

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2010

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

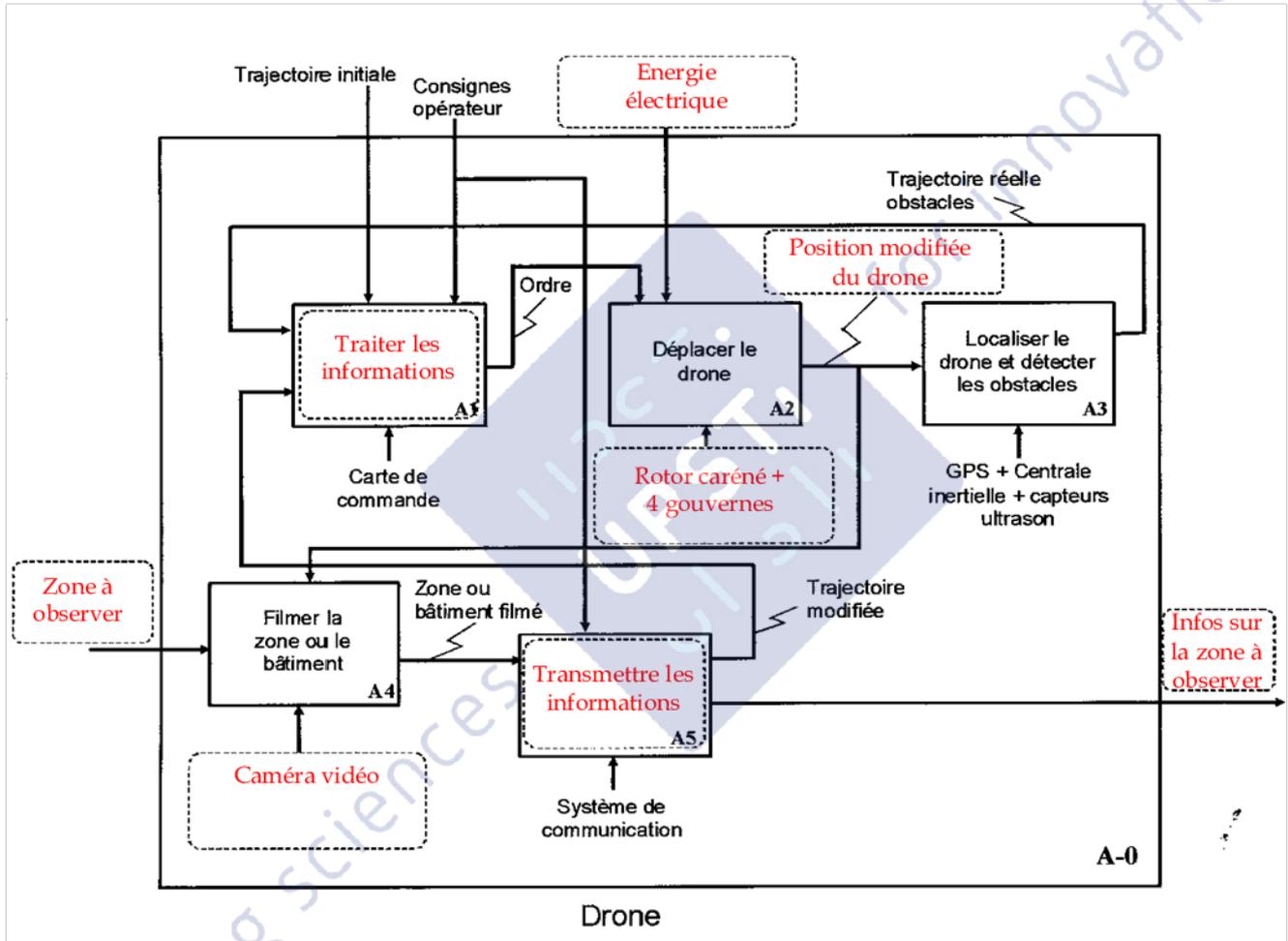
L'équipe UPSTI

MODELISATION ET COMMANDE D'UN DRONE MINIATURE A VOILURE TOURNANTE

1 Présentation du système

2 Fonction FP1 « surveiller une zone ou un bâtiment difficilement accessible »

Q1 : Décomposition fonctionnelle SADT



3 Fonction FP1.1 « être capable d'effectuer un vol stationnaire » : Etude des efforts aérodynamiques

Q2: Positions d'équilibre du drone

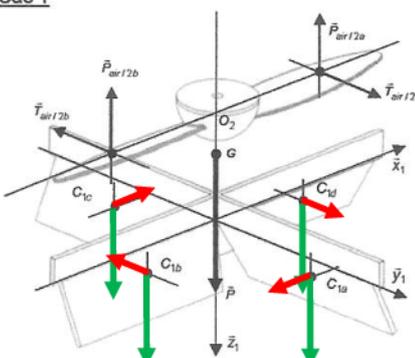
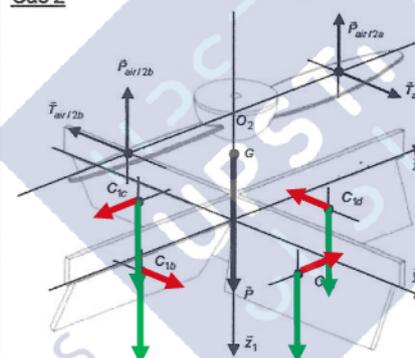
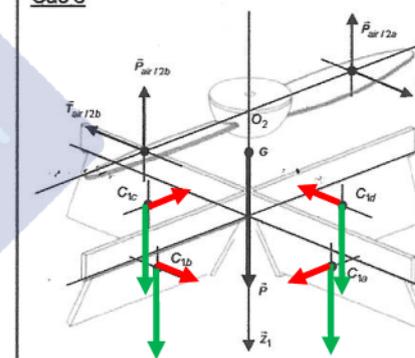
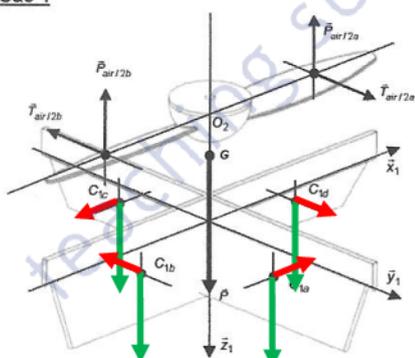
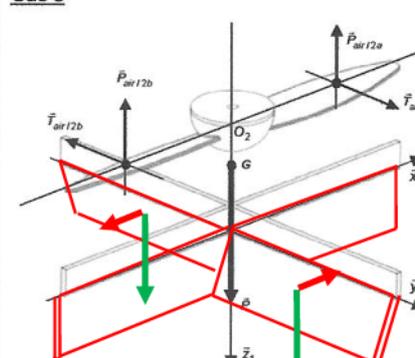
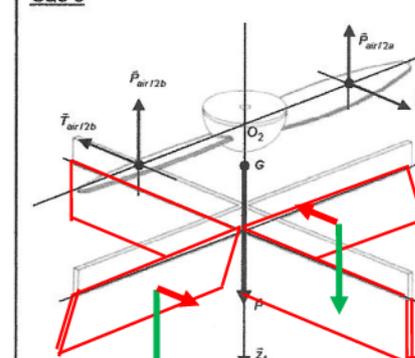
On isole le drone, supposé en équilibre dans le référentiel terrestre considéré galiléen ; alors :

$$\begin{cases} \vec{R}(\vec{d} \rightarrow d) = \vec{0} \\ \vec{M}(O, \vec{d} \rightarrow d) = \vec{0} \end{cases}$$

Dans la position étudiée (axe du drone vertical), pour qu'il y ait équilibre du drone dans le référentiel terrestre, il faut que :

- 1) les efforts de portance sur les pales de l'hélice compensent le poids du drone et les efforts de traînée sur les appendices
- 2) les efforts de portance sur les appendices génèrent un couple résultant axial négatif, s'opposant au couple résultant des forces de traînée sur les pales de l'hélice (positif sur l'axe $(0, z_1)$).

D'où les situations d'équilibre indiquées ci-dessous :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|--|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|------------|-------------|
| <p>Cas 1</p>  <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>δ_1</td> <td>δ_1</td> <td>δ_1</td> <td>δ_1</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : NON</p> | δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | δ_1 | δ_1 | δ_1 | δ_1 | <p>Cas 2</p>  <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>$-\delta_2$</td> <td>$-\delta_2$</td> <td>$-\delta_2$</td> <td>$-\delta_2$</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : OUI</p> | δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | $-\delta_2$ | $-\delta_2$ | $-\delta_2$ | $-\delta_2$ | <p>Cas 3</p>  <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>δ_3</td> <td>$-\delta_3$</td> <td>δ_3</td> <td>$-\delta_3$</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : NON</p> | δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | δ_3 | $-\delta_3$ | δ_3 | $-\delta_3$ |
| δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| δ_1 | δ_1 | δ_1 | δ_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $-\delta_2$ | $-\delta_2$ | $-\delta_2$ | $-\delta_2$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| δ_3 | $-\delta_3$ | δ_3 | $-\delta_3$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Cas 4</p>  <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>$-\delta_4$</td> <td>δ_4</td> <td>$-\delta_4$</td> <td>δ_4</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : NON</p> | δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | $-\delta_4$ | δ_4 | $-\delta_4$ | δ_4 | <p>Cas 5</p>  <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>$-\delta_5$</td> <td>0</td> <td>$-\delta_5$</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : OUI</p> | δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | $-\delta_5$ | 0 | $-\delta_5$ | 0 | <p>Cas 6</p>  <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>$-\delta_6$</td> <td>0</td> <td>$-\delta_6$</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : OUI</p> | δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | 0 | $-\delta_6$ | 0 | $-\delta_6$ |
| δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $-\delta_4$ | δ_4 | $-\delta_4$ | δ_4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $-\delta_5$ | 0 | $-\delta_5$ | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| δ_a | δ_b | δ_c | δ_d | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | $-\delta_6$ | 0 | $-\delta_6$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Dans une configuration à deux hélices contrarotatives, les couples résultants des forces de traînée sur les deux hélices se compensent : donc :

- il n’y a pas besoin d’utiliser les gouvernes pour supprimer le mouvement de lacet ;
- ne pas sortir les gouvernes pour le maintien en vol stationnaire permet alors de limiter les pertes d’énergie dues aux forces de traînée ;
- inconvénient, cette solution est plus lourde, ce qui nécessite une plus grande consommation d’énergie pour mouvoir le drone ;
- cette solution nécessite plus de composants et est donc plus coûteuse.

