}{1} = 6 - 5 = 1$;
 - $m = 1$; mouvement de la glissière !
- $h = m - m_{th} = 1 - 1 = \boxed{0 = h}$; [11]

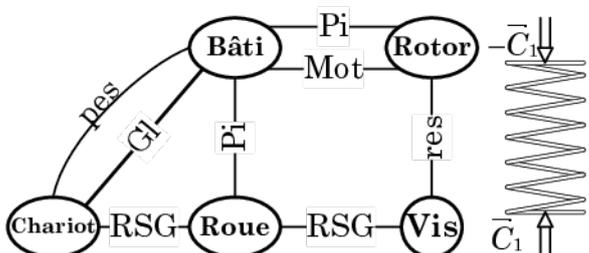
Commentaire : comme le chariot est guidé a minima par le bâti (construction isostatique), il faudra veiller à la « grande » rigidité du chariot afin qu'il « ne se déforme pas » lors des phases transitoires de son mouvement par rapport au bâti.

Remarque : Vouloir commenter physiquement le choix du constructeur i) à la seule lecture du schéma de la Figure 5 – évidemment réducteur, puisqu'il représente un (parmi d'autres) modèle des liaisons « réelles » – et ii) à la seule connaissance du cours préalable subit par les concurrents, sans montrer la réalisation pratique, sans insister sur les performances souhaitées, sans véritablement connaître les caractéristiques physique du système : masse, raideur, incidence de la pesanteur (chariot horizontal, vertical ou quelconque...) me semble relever de la haute voltige.

- Cette question ne me semble demander à l'élève de régurgiter quelques formules, quelques sentences sans aucune réflexion sur ce qui est recherché et sur les problèmes du guidage.
- Cette question aurait pu être posée en fin de parcours – afin que le candidat ait eu le temps d'assimiler les ordres de grandeur du problème – de manière à lui faire faire une synthèse intelligente, réfléchiée et argumentée de l'intérêt – pour résoudre au mieux ce problème spécifique – de se rapprocher d'une solution isostatique.
- En résumé : à bas le bachotage et les réponses toutes faites !!!

8. Loi classique du ressort de torsion : $\boxed{C_1 = -K_t(\theta_m - \theta_1)}$ [12]

9. O est un point de l'axe de révolution de l'axe \vec{z} vertical du rotor.



• $\vec{\delta}(O, Ro/Bâ) \cdot \vec{z} = \overline{M}(O, Bâ \xrightarrow{Pi} Ro) \cdot \vec{z} + \overline{M}(O, Bâ \xrightarrow{Mot} Ro) \cdot \vec{z} + \overline{M}(O, Bâ \xrightarrow{pes} Ro) \cdot \vec{z} + \overline{M}(O, Vis \xrightarrow{res} Ro) \cdot \vec{z}$

- $\overline{M}(O, \text{B}\hat{\text{a}} \xrightarrow{\text{Mot}} \text{Ro}) \cdot \vec{z} = C_m$;
 - $\overline{M}(O, \text{Vi} \xrightarrow{\text{res}} \text{Ro}) \cdot \vec{z} = -C_1 = K_t (\theta_m - \theta_1)$
 - $\vec{\delta}(O, \text{Ro}/\text{B}\hat{\text{a}}) \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O, \text{Ro}/\text{B}\hat{\text{a}})_0 \cdot \vec{z} = \frac{d \vec{\sigma}(O, \text{Ro}/\text{B}\hat{\text{a}}) \cdot \vec{z}}{dt} = \frac{d I(O, \text{Ro}) \overline{\Omega}(\text{Ro}/0) \cdot \vec{z}}{dt} = I_m \ddot{\theta}_m$
- $$I_m \ddot{\theta}_m = C_m + K_t (\theta_m - \theta_1) \Rightarrow \boxed{I_m \ddot{\theta}_m - K_t \theta_m = C_m - K_t \theta_1}$$
- [13]

10. \dot{x} est l'axe de déplacement horizontal du chariot.

- $\overline{A}(G_{\text{chariot}}/\text{B}\hat{\text{a}}) \cdot \vec{x} = \overline{R}(\text{B}\hat{\text{a}} \xrightarrow{\text{Gl}} \text{Ch}) \cdot \vec{x} + \overline{R}(\text{Roue} \xrightarrow{\text{RSG}} \text{Ch}) \cdot \dot{x} + \overline{R}(\text{B}\hat{\text{a}} \xrightarrow{\text{pes}} \text{Ch}) \cdot \vec{x}$
 - $\overline{R}(\text{Roue} \xrightarrow{\text{RSG}} \text{Ch}) \cdot \vec{x} = F_p$
 - $\overline{A}(G_{\text{chariot}}/\text{B}\hat{\text{a}}) \cdot \vec{x} = M\ddot{u}$
- $$\boxed{M\ddot{u} = F_p}$$
- [14]

11.

- $I_m \ddot{\theta}_m - K_t \theta_m = C_m - K_t \theta_1$;
 - $u = K_e \theta_1$;
 - $I_m \ddot{\theta}_m - K_t \theta_m = C_m - \frac{K_t u}{K_e}$
 - $M\ddot{u} = F_p = \frac{C_1}{K_e} = \frac{-K_t (\theta_m - \theta_1)}{K_e} = \frac{-K_t \theta_m}{K_e} + \frac{K_t \theta_1}{K_e} = \frac{-K_t \theta_m}{K_e} + \frac{K_t u}{K_e^2}$
- $C_1 = K_e F_p$ et $C_1 = -K_t (\theta_m - \theta_1)$;
 - $M\ddot{u} = F_p$.

D'où le système :

$$\boxed{\begin{matrix} I_m \ddot{\theta}_m + 0\ddot{u} - K_t \theta_m + \frac{K_t}{K_e} u = C_m \\ 0\ddot{\theta}_m + M\ddot{u} + \frac{K_t}{K_e} \theta_m - \frac{K_t}{K_e^2} u = 0 \end{matrix}}$$
 [15]

12.

$$\boxed{\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_m \\ \ddot{u} \end{pmatrix} - \frac{K_t}{K_e} \begin{pmatrix} K_e & -1 \\ -1 & 1/K_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_m \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_m \\ 0 \end{pmatrix}} ; \text{C.Q.F.D.}$$
 [16]

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0,125 \cdot 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0,5 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_m \\ \ddot{u} \end{pmatrix} - \frac{0,785}{4 \cdot 10^{-5}} \begin{pmatrix} 4 \cdot 10^{-5} & -1 \\ -1 & 1/4 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_m \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_m \\ 0 \end{pmatrix}}$$
 [17]

13. Système classique du deuxième ordre dont le coefficient d'amortissement est nul. On

impose des solutions : $\mathbf{X} : \begin{pmatrix} a_\theta \exp i\omega t \\ a_u \exp i\omega t \end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{\mathbf{X}} : \begin{pmatrix} -a_\theta \omega^2 \exp i\omega t \\ -a_u \omega^2 \exp i\omega t \end{pmatrix}$, avec $\mathbf{F} = 0$ et $\omega \in \mathbb{R}^+$

$$-\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \omega^2 \exp i\omega t \begin{pmatrix} a_\theta \\ a_u \end{pmatrix} - \frac{K_t}{K_e} \exp i\omega t \begin{pmatrix} K_e & -1 \\ -1 & 1/K_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\theta \\ a_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ car } \exp i\omega t \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} I_m \omega^2 + K_t & -1 \\ -1 & M \omega^2 + \frac{K_t}{K_e^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\theta \\ a_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ ce système homogène n'a de solutions non toutes nulles}$$

que si son déterminant est nul, d'où :

$$\begin{vmatrix} I_m \omega^2 + K_t & -1 \\ -1 & M \omega^2 + \frac{K_t}{K_e^2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (I_m \omega^2 + K_t) \left(M \omega^2 + \frac{K_t}{K_e^2} \right) - 1 = 0$$

$$I_m M \omega^4 + \left(I_m \frac{K_t}{K_e^2} + M K_t \right) \omega^2 + \left(\frac{K_t}{K_e} \right)^2 - 1 = 0 ; \quad [18]$$

Cette équation, dite équation caractéristique, admet quatre solutions purement imaginaire, conjuguées deux à deux : $\pm i \omega_{01}$ et $\pm i \omega_{02}$. Car les deux solutions ω_{0i}^2 sont négatives. En effet les racines de $X^2 - SX + P = 0$ sont négatives si i) leur produit est positif, si ii) leur somme est négative ($-S$ et P sont deux valeurs positives !) et si iii) les racines sont réelles, c'est-à-dire si la différence $b^2 - 4ac$ est positive. Ce qui est le cas, car $K_t > K_e$.

$$\omega_{0i}^2 = \frac{-I_m \frac{K_t}{K_e^2} - M K_t \pm \sqrt{\left(I_m \frac{K_t}{K_e^2} + M K_t \right)^2 + 4 I_m M \left(\frac{K_t^2 - K_e^2}{K_e^2} \right)}}{2 I_m M}$$

$$\omega_{0i}^2 = \frac{-K_t (I_m + M K_e^2) \pm \sqrt{K_t^2 (I_m + M K_e^2)^2 + 4 I_m M K_e^2 (K_t^2 - K_e^2)}}{2 I_m M K_e^2} = \frac{-K_t A \pm \sqrt{K_t^2 A^2 + 4 B (K_t^2 - K_e^2)}}{2 B}$$

$$\omega_{0i} = \sqrt{\frac{-K_t (I_m + M K_e^2) \pm \sqrt{K_t^2 (I_m + M K_e^2)^2 + 4 I_m M K_e^2 (K_t^2 - K_e^2)}}{2 I_m M K_e^2}} \quad [19]$$

A.N. :

- $A = I_m + M K_e^2 \simeq 0,125 \cdot 10^{-9} + 0,5 \cdot 10^{-3} \times 16 \cdot 10^{-10} \simeq 8 \cdot 10^{-13} \simeq A$

- $B = I_m M K_e^2 \simeq 0,125 \cdot 10^{-9} \times 0,5 \cdot 10^{-3} \times 16 \cdot 10^{-10} \simeq 10^{-22} \simeq B$

- $\omega_{0i}^2 = \frac{-0,785 \times 8 \cdot 10^{-13} \pm \sqrt{0,785^2 \times 64 \cdot 10^{-26} + 4 \times 10^{-22} (0,785^2 - 16 \cdot 10^{-10})}}{2 \times 10^{-22}}$

$$\omega_{0i}^2 \simeq 0,785 \frac{-8 \cdot 10^{-13} \pm \sqrt{64 \cdot 10^{-26} + 40 \cdot 000 \cdot 10^{-26}}}{2 \times 10^{-22}} \simeq 0,785 \frac{-8 \cdot 10^{-13} \pm 200 \cdot 10^{-13}}{2 \times 10^{-22}}$$

$$\omega_{0i}^2 \simeq (-4 \pm 100) 10^8$$

Soit, en convertissant en Hz :

$$\omega_{01} \simeq 13 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad \omega_{02} \simeq 160 \text{ kHz} \quad [20]$$

14.

- L'indice r ne sera pas utilisé pour alléger car, le mouvement suivant z n'est pas exploité dans cette section et que plus loin dans l'énoncé les deux comportements sont supposés identiques. La lentille est en translation circulaire par rapport au chariot. Ses déplacements sont minimes, d'où : $x = cl$. [21]

- Isolons la lentille en mouvement par rapport au chariot supposé galiléen (sic). Approximation que la question 4 avec ses applications numériques de variation de vitesse du chariot par rapport au carter de l'appareil semble rendre possible. Toutefois l'appareil lui-même doit être posé sur une table et ne pas être suspendu au cou d'une belle cou-

reuse !! Appliquons lui le principe fondamental de la dynamique réduit à ses résultantes projetées sur \vec{x} en lui imposant un mouvement très lent :

Remarque : la lentille est liée au chariot par 4 « pivots » viscoélastiques dont on néglige pour l'instant – pour les besoins de la modélisation – l'aspect dissipatif.

$$\vec{R}(\text{Ch} \xrightarrow{\text{mot}} \text{Len}) \cdot \dot{\vec{x}} + 2\vec{R}(\text{Lame} \xrightarrow{\text{res}} \text{Len}) \cdot \dot{\vec{x}} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f - 2c\alpha = 0 \\ x = \alpha l \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f = \frac{2c}{l} x} \quad [22]$$

15. $\boxed{k = \frac{2c}{l}}$ [23]

16.