Q3: Scenarii de vol

| | $p_{1/0}$ | $q_{1/0}$ | $r_{1/0}$ | $u_{1/0}$ | $v_{1/0}$ | $w_{1/0}$ |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\tilde{\omega} \nearrow, \tilde{\delta}_a = \tilde{\delta}_b = \tilde{\delta}_c = \tilde{\delta}_d = 0$ | | | X | | | X |
| $\tilde{\delta}_i \nearrow, i = a, b, c, d, \tilde{\omega} = 0$ | | | X | | | X |
| $\tilde{\delta}_a \nearrow$ et $\tilde{\delta}_c = -\tilde{\delta}_a, \tilde{\delta}_b = \tilde{\delta}_d = 0, \tilde{\omega} = 0$ | | | X | | | X |
| $\tilde{\delta}_a \nearrow$ et $\tilde{\delta}_c = -\tilde{\delta}_a, \tilde{\delta}_b = \tilde{\delta}_d = 0, \tilde{\omega} = 0$ | | X | | X | | X |

Cette configuration permet de découpler la gestion des mouvements selon l’axe (O, \bar{z}_1) du pilotage des degrés de liberté selon les directions perpendiculaires.

Q4: Actions mécaniques subies par l’hélice (2)

On définit localement les actions mécaniques exercées par l’air sur une section droite de la pale (2a) :

- force de portance : $d\bar{P}_{air \rightarrow 2a}(\lambda) = -K_Z V^2 d\lambda \cdot \bar{z}_1$
- force de traînée : $d\bar{T}_{air \rightarrow 2a}(\lambda) = -K_X V^2 d\lambda \cdot \bar{x}_2$, avec $\dot{V}(P, 2 / air) \approx \underbrace{-(r_{1/0} + \omega)}_{\dot{V}} \lambda \cdot \bar{x}_2$

On intègre ces forces locales sur la longueur du profil de la pale :

$$\dot{R}(air \rightarrow 2a) = \int_{r_2}^{R_2} \left[-K_Z (r_{1/0} + \omega)^2 \lambda^2 \cdot \bar{z}_1 - K_X (r_{1/0} + \omega)^2 \lambda^2 \cdot \bar{x}_2 \right] d\lambda ;$$

$$\bar{R}(air \rightarrow 2a) = -(r_{1/0} + \omega)^2 \frac{R_2^3 - r_2^3}{3} [K_Z \cdot \bar{z}_1 + K_X \cdot \bar{x}_2]$$

De même pour la composante moment au point O_2 de l’action mécanique :

$$\bar{M}(O_2, air \rightarrow 2a) = \int_{r_2}^{R_2} \lambda \cdot \bar{y}_2 \wedge \left[-K_Z (r_{1/0} + \omega)^2 \lambda^2 \cdot \bar{z}_1 - K_X (r_{1/0} + \omega)^2 \lambda^2 \cdot \bar{x}_2 \right] d\lambda ;$$

$$\dot{M}(O_2, air \rightarrow 2a) = (r_{1/0} + \omega)^2 \frac{R_2^4 - r_2^4}{4} [K_X \cdot \bar{z}_1 - K_Z \cdot \bar{x}_2]$$

$$D'où : T_{air \rightarrow 2a} = \left. \begin{matrix} - (r_{1/0} + \omega)^2 \frac{R_2^3 - r_2^3}{3} [K_Z \cdot \bar{z}_1 + K_X \cdot \bar{x}_2] \\ (r_{1/0} + \omega)^2 \frac{R_2^4 - r_2^4}{4} [K_X \cdot \bar{z}_1 - K_Z \cdot \bar{x}_2] \end{matrix} \right\}_{O_2}$$

Par raison de symétrie autour de l'axe (O_2, \bar{z}_1) , les composantes selon la direction \bar{x}_2 des actions mécaniques exercées par l'air sur les pales (2a) et (2b) sont de sens opposés ; elles s'annulent donc 2 à 2 lorsqu'on les additionne :

$$T_{air \rightarrow 2} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{3}(r_{1/0} + \omega)^2 (R_2^3 - r_2^3) K_Z \cdot \bar{z}_1 \\ \frac{1}{2}(r_{1/0} + \omega)^2 (R_2^4 - r_2^4) K_X \cdot \bar{z}_1 \end{array} \right\}; \quad O_2 \dot{G} \text{ étant colinéaire à l'axe } (O_2, \bar{z}_1), \text{ ce torseur présente les}$$

mêmes éléments de réduction en G :
$$T_{air \rightarrow 2} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{3} K_Z (r_{1/0} + \omega)^2 (R_2^3 - r_2^3) \cdot \bar{z}_1 \\ \frac{1}{2} K_X (r_{1/0} + \omega)^2 (R_2^4 - r_2^4) \cdot \bar{z}_1 \end{array} \right\}$$

Q5 : Equilibre du drone, défini par les paramètres $(\omega_{eq}, \delta_{eq})$

On isole le drone, soumis à :

- $T_{air \rightarrow 1} = \left\{ \begin{array}{l} 4K_\delta (r_{1/0} + \omega_{eq})^2 \delta_{eq} \sin \delta_{eq} \cdot \bar{z}_1 \\ 4IK_\delta (r_{1/0} + \omega_{eq})^2 \delta_{eq} \cos \delta_{eq} \cdot \bar{z}_1 \end{array} \right\}$, avec $r_{1/0} = 0$ puisque le drone est en vol stationnaire ;
- $T_{air \rightarrow 2}$, vu à la question précédente ;
- $T_{g \rightarrow d} = \left\{ \begin{array}{l} (m_1 + m_2)g \cdot \bar{z}_1 \\ \dot{0} \end{array} \right\}$, où G est le centre de gravité du drone.