- Isolons la lentille en mouvement par rapport au chariot supposé galiléen (sic). Appliquons lui le principe fondamental de la dynamique réduit à ses résultantes projetées sur \vec{x} :

$$\vec{R}(\text{Ch} \xrightarrow{\text{mot}} \text{Len}) \cdot \ddot{\vec{x}} + 2\vec{R}(\text{Lame} \xrightarrow{\text{res}} \text{Len}) \cdot \ddot{\vec{x}} + \vec{R}(\text{Lame} \xrightarrow{\text{amo}} \text{Len}) \cdot \ddot{\vec{x}} = m\vec{A}(G_{\text{len}}/0) \cdot \ddot{\vec{x}}$$

$$f - kx - \mu\dot{x} = m\ddot{x} \quad [24]$$

Supposons scolairement que les conditions initiales soient « nulles » :

$$(mp^2 + \mu p + k)X = F \Rightarrow \boxed{\frac{X}{F} = H = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2}} \quad [25]$$

- Gain statique : $K = \frac{1}{k}$; [26]

- Pulsation propre non amortie : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; [27]

- Coefficient d'amortissement : $z = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\mu}{2k} = \frac{\mu}{2\sqrt{km}}$. [28]

17. $\boxed{f = Bl\dot{i}}$ [29]

18. Le circuit et la donnée de l'énoncé implique :

$$\left. \begin{array}{l} uK_b - e_m = Ri + L \frac{di}{dt} \\ e_m = Bl \frac{dx}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{uK_b - Bl \frac{dx}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt}} \quad [30]$$

19. Supposons scolairement que les conditions initiales soient « nulles » :

$$\left. \begin{array}{l} UK_b - BlpX = (R + Lp)I \\ F = BlI \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{UK_b - BlpX = \frac{R + Lp}{Bl} F} \quad [31]$$

20.] dans donne : $UK_b - BlpX = \frac{R + Lp}{Bl} \frac{X}{H} \Rightarrow UK_b = \left(\frac{B^2 l^2 H p + R + Lp}{BlH} \right) X$

$$\boxed{\frac{X}{U} = \frac{K_b BlH}{(B^2 l^2 H + L)p + R}} \quad [32]$$

21.

$$\frac{X}{U} = \frac{K_b Bl H}{(B^2 l^2 H + \mathcal{L})p + R} = \frac{\frac{K_b Bl}{\cancel{k}} \cancel{1 + \frac{\mu}{k} p + \frac{m}{k} p^2}}{\frac{B^2 l^2 p}{\cancel{k}} + \frac{Rk}{\cancel{k}} \left(1 + \frac{\mu}{k} p + \frac{m}{k} p^2\right)} = \frac{K_b Bl}{B^2 l^2 p + Rk \left(1 + \frac{\mu}{k} p + \frac{m}{k} p^2\right)}$$

$$\frac{X}{U} = \frac{K_b Bl}{B^2 l^2 p + (Rk + \mu R p + R m p^2)} = \frac{K_b Bl}{Rk + (B^2 l^2 + \mu R)p + R m p^2}$$

$$\frac{X}{U} = \frac{\frac{K_b Bl}{Rk}}{1 + \left(\frac{B^2 l^2 + \mu R}{Rk}\right)p + \frac{m}{k} p^2} = \frac{K_b \frac{Bl}{Rk} \frac{m}{m}}{1 + \left(\frac{B^2 l^2}{Rk} + \frac{\mu}{k}\right) \frac{m}{m} p + \frac{m}{k} p^2} = \frac{K_b \frac{Bl}{Rm} \frac{m}{k}}{1 + \left(\frac{B^2 l^2}{Rm} + \frac{\mu}{m}\right) \frac{m}{k} p + \frac{m}{k} p^2} = \frac{X}{U} \quad [33]$$

$$\frac{X}{U} \approx \frac{\frac{1,65 \cdot 10^6 \times 0,673}{9,79 \cdot 10^4}}{1 + \frac{5,87}{9,79 \cdot 10^4} p + \frac{p^2}{9,79 \cdot 10^4}} \quad [34]$$

• Gain statique : $K \approx 11,3$; [35]

• Pulsation propre non amortie : $\omega_0 \approx 10^2 \sqrt{9,79} \approx 313 \text{ rad.s}^{-1} \approx \omega_0$; [36]

• Coefficient d'amortissement : $z \approx \frac{5,87 \times 10^2 \sqrt{9,79}}{2 \times 9,79 \cdot 10^4} \approx 0,01 \approx z$. [37]

• Coefficient de surtension : $Q = \frac{1}{z\sqrt{1-z^2}} \approx \frac{1}{0,01\sqrt{1-?}} \approx 100 \approx Q$ [38]

• Pulsation de résonance en amplitude : $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1-2z^2} \approx \omega_0 \approx 313 \text{ rad.s}^{-1} \approx \omega_2$ [39]

La stabilité théorique est assurée : système du deuxième ordre dont tous les coefficients sont positifs (critère de Routh). Toutefois le fort coefficient de surtension pour des pulsations proche de 300 rad.s⁻¹ invite à éviter ce voisinage. Les résultats numériques ci-dessus supposent que le chariot soit galiléen ; donc on ne peut corrélérer ces valeurs avec les pulsations propres dues à la torsion de l'arbre moteur étudiées dans la partie I.3 – qui évidemment excite théoriquement le chariot de façon non galiléenne (Il faudrait toutefois estimer l'ordre de grandeur du torseur dynamique du chariot dans ce cas. Ce qui ne semble pas être une piste suggérée par l'énoncé, au demeurant très directif) –, ce qui est gênant pour faire une synthèse physique de ce double déplacement en série.

22.

• $\frac{Y}{X} = \frac{1}{1+H}$ [40]

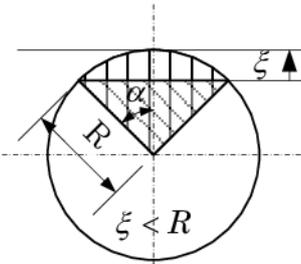
• $E = X - Y$ [41]

Interprétation de l'énoncé : « Donner le critère de stabilité au programme. »

- Une fonction de transfert est stable (au sens : « entrée bornée - sortie bornée ») si : i) la partie réelle de tous ses pôles est strictement négative et si ii) le pôle nul éventuel est au plus d'ordre 1.

23. $\Lambda\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$ correspond à l'aire en blanc de α^- sur la Figure 12 de l'énoncé.

Cette aire correspond à la différence entre un secteur angulaire S et un triangle T . $\Delta\alpha = S - T$ lorsque $\xi \leq R$.

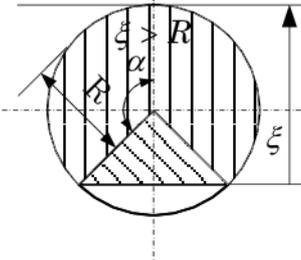


- L'angle du demi-secteur vaut : $\alpha = \arccos \frac{R - \xi}{R}$;

- La demi-corde vaut : $\sqrt{R^2 - (R - \xi)^2} = \sqrt{2\xi R - \xi^2}$,

- $\Delta\alpha(\xi) = R^2 \arccos \frac{R - \xi}{R} - (R - \xi)\sqrt{2\xi R - \xi^2}$; $\xi \in [0, R]$ [1]

Cette aire correspond à la somme d'un secteur angulaire S et d'un triangle T . $\Delta\alpha = S + T$ lorsque $\xi \geq R$.