On applique le Principe Fondamental de la Statique (P.F.S.) au drone supposé en équilibre dans le référentiel terrestre galiléen ; ce qui permet d'écrire les deux théorèmes généraux :
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_{\bar{d} \rightarrow d} = \bar{0} \\ \dot{M}_{G, \bar{d} \rightarrow d} = \bar{0} \end{array} \right.$$

On en déduit les deux équations permettant de déterminer les valeurs des paramètres $(\omega_{eq}, \delta_{eq})$ assurant l'équilibre du drone :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \left[4K_\delta \omega_{eq}^2 \delta_{eq} \sin \delta_{eq} - \frac{2}{3} K_Z \omega_{eq}^2 (R_2^3 - r_2^3) + (m_1 + m_2)g \right] \cdot \bar{z}_1 = \bar{0} \\ (2) \quad \left[4IK_\delta \delta_{eq} \cos \delta_{eq} + \frac{1}{2} K_X (R_2^4 - r_2^4) \right] \omega_{eq}^2 \cdot \bar{z}_1 = \dot{0} \end{array} \right.$$

L'équation (2) permet de déterminer l'angle d'inclinaison des appendices : $\delta_{eq} \cos \delta_{eq} = -\frac{K_X}{8IK_\delta} (R_2^4 - r_2^4)$.

Toutefois, l'équation (1), que l'on peut réécrire $\left[4K_\delta \delta_{eq} \sin \delta_{eq} - \frac{2}{3} K_Z (R_2^3 - r_2^3) \right] \omega_{eq}^2 = -(m_1 + m_2)g$, n'a de solution que si : $\left[4K_\delta \delta_{eq} \sin \delta_{eq} - \frac{2}{3} K_Z (R_2^3 - r_2^3) \right] < 0$, condition reliant K_δ, K_Z, R_2, r_2 à l'angle δ_{eq} .

Q6 : Energie motrice nécessaire au vol stationnaire

Le théorème des puissances cinétiques appliqué au drone dans le référentiel terrestre galiléen permet de préciser les transferts d'énergie durant le vol stationnaire : $\frac{d}{dt} E_C(d/0) = P(\bar{d} \rightarrow d/0) + P_i(d)$

- Le vol est stationnaire, donc, l'énergie cinétique galiléenne du drone est constante : $\frac{d}{dt} E_C(d/0) = 0$
- $P(\bar{d} \rightarrow d/0) = P(\text{air} \rightarrow 1/0) + P(\text{air} \rightarrow 2/0) + P(g \rightarrow d/0)$
 - Le vol est stationnaire, donc $P(\text{air} \rightarrow 1/0) = T_{\text{air} \rightarrow 1} \otimes V_{1/0} = 0$
 - $P(\text{air} \rightarrow 2/0) = T_{\text{air}/2} \otimes V_{2/0}$; $V_{2/0} = \begin{Bmatrix} \omega_{\text{eq}} \cdot \dot{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$; alors, $P(\text{air} \rightarrow 2/0) = \vec{M}_{G, \text{air} \rightarrow 2} \cdot (\omega_{\text{eq}} \cdot \dot{z}_1)$;
 $P(\text{air} \rightarrow 2/0) = \frac{1}{2} K_X \omega_{\text{eq}}^3 (R_2^4 - r_2^4)$
 - $P(g \rightarrow d/0) = T_{g \rightarrow 1} \otimes V_{1/0} + T_{g \rightarrow 2} \otimes V_{2/0} = \dot{R}_{g \rightarrow 1} \cdot \underbrace{\dot{V}_{G_1, 1/0}}_{\vec{0}} + \dot{R}_{g \rightarrow 2} \cdot \underbrace{\dot{V}_{G_2, 2/0}}_{\vec{0}} = 0$
- En supposant toutes les liaisons parfaites, on en déduit que la puissance développée par les actions mécaniques intérieures au drone se limite à celle délivrée par le moteur entraînant l'hélice : $P_i(d) = P_m$

D'où :
$$P_m = -\frac{1}{2} K_X \omega_{\text{eq}}^3 (R_2^4 - r_2^4)$$

Le moteur présente un rendement de 83% ; on en déduit la puissance électrique nécessaire : $P_e = \frac{P_m}{0,83}$.

L'autonomie de vol minimale est de 15 mn, soit $D > 15$ mn. L'énergie électrique qui sera consommée durant l'utilisation du drone est $W_e = P_e \cdot D$.

A.N. : La capacité W_e de la batterie d'accumulateurs embarquée doit être supérieure à $P_e \cdot D$;
 $W_e > 167 \text{ kJ}$

4 Fonction FP1.3 « se déplacer horizontalement » : Etude du mouvement d'inclinaison

Q7 : Inertie du drone

- Le corps (1) du drone présente deux plans de symétrie matérielle $(G_1, \dot{z}_1, \dot{x}_1)$ et $(G_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$; de ce fait, les produits d'inertie de (1) sont nuls dans la base vectorielle $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$; de plus, les symétries matérielles de part et d'autre de ces deux plans sont identiques : les moments d'inertie

autour des axes (G_1, \dot{x}_1) et (G_1, \bar{y}_1) sont égaux. Alors,
$$I_{G_1, 1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)}$$

- L'axe (G_2, \bar{z}_1) est axe de symétrie de l'hélice (2) ; la matrice d'inertie de (2) est donc de la forme :

$$I_{G_2, 2} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)}$$

- La position du centre d'inertie G du drone se détermine par la relation de barycentre :

$$(m_1 + m_2) \cdot O_1 \dot{G} = m_1 \cdot O_1 \dot{G}_1 + m_2 \cdot O_1 \dot{G}_2 . \text{ On en déduit : } l_G = -\frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2}$$

- On utilise le théorème de Huygens généralisé pour déterminer les matrices d'inertie des solides (1) et (2) au centre d'inertie du drone G.

Pour chaque solide (i), $I_{G,i} = I_{G_i,i} + I_{GG_i,i}$, avec $I_{GG_i,i} = \begin{pmatrix} m_i(l_i + l_G)^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_i(l_i + l_G)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$.

Alors, $I_{G,i} = \begin{pmatrix} A_i + m_i(l_i + l_G)^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_i + m_i(l_i + l_G)^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$

Q8: Actions aérodynamiques nécessaires à l'obtention du mouvement d'inclinaison

On isole le drone, soumis aux actions de l'air et de la pesanteur. On lui applique le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.) dans le référentiel galiléen terrestre : $D_{d/0} = T_{air \rightarrow d} + T_{g \rightarrow d}$.

On en déduit les deux théorèmes généraux (moments exprimés en G) :

$$\begin{cases} \dot{R}(d/0) = \dot{R}(air \rightarrow d) + \dot{R}(g \rightarrow d) \\ \dot{\delta}(G, d/0) = \overline{M}(G, air \rightarrow d) + \overline{M}(G, g \rightarrow d) \end{cases}$$

- Durant la phase de vol étudiée, $\overline{V}(G, 1/0) = \dot{0}$; donc, $\overline{R}(d/0) = (m_1 + m_2)\dot{a}(G, d/0) = \dot{0}$.

De ce fait, $\overline{R}(air \rightarrow d) = -\overline{R}(g \rightarrow d) = -(m_1 + m_2)g \cdot \bar{z}_0$

- $\dot{\delta}(G, d/0) = \dot{\delta}(G, 1/0) + \dot{\delta}(G, 2/0)$

o $\dot{\delta}(G, 1/0) = \left. \frac{d}{dt} \overline{\sigma}(G, 1/0) \right|_0 + \dot{V}(G/0) \wedge m_1 \cdot \dot{V}(G_1, 1/0)$

▪ $\dot{\sigma}(G, 1/0) = I_{G,1} \cdot \left(\underbrace{\overline{\Omega}(1/0)}_{\dot{\phi} \cdot \bar{x}_1} \right) = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 & 0 \\ 0 & A'_1 & 0 \\ 0 & 0 & C'_1 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} = A'_1 \dot{\phi} \cdot \bar{x}_1 ;$

$\left. \frac{d}{dt} \overline{\sigma}(G, 1/0) \right|_0 = A'_1 \dot{\phi} \cdot \dot{x}_1$

- $\overline{V}(G/0) \wedge m_1 \cdot \overline{V}(G_1, 1/0) = \dot{0}$ car le point G est immobile dans le référentiel terrestre (0) durant cette phase de mouvement.

Alors $\dot{\delta}(G, 1/0) = A'_1 \dot{\phi} \cdot \dot{x}_1$

o $\dot{\delta}(G, 2/0) = \left. \frac{d}{dt} \overline{\sigma}(G, 2/0) \right|_0 + \dot{V}(G/0) \wedge m_2 \cdot \dot{V}(G_2, 2/0)$

▪ $\dot{\sigma}(G, 2/0) = I_{G,2} \cdot \left(\underbrace{\overline{\Omega}(2/0)}_{\dot{\phi} \cdot \bar{x}_1 + \omega \cdot \bar{z}_1} \right) = \begin{pmatrix} A'_2 & 0 & 0 \\ 0 & A'_2 & 0 \\ 0 & 0 & C'_2 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} = A'_2 \dot{\phi} \cdot \bar{x}_1 + C'_2 \omega \cdot \bar{z}_1 ;$

$$\frac{d}{dt} \bar{\sigma}(G, 2/0) \Big|_0 = A_2' \ddot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 + C_2' \left(\dot{\omega} \cdot z_1 + \omega \cdot \frac{d}{dt} z_1 \Big|_0 \right) = A_2' \ddot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 + C_2' (\dot{\omega} \cdot z_1 - \omega \dot{\varphi} \cdot y_1)$$

- $\bar{V}(G/0) \wedge m_2 \cdot \bar{V}(G_2, 2/0) = 0$ car le point G est immobile dans le référentiel terrestre (0) durant cette phase de mouvement.

Alors $\dot{\delta}(G, 2/0) = A_2' \ddot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 + C_2' (\dot{\omega} \cdot z_1 - \omega \dot{\varphi} \cdot y_1)$

D'où : $\dot{\delta}(G, d/0) = (A_1' + A_2') \ddot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 + C_2' (\dot{\omega} \cdot z_1 - \omega \dot{\varphi} \cdot y_1)$

- G étant le centre de gravité du drone, $\bar{M}(G, g \rightarrow d) = 0$

Il découle de tout ceci que : $\bar{M}(G, air \rightarrow d) = (A_1' + A_2') \ddot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 + C_2' (\dot{\omega} \cdot z_1 - \omega \dot{\varphi} \cdot y_1)$

D'où le torseur des actions aérodynamiques subies par le drone pour effectuer une inclinaison d'axe