- L'angle du demi-secteur vaut : $\alpha = \arccos \frac{R - \xi}{R}$;

- La demi-corde vaut : $\sqrt{R^2 - (\xi - R)^2} = \sqrt{2\xi R - \xi^2}$,

- $\Delta\alpha(\xi) = R^2 \arccos \frac{R - \xi}{R} + (\xi - R)\sqrt{2\xi R - \xi^2}$; $\xi \in [R, 2R]$ [2]

- Donc la même relation est valable pour les deux cas

$$\Delta\alpha(\xi) = R^2 \arccos \frac{R - \xi}{R} - (R - \xi)\sqrt{2\xi R - \xi^2} ; \xi \in [0, 2R] \quad [3]$$

1. Première solution

$$\frac{d\Delta\alpha}{d\xi} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{(R - \xi)^2}{R^2}}} - \frac{(R - \xi)(2R - 2\xi)}{2\sqrt{2\xi R - \xi^2}} + \sqrt{2\xi R - \xi^2}$$

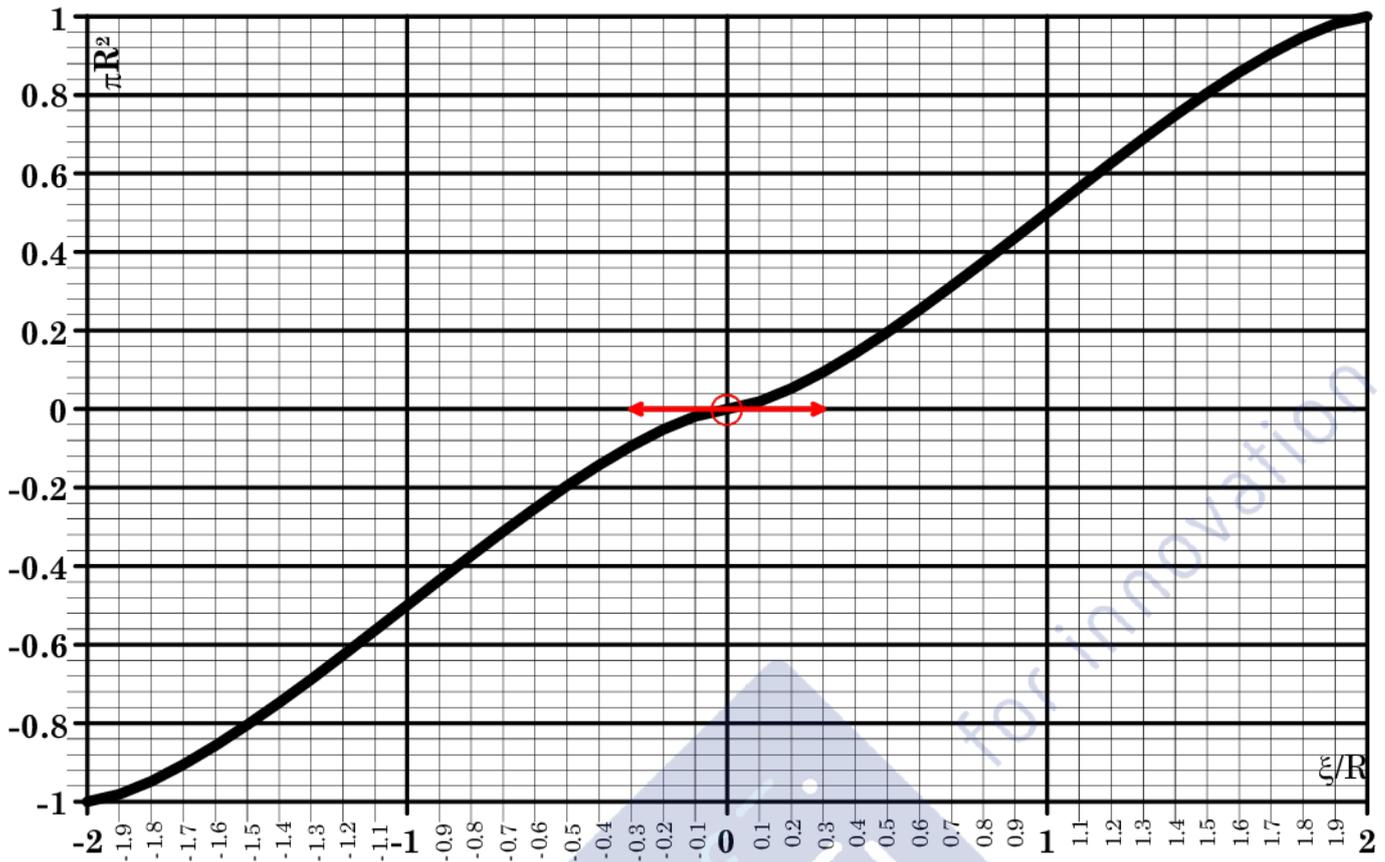
$$\frac{d\Delta\alpha}{d\xi} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - (R - \xi)^2}} - \frac{(R - \xi)^2 (2R - 2\xi)}{\cancel{2}\sqrt{2\xi R - \xi^2}} + \frac{2\xi R - \xi^2}{\sqrt{2\xi R - \xi^2}} = \frac{2(2R - \xi)\xi}{\sqrt{(2R - \xi)\xi}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{d\Delta\alpha}{d\xi} \sim \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2}} = 0$$

La linéarisation $\frac{d\Delta\alpha}{d\xi} \approx 0\xi$ est peu « satisfaisante » – bien qu'existante – pour résoudre notre problème d'asservissement ! Donc, « on ne peut pas » linéariser cette relation.

2. Seconde solution

Interprétation de l'énoncé : $\xi \ll R$; d'où : $\frac{\xi}{R} \ll 1$.



$$\Delta\alpha(\xi) = R^2 \left(\arccos\left(1 - \frac{\xi}{R}\right) - \left(1 - \frac{\xi}{R}\right) \sqrt{2\frac{\xi}{R} - \left(\frac{\xi}{R}\right)^2} \right) = R^2 \left(\arccos(1 - \varepsilon) - (1 - \varepsilon) \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} \right); \text{ avec}$$

$\varepsilon \ll 1$ on a :

$$\Delta\alpha(\varepsilon) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \varepsilon^{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{5} \varepsilon^{5/2} - \frac{\sqrt{2}}{56} \varepsilon^{7/2} + O(\varepsilon)^{9/2} \quad [4]$$

Même conclusion.

$$24. H_1 \approx \frac{5}{20 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{4} = \boxed{250 \cdot 10^3 = H_1}, \text{ à la lecture de la Figure 13.} \quad [5]$$

$$25. H_2 = \frac{1 + k\tau p}{1 + \frac{\tau p}{k}}; \text{ système du premier ordre généralisé avec deux pulsations de cassure :}$$

$\frac{1}{k\tau}$ et $\frac{k}{\tau}$. On suppose que k et τ soient des réels positifs.

$$H_2 = \frac{1 + k\tau p}{1 + \frac{\tau p}{k}} \begin{cases} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{gain} = 20 \log_{10} 1 = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{arg} = \text{arg} 1 = 0 \end{cases} \\ \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k}{k} = k^2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{gain} = 20 \log_{10} k^2 (> 0 \text{ si } k > 1 \text{ et } < 0 \text{ si } k < 1) \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{arg} = \text{arg } k^2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\bullet |H_2(i\omega)| = \sqrt{\frac{1 + k^2 \tau^2 \omega^2}{1 + \frac{\tau^2 \omega^2}{k^2}}}$$

$$\circ \frac{d|H_2(i\omega)|}{d\omega} = \frac{1}{\cancel{Z}} \frac{\frac{\cancel{Z}k^2\tau^2\omega\left(1+\frac{\tau^2\omega^2}{k^2}\right) - \frac{\cancel{Z}\tau^2\omega(1+k^2\tau^2\omega^2)}{k^2}}{\left(1+\frac{\tau^2\omega^2}{k^2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1+k^2\tau^2\omega^2}{1+\frac{\tau^2\omega^2}{k^2}}}} = \frac{k^2\tau^2\omega\left(\frac{k^2+\tau^2\omega^2}{k^2}\right) - \frac{\tau^2\omega(1+k^2\tau^2\omega^2)}{k^2}}{\left(1+\frac{\tau^2\omega^2}{k^2}\right)^{\frac{4}{2}} \sqrt{1+k^2\tau^2\omega^2} \left(1+\frac{\tau^2\omega^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\omega \frac{k^2\tau^2(k^2+\tau^2\omega^2) - \tau^2(1+k^2\tau^2\omega^2)}{k^2\left(1+\frac{\tau^2\omega^2}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+k^2\tau^2\omega^2}} = \boxed{\omega \frac{\tau^2(k^4-1)}{k^2\left(1+\frac{\tau^2\omega^2}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+k^2\tau^2\omega^2}} = \frac{d|H_2(i\omega)|}{d\omega}} \quad [6]$$

La dérivée du module s'annule lorsque la pulsation tend vers zéro et vers l'infini et éventuellement lorsque $k=1$; option qui n'a aucun intérêt physique puisque la fonction de transfert est réduite à 1 !! Le signe de la dérivée dépend de la position de k par rapport à 1 : la croissance du gain aussi.

- $\arg H_2 = \arg \frac{1+ik\tau\omega}{1+\frac{i\tau\omega}{k}}$: le numérateur et le dénominateur de cette fonction analytique

sont dans le premier quadrant (on suppose que la pulsation ω soit positive). On peut donc utiliser sans état d'âme l'arctan :

$$\circ \arg H_2 = \arctan k\tau\omega - \arctan \frac{\tau\omega}{k}$$

$$\circ \frac{d\arg H_2}{d\omega} = \frac{k\tau}{1+k^2\tau^2\omega^2} - \frac{\frac{\tau}{k}k^2}{k^2+\tau^2\omega^2} = k\tau \frac{k^2+\tau^2\omega^2-1-k^2\tau^2\omega^2}{(1+k^2\tau^2\omega^2)(k^2+\tau^2\omega^2)} = \frac{\tau^2\omega^2(1-k^2)-(1-k^2)}{(1+k^2\tau^2\omega^2)(k^2+\tau^2\omega^2)}$$

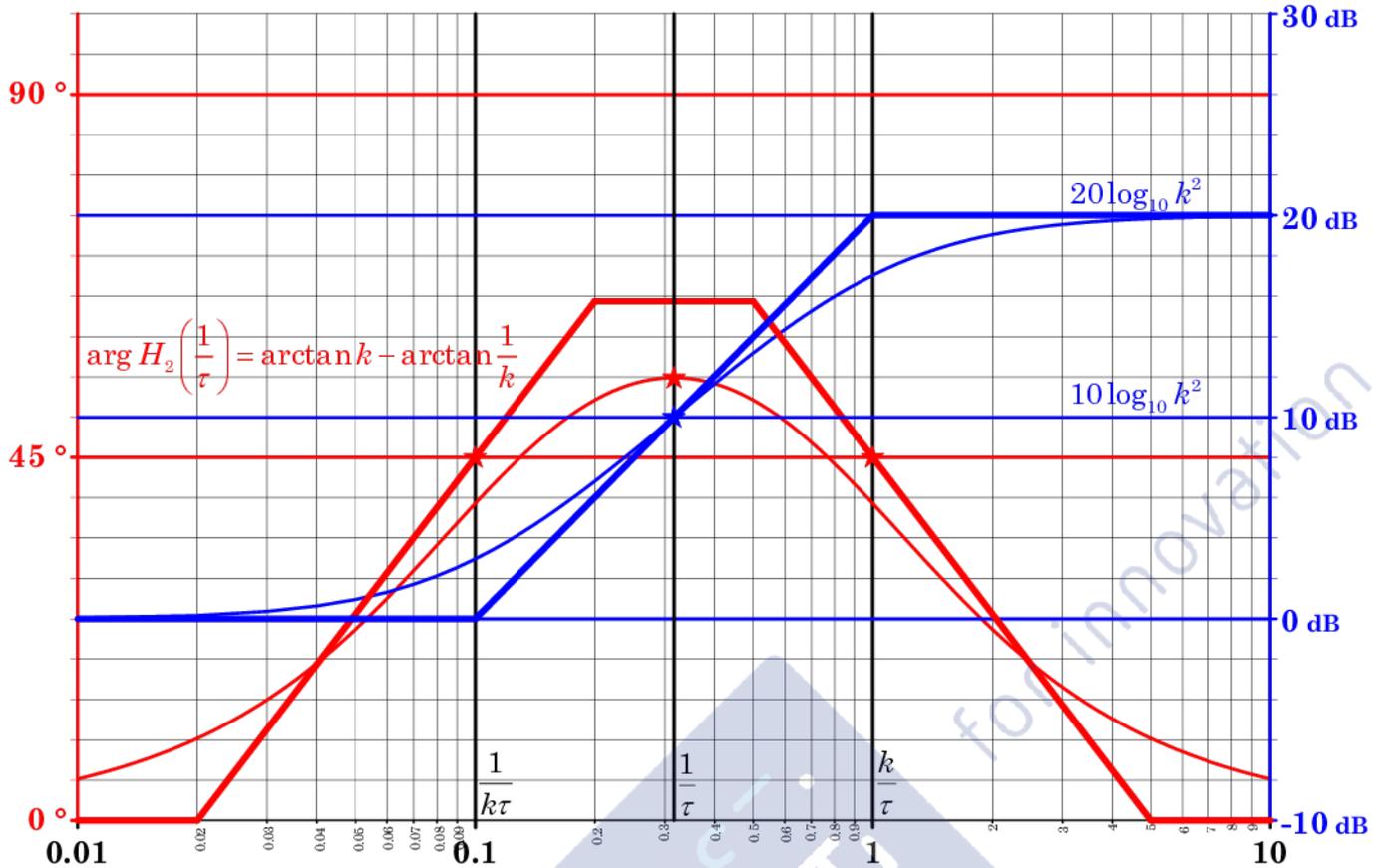
$$\frac{d\arg H_2}{d\omega} = 0, \text{ lorsque ; } \tau^2\omega^2 = 1, \text{ ie lorsque : } \boxed{\omega_{\text{extr}} = \frac{1}{\tau}}. \quad [7]$$