(G, \dot{x}_1) à altitude constante :

$$T_{air \rightarrow d} = \left. \begin{matrix} 0 & (A_1' + A_2') \ddot{\varphi} \\ -(m_1 + m_2) g \sin \varphi & -C_2' \omega \dot{\varphi} \\ -(m_1 + m_2) g \cos \varphi & C_2' \dot{\omega} \end{matrix} \right\}_{(G, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

Q9: Actions aérodynamiques durant un mouvement d'inclinaison particulier

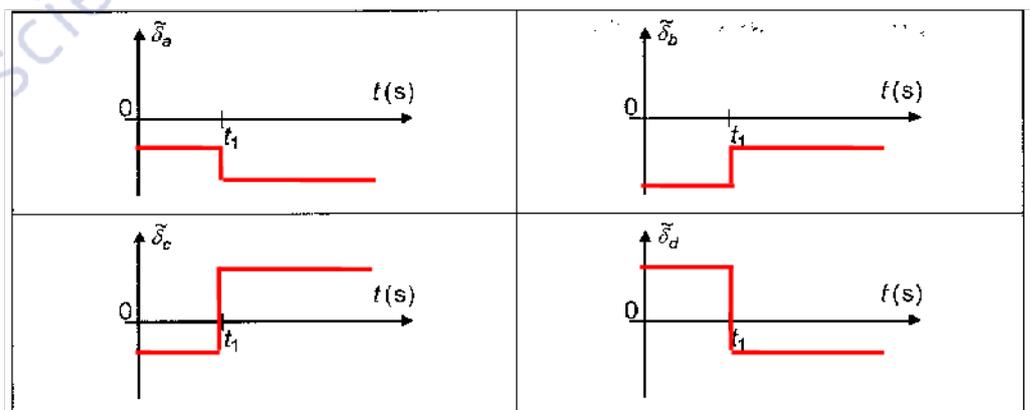
1. On se place à l'instant $t = 0^+$ (initialisation du mouvement) ; alors, $\dot{\varphi} = 0$ et $\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_m}{t_1}$;

on en déduit : $\bar{M}(G, air \rightarrow d) = (A_1' + A_2') \frac{\dot{\varphi}_m}{t_1} \cdot \dot{x}_1 + C_2' \dot{\omega} \cdot z_1$

Il est alors nécessaire de :

- Sortir les appendices b et d parallèlement entre eux ($\delta_b = -\delta_d$) pour créer un couple selon la direction \bar{x}_1 ;
- Sortir les appendices a et c de manière opposée ($\delta_a = \delta_c$) pour créer le couple selon la direction \bar{z}_1

Les positions angulaires des appendices sont définies en supposant $\omega < 0$ et $\dot{\omega} < 0$



2. On se place à l'instant $t > t_1$ (inclinaison à vitesse constante) ; alors, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_M$ et $\ddot{\varphi} = 0$;

on en déduit : $\bar{M}(G, air \rightarrow d) = C_2' (\dot{\omega} \cdot z_1 - \omega \dot{\varphi}_M \cdot y_1)$

Il est alors nécessaire de :

- Sortir les appendices b et d de manière opposée ($\delta_b = \delta_d$) pour créer un couple selon la direction \bar{z}_1 ;
- Sortir les appendices a et c parallèlement entre eux ($\delta_a = -\delta_c$) pour créer le couple selon la direction \bar{y}_1

Q10 : Liaison pivot entre l'axe de l'hélice et le corps du drone

On isole l'arbre d'hélice et l'hélice (2). On applique à cet ensemble le P.F.D. dans le référentiel terrestre galiléen : $D_{2/0} = T_{air \rightarrow 2} + T_{m \rightarrow 2} + T_{1 \rightarrow 2}^A + T_{1 \rightarrow 2}^B + T_{g \rightarrow 2}$.

- $D_{2/0}, T_{air \rightarrow 2}, T_{m \rightarrow 2}$ sont donnés dans l'énoncé (moments au point G).

- Action mécanique due à la liaison sphérique en A : $T_{1 \rightarrow 2}^A = \begin{pmatrix} X_{12}^A & 0 \\ Y_{12}^A & 0 \\ Z_{12}^A & 0 \end{pmatrix}_{(A, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)}$

- Action mécanique due à la liaison sphérique en B : $T_{1 \rightarrow 2}^B = \begin{pmatrix} X_{12}^B & 0 \\ Y_{12}^B & 0 \\ Z_{12}^B & 0 \end{pmatrix}_{(B, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)}$

- Action de la pesanteur : $T_{g \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_2 g & 0 \end{pmatrix}_{(G_2, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}$

On détermine les moments des actions mécaniques au point G :

- $\bar{M}(G, A_{1 \rightarrow 2}) = \bar{R}(A_{1 \rightarrow 2}) \wedge \overline{AG} = l_A (Y_{12}^A \cdot \dot{x}_1 - X_{12}^A \cdot \dot{y}_1)$
- $\bar{M}(G, B_{1 \rightarrow 2}) = \bar{R}(B_{1 \rightarrow 2}) \wedge \overline{BG} = l_B (Y_{12}^B \cdot \dot{x}_1 - X_{12}^B \cdot \dot{y}_1)$
- $\bar{M}(G, g \rightarrow 2) = \overline{GG_2} \wedge \underbrace{\bar{R}(g \rightarrow 2)}_{m_2 g \cdot \dot{z}_0} = m_2 g (l_G + l_2) \sin \varphi \cdot \dot{x}_1$