Pour cette pulsation, l'argument de l'extremum vaut :

$$\boxed{\arg H_2\left(\frac{1}{\tau}\right) = \arctan k - \arctan \frac{1}{k}} \quad [8]$$

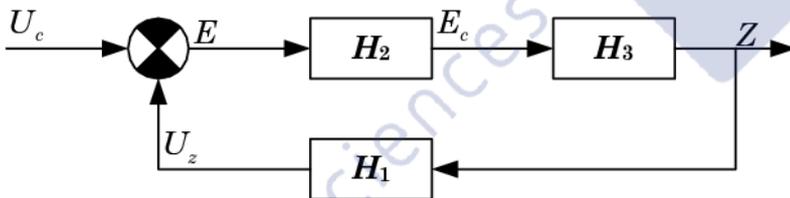
Tout ceci est bien connu de l'empepien lambda.

1. Fonction de transfert d'un système à avance ou à retard de phase suivant la valeur du paramètre k par rapport à 1 :
 - a. $k > 1$: le numérateur est dominant, avance de phase et augmentation du gain lorsque $\omega \rightarrow \infty$;
 - b. $k < 1$: le dénominateur est dominant, retard de phase et diminution du gain lorsque $\omega \rightarrow \infty$.
2. Argument très symétrique entre les deux pulsations de cassure, d'où la valeur de son extremum est située exactement au milieu de ces deux pulsations. Dans le tracé logarithmique de Bode cela conduit à la moyenne géométrique : $\omega_{\text{extr}} = \sqrt{\frac{1}{k\tau} \frac{k}{\tau}} = \frac{1}{\tau}$



26. Interprétation de l'énoncé : « par **identification** avec la partie I.4... »

$$H_3 \approx \frac{1,65 \cdot 10^6 \times 0,673}{9,79 \cdot 10^4} \approx \frac{11,3}{1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2} \approx H_3$$



$$H_F = \frac{H_2 H_3}{1 + H_1 H_2 H_3} = \frac{\frac{1 + k\tau p}{1 + \frac{\tau}{k} p} \cdot \frac{11,3}{1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2}}{1 + 250 \cdot 10^3 \frac{1 + k\tau p}{1 + \frac{\tau}{k} p} \cdot \frac{11,3}{1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2}}$$

$$H_F \approx \frac{11,3(1 + k\tau p)}{\left(1 + \frac{\tau}{k} p\right) \left(1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2\right) + 11,3 \times 250 \cdot 10^3 (1 + k\tau p)}$$

$$\approx \frac{11,3(1 + k\tau p)}{\left(1 + \frac{\tau}{k} p\right) \left(1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2\right)}$$

$$H_F \simeq \frac{11,3(1+k\tau p)}{1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2 + \frac{\tau}{k} p + \frac{\tau}{k} 6 \cdot 10^{-5} p^2 + \frac{\tau}{k} 10^{-5} p^3 + 283 \cdot 10^4 + 283 \cdot 10^4 k\tau p + \dots}$$

$$H_F \simeq \frac{11,3(1+k\tau p)}{283 \cdot 10^4 + \left(6 \cdot 10^{-5} + \frac{\tau}{k} + 283 \cdot 10^4 k\tau\right) p + \left(1 + 6 \frac{\tau}{k}\right) 10^{-5} p^2 + \frac{\tau}{k} 10^{-5} p^3}$$

C'est un système du troisième ordre, de gain non unitaire et de classe zéro.

- Appliquons le critère de Routh en négligeant les cas particuliers provoqués par la nullité de coefficient de monôme qui n'ont pas – a priori – d'intérêt physique ici ;

1. C.N. : tous les coefficients des monômes doivent être de même signe. $283 \cdot 10^4$ est positif donc tous les autres coefficients doivent l'être.

$$\left. \begin{aligned} 6 \cdot 10^{-5} + \frac{\tau}{k} (1 + 283 \cdot 10^4 k^2) > 0 \\ \left(1 + 6 \frac{\tau}{k}\right) 10^{-5} > 0 \Rightarrow \frac{\tau}{k} > -\frac{1}{6} \\ \frac{\tau}{k} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\tau}{k} > 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau > 0 \text{ et } k > 0}$$

[9]

2. C.S. : construction du tableau

p^3	$\frac{\tau}{k} 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5} + \frac{\tau}{k} + 283 \cdot 10^4 k\tau$
p^2	$\left(1 + 6 \frac{\tau}{k}\right) 10^{-5}$	$283 \cdot 10^4$
p^1	P_1	0
p^0	$283 \cdot 10^4$	0

Avec $P_1 > 0$, seule nouvelle contrainte

$$P_1 \simeq \frac{\begin{vmatrix} \frac{\tau}{k} 10^{-5} & 6 \cdot 10^{-5} + \frac{\tau}{k} + 283 \cdot 10^4 k\tau \\ \left(1 + 6 \frac{\tau}{k}\right) 10^{-5} & 283 \cdot 10^4 \end{vmatrix}}{\left(1 + 6 \frac{\tau}{k}\right) 10^{-5}}$$

$$\frac{(28,3 - 10^{-5} - 36 \cdot 10^{-10}) \frac{\tau}{k} - 6 \cdot 10^{-10} - 28,3k\tau - 6 \frac{\tau^2}{k^2} 10^{-5} - 6 \times 283 \cdot 10^4 \tau^2}{\left(1 + 6 \frac{\tau}{k}\right) 10^{-5}}$$

$\frac{\tau}{k} > 0 \Rightarrow \left(1 + 6 \frac{\tau}{k}\right) 10^{-5} > 0$, donc seul le signe du numérateur nous intéresse :