Les six équations scalaires qui découlent du P.F.D. appliqué à (2) dans le référentiel (0) galiléen sont obtenues en projetant dans la base vectorielle $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$:

$$\begin{cases} (1) & 0 = X_{1 \rightarrow 2}^A + X_{1 \rightarrow 2}^B \\ (2) & A_y = Y_{1 \rightarrow 2}^A + Y_{1 \rightarrow 2}^B + m_2 g \sin \varphi \\ (3) & 0 = -k_1 \omega_m^2 + Z_{1 \rightarrow 2}^A + Z_{1 \rightarrow 2}^B + m_2 g \cos \varphi \\ (4) & \Delta_x = l_A Y_{1 \rightarrow 2}^A + l_B Y_{1 \rightarrow 2}^B + m_2 g (l_G + l_2) \sin \varphi \\ (5) & \Delta_y = -l_A X_{1 \rightarrow 2}^A - l_B X_{1 \rightarrow 2}^B \\ (6) & 0 = k_2 \omega_m^2 + C_m \end{cases}$$

Analyse des équations obtenues :

- L'équation (6) ne fait pas intervenir de composante de liaison ; elle traduit l'existence d'un degré de liberté en rotation ($m = 1$) selon l'axe (G, \bar{z}_1) .

La liaison équivalente $L_{1/2}$ est une liaison pivot d'axe (G, \bar{z}_1)

- Les équations (1), (2), (4) et (5) forment un système de 4 équations à 4 inconnues $(X_{12}^A, Y_{12}^A, X_{12}^B, Y_{12}^B)$, résolvable. L'équation (3) est la seule à mettre en jeu les inconnues Z_{12}^A et Z_{12}^B , ce qui caractérise un hyperstatisme d'ordre 1 ($h=1$), lié à une surabondance d'arrêts en translation selon la direction \vec{z}_1 .

Modification nécessaire pour rendre le système isostatique :

On propose de remplacer la liaison sphérique en A par une liaison sphère cylindre d'axe (A, \vec{z}_1) , ce qui supprimera dans les équations ci-dessus l'inconnue Z_{12}^A ; l'inconnue Z_{12}^B pourra alors être déterminée.

5 Fonction FP1.2 et FP1.4 « pouvoir se déplacer verticalement et être capable d'effectuer une rotation propre » : Etude du couplage vitesse de lacet - altitude

Q11 : Détermination de $H_1(p) = \frac{\tilde{\omega}_m(p)}{\tilde{C}_m(p)}$

Durant la phase de vol étudiée, le drone reste vertical ($\vec{z}_1 = \vec{z}_0$).

L'équation différentielle demandée est celle relative au mouvement de rotation autour de l'axe (G, \vec{z}_1) de l'arbre d'hélice (2) dans le corps (1) du drone. On l'obtient en projetant sur la direction \vec{z}_1 l'équation du moment dynamique en G appliquée à (2) en mouvement dans le référentiel galiléen (0) :

$$\delta(G, 2/0) \cdot \dot{z}_1 = \underbrace{\overline{M}(G, air \rightarrow 2)}_{k_2 \omega_m^2} \cdot \dot{z}_1 + \underbrace{\overline{M}(G, g \rightarrow 2)}_{-(l_G+l_2) \cdot \dot{z}_1 \wedge m g \cdot \dot{z}_0}_{0} \cdot \dot{z}_1 + \underbrace{\overline{M}(G, 1 \rightarrow 2)}_{=0 : \text{liaison pivot parfaite}} \cdot \dot{z}_1 + \underbrace{\overline{M}(G, m \rightarrow 2)}_{C_m} \cdot \dot{z}_1$$

Un peu de cinétique :

$$\delta(G, 2/0) \cdot \dot{z}_1 = \frac{d}{dt} [\bar{\sigma}(G, 2/0) \cdot \dot{z}_1] - \bar{\sigma}(G, 2/0) \cdot \left. \frac{d}{dt} \dot{z}_1 \right|_0 + m_2 (\vec{V}(G/0), \vec{V}(G_2, 2/0), \dot{z}_1)$$

- $\bar{\sigma}(G, 2/0) = I_{G,2} \left(\underbrace{\dot{\Omega}(2/0)}_{(\dot{\psi} + \omega) \cdot \dot{z}_0} \right) = C_2' \omega_m \cdot \vec{z}_0$
- $\vec{V}(G_2, 2/0) = \underbrace{\vec{V}(G_2, 2/1)}_0 + \vec{V}(G_2, 1/0) ; \quad \vec{V}(G_2, 1/0) = \vec{V}(G, 1/0) + \underbrace{\overline{G_2 G}}_{(l_G+l_2) \cdot \vec{z}_1} \wedge \underbrace{\overline{\Omega}(1/0)}_{\dot{\psi} \cdot \dot{z}_0} = \dot{z} \cdot \dot{z}_0 ;$
 $(\vec{V}(G/0), \vec{V}(G_2, 2/0), \dot{z}_1) = 0$

D'où l'équation différentielle demandée : $\boxed{C_2' \dot{\omega}_m = k_2 \omega_m^2 + C_m}$

Cette équation est non linéaire ; on effectue un développement limité au premier ordre des termes de cette équation, autour du point de fonctionnement de caractéristiques $(\bar{C}_m ; \bar{\omega}_m)$.

Soient les variables : $C_m = \bar{C}_m + \tilde{C}_m(t)$ et $\omega_m = \bar{\omega}_m + \tilde{\omega}_m(t)$.