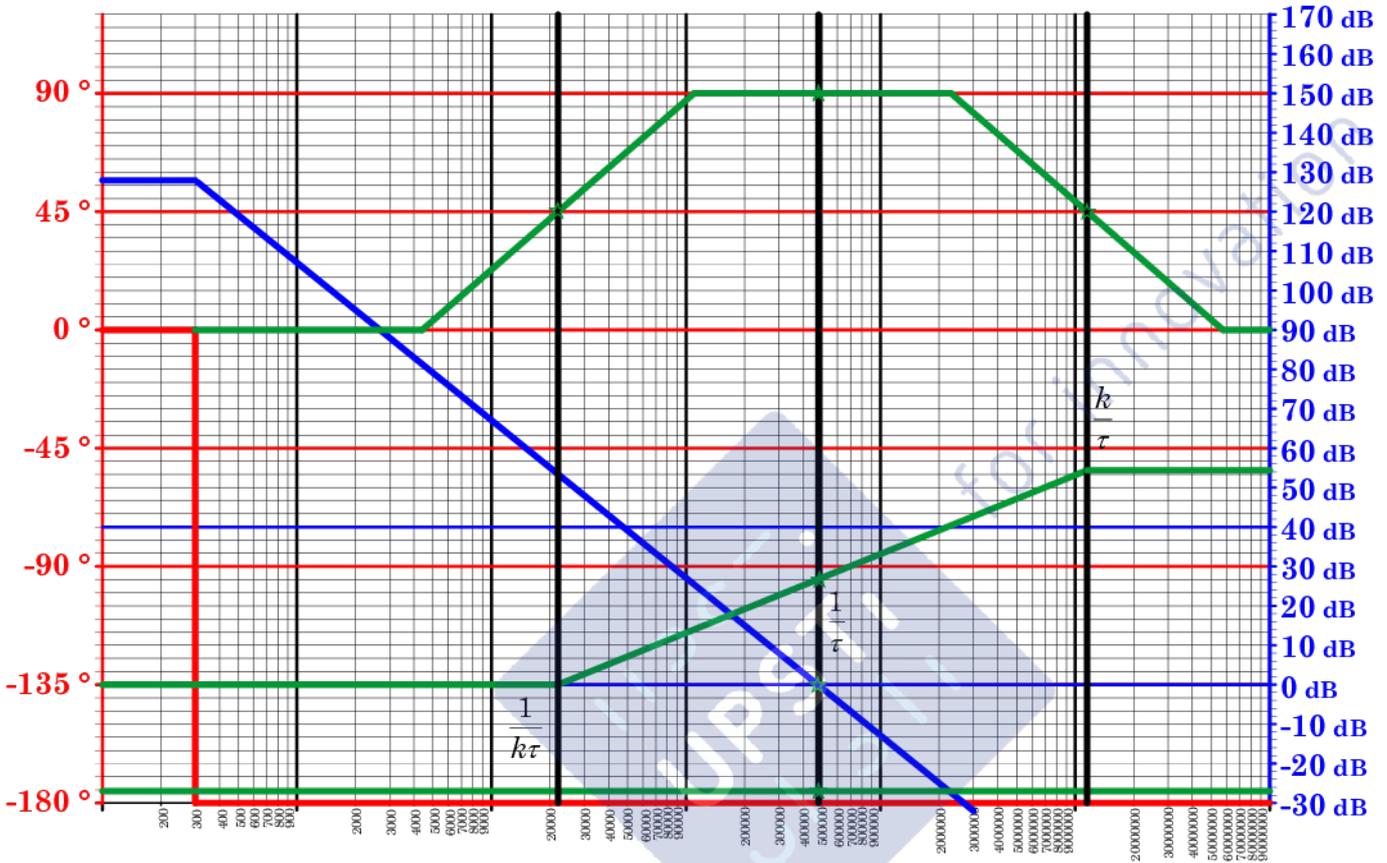
$$(28,3 - 10^{-5} - 36 \cdot 10^{-10}) \frac{\tau}{k} - 6 \cdot 10^{-10} - 28,3k\tau - 6 \frac{\tau^2}{k^2} 10^{-5} - 6 \times 283 \cdot 10^4 \tau^2$$

$(28,3 - 10^{-5} - 36 \cdot 10^{-10}) \tau k - 6 \cdot 10^{-10} k^2 - 28,3k^3 \tau - 6 \tau^2 10^{-5} - 6 \times 283 \cdot 10^4 \tau^2 k^2$. Équation dont l'étude du signe en fonction de deux paramètres est lourde !!

Bilan partiel : l'attaque frontale pour caractériser la stabilité de notre système de façon directe est un échec.

- **Tracé du diagramme de Bode** de la fonction de transfert en boucle ouverte sans y introduire le correcteur à marges de phase :

$$H_1 H_3 \approx \frac{11,3 \times 250 \cdot 10^3}{1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2} \approx \frac{2500 \cdot 10^3}{1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2}, \text{ avec } \omega_0 \approx 300 \text{ rad.s}^{-1} \text{ pour simplifier !}$$



Remarque : le correcteur est tracé en vert.

- Détermination de la marge de phase du système sans correcteur :

1. On cherche la valeur de la pulsation ω_ϕ telle que : $H_O^2(\omega_\phi) = 1$

$$|H_1 H_3|^2 \approx \left| 250 \cdot 10^3 \frac{11,3}{1 + 6 \cdot 10^{-5} i \omega_\phi - 10^{-5} \omega_\phi^2} \right|^2 = 1$$

$$\Rightarrow 8 \cdot 10^{12} \approx 1 + 10^{-10} \omega_\phi^4 - 2 \times 10^{-5} \omega_\phi^2 + 36 \cdot 10^{-10} \omega_\phi^2$$

$$10^{-10} \omega_\phi^4 - 2 \times 10^{-5} \omega_\phi^2 - 8 \cdot 10^{12} \approx 0 \Rightarrow \omega_\phi^2 \approx \frac{10^{-5} \pm \sqrt{10^{-10} + 8 \cdot 10^2}}{10^{-10}} \approx 10^5 \pm 10^{10} \sqrt{8 \cdot 10^2} \approx 2 \cdot 10^{11} \sqrt{2}$$

$$\omega_\phi \approx \sqrt{2 \cdot 10^{11} \sqrt{2}} \approx \boxed{0,5 \text{ Mrad.s}^{-1} \approx \omega_\phi}$$

Ce que confirme le tracé asymptotique ci-dessus. On constate que la marge de phase est quasi nulle, mais forcément positive car l'argument de la fonction tend vers -180° en restant au-dessus de cette limite. Comme la fonction de transfert en boucle ouverte – sans le correcteur – est stable, la fonction de transfert correspondante est stable (Niquist).

- On va placer le correcteur à marge de phase de manière à ce que :

1. Le correcteur soit à avance de phase, pour utiliser la phase positive du correcteur. Tout en sachant que nous sommes à la limite de son utilisation de cette manière, car la valeur maximale de l'argument positif dégagé par ce correcteur est limitée à 90° ;
2. Le milieu des deux cassures du correcteur corresponde à $\omega_\phi \approx 0,5 \text{ Mrad.s}^{-1}$.

- Ce qui augmente de $10 \log_{10} k^2 = 20 \log_{10} k$ le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_O = H_1 H_2 H_3$ pour cette pulsation, donc telle que

$$\left| H_O(\omega_\varphi) \right| = 1. \text{ On obtient ainsi une première relation : } \omega_\varphi = \frac{1}{\tau}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_\varphi} \approx \frac{1}{\frac{1}{10^6}} \approx \boxed{2 \mu\text{s} \approx \tau} ; \quad [10]$$

- Il faudra donc diminuer le gain statique d'autant : $K_O^{\text{régulé}} \approx \frac{2,5 \cdot 10^5}{k}$

3. Il ne reste plus qu'à imposer au correcteur d'avoir un argument de 85° pour la pulsation $\omega_\varphi = \frac{1}{\tau}$, puisque l'argument de la fonction non réglée est quasi nul :

$$\arctan k - \arctan \frac{1}{k} = 85^\circ \Rightarrow \frac{k - \frac{1}{k}}{1 + k \frac{1}{k}} = \tan 85^\circ \Rightarrow \frac{k^2 - 1}{2k} = \tan 85^\circ$$

$$k^2 - 2k \tan 85^\circ - 1 \approx 0 \Rightarrow k \approx \tan 85^\circ \pm \sqrt{\tan^2 85^\circ + 1} \underset{k > 0}{\approx} k \approx \tan 85^\circ + \sqrt{\tan^2 85^\circ + 1}$$

$$k \approx 11,43 + \sqrt{11,43^2 + 1} \approx \boxed{23 \approx k} ; \quad [11]$$

$$4. H_O = H_1 H_2 H_3 \approx \frac{250 \cdot 10^3}{23} \frac{1 + 23 \times 2 \cdot 10^{-6} p}{1 + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{23} p} \frac{11,3}{1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2} \approx H_O$$

$$H_O \approx 10^5 \frac{1 + 5 \cdot 10^{-5} p}{1 + 6 \cdot 10^{-5} p + 10^{-5} p^2 + 10^{-12} p^3} ; \text{ d'où la vérification suivante :}$$

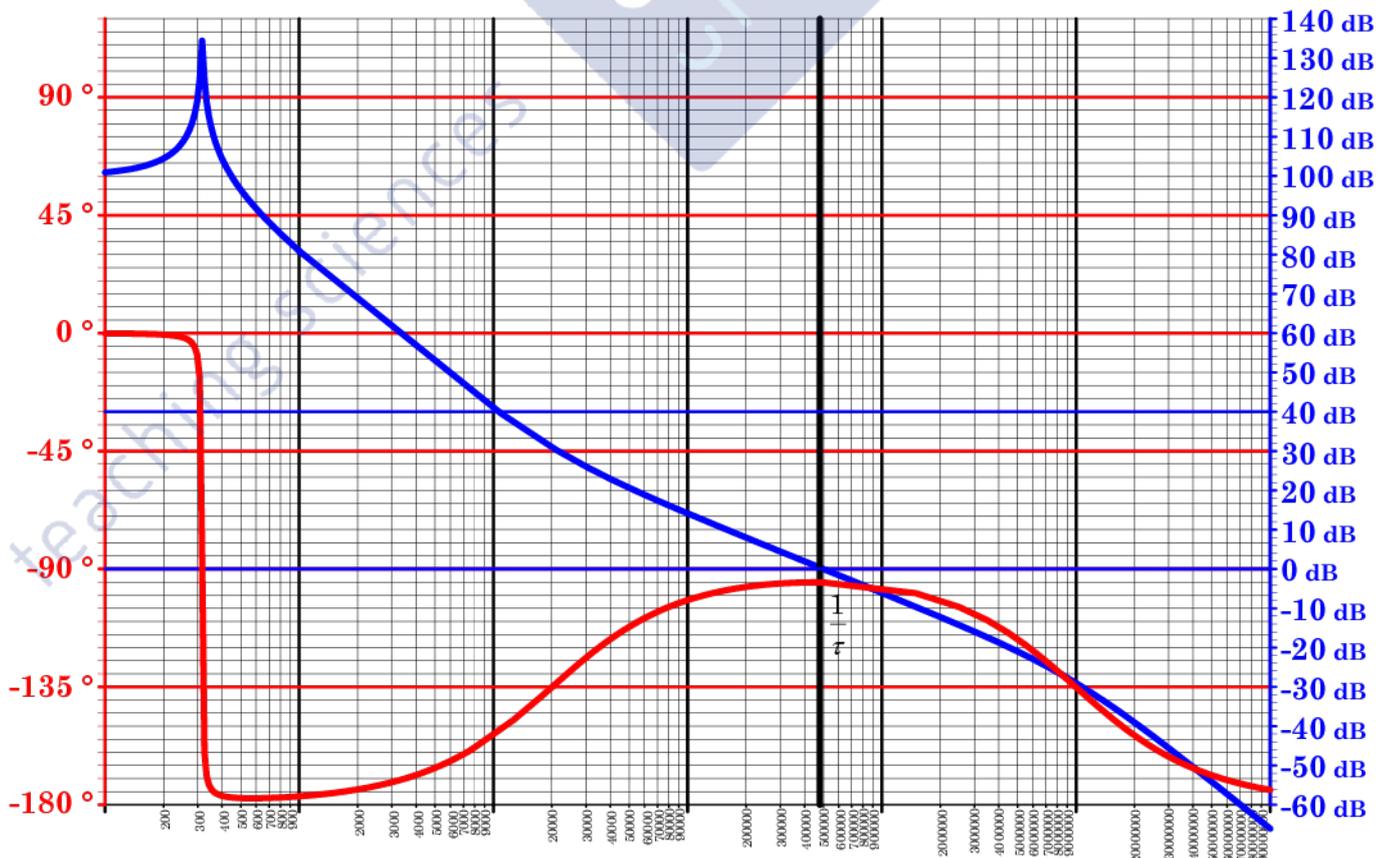


Figure 1 : vérification machinale du réglage obtenu.

On obtient bien un réglage qui respecte la marge de phase imposée.

Partie II

1.

**
*

Remarque : Bien que relu, ce corrigé n'est probablement pas exempt d'erreurs de calcul, d'interprétation ou pire de compréhension !