Il en découle que $\dot{\omega}_m = \frac{d}{dt} \omega_m = \dot{\tilde{\omega}}_m(t)$. En introduisant ces relations dans l'équation différentielle, on

obtient : $C_2' \dot{\tilde{\omega}}_m(t) = k_2 (\bar{\omega}_m + \tilde{\omega}_m(t))^2 + \bar{C}_m + \tilde{C}_m(t)$, soit encore au premier ordre :

$$C_2' \dot{\tilde{\omega}}_m(t) = k_2 (\bar{\omega}_m + 2\bar{\omega}_m \tilde{\omega}_m(t)) + \bar{C}_m + \tilde{C}_m(t).$$

Au point de fonctionnement $(\bar{C}_m; \bar{\omega}_m)$, $k_2 \bar{\omega}_m^2 + \bar{C}_m = 0$. Il vient alors : $C_2' \tilde{\omega}_m(t) - 2k_2 \bar{\omega}_m \tilde{\omega}_m(t) = \tilde{C}_m(t)$

On suppose que les fonctions de cette équation sont de conditions initiales nulles à l'instant $t=0$; on peut donc leur appliquer la transformée de Laplace et ainsi obtenir la fonction de transfert $H_1(p)$:

$$(C_2' p - 2k_2 \bar{\omega}_m) \tilde{\omega}_m(p) = \tilde{C}_m(p), \text{ ce qui induit : } H_1(p) = \frac{1}{-2k_2 \bar{\omega}_m + C_2' p}$$

Détermination de $H_2(p) = \frac{\tilde{z}_m(p)}{\tilde{F}_p(p) - \tilde{F}_{p\text{pert}}(p)}$

On projette sur la direction \bar{z}_0 le théorème de la résultante dynamique appliqué au drone en mouvement dans le référentiel galiléen (0) : $\bar{R}_{d/0} \cdot \dot{z}_0 = \bar{R}(\text{air} \rightarrow 1) \cdot \dot{z}_0 + \bar{R}(\text{air} \rightarrow 2) \cdot \dot{z}_0 + (m_1 + m_2)g$, soit encore :

$$(m_1 + m_2) \ddot{z} = (k_3 \delta \sin \delta - k_1) \omega_m^2 + (m_1 + m_2)g. \text{ Linéarisée, cette équation permet la détermination de } H_2(p), K_{z2} \text{ et } K_{r4}.$$

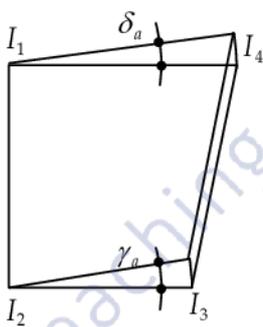
Détermination de $H_3(p) = \frac{\tilde{\psi}_m(p)}{\tilde{C}_{gouv}(p) - \tilde{C}_{pert}(p)}$

L'équation différentielle utile est celle relative au mouvement de rotation autour de l'axe (G, \bar{z}_0) du corps (1) du drone dans le référentiel (0). On l'obtient en projetant sur la direction \bar{z}_0 l'équation du moment dynamique en G appliquée à (1) en mouvement dans le référentiel galiléen (0) :

$$\bar{\delta}(G, 1/0) \cdot \bar{z}_0 = \dot{M}(G, \text{air} \rightarrow 1) \cdot \bar{z}_0 + \dot{M}(G, g \rightarrow 1) \cdot \bar{z}_0 + \dot{M}(G, 2 \rightarrow 1) \cdot \bar{z}_0 + \dot{M}(G, m \rightarrow 1) \cdot \bar{z}_1, \text{ soit encore :}$$

$$C_1' \dot{\psi} = k_4 \omega_m^2 \delta \cos \delta - C_m. \text{ Linéarisée, cette équation permet la détermination de } H_3(p), K_{r2} \text{ et } K_{z4}.$$

Q12 : Fonction de transfert du mécanisme de commande des gouvernes



En première approximation, l'arc décrit par l'extrémité I_2 du levier (1a) est sensiblement identique à celui parcouru par l'extrémité I_3 du levier (4a) ; soit :

$$\frac{\delta_a}{\gamma_a} = \frac{I_3 I_4}{I_1 I_2} \quad \text{A.N. : } K_a = \frac{\delta_a}{\gamma_a} = \frac{2}{3}$$

Remarque : Ce résultat se retrouve (avec un plus d'efforts) en projetant l'équation vectorielle de fermeture géométrique sur les directions \bar{x}_1 et \bar{z}_1 et en linéarisant la relation obtenue autour de $\delta_a = 0$ et $\gamma_a = 0$.

Q13 : Fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement en lacet

On suppose $C_{pert}(p) = 0$.

La fonction de transfert en boucle ouverte correspondante est : $H_{bor}(p) = C_r(p) K_{r1} K_{r2} \underbrace{H_3(p)}_{\frac{K_{r5}}{p}} K_{r3}$

On utilise la formule de Black pour déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement :

$$H_r(p) = \frac{H_{bor}(p)}{1 + H_{bor}(p)}, \text{ soit } H_r(p) = \frac{K_r K_{r1} K_{r2} K_{r3} K_{r5}}{K_r K_{r1} K_{r2} K_{r3} K_{r5} + p}$$

Sous forme canonique, $H_r(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_r K_{r1} K_{r2} K_{r3} K_{r5}}}$; cette fonction est du premier ordre, de gain unitaire et de constante de temps $\frac{1}{K_r K_{r1} K_{r2} K_{r3} K_{r5}}$.

Le temps de réponse à 5% est fixé à 0,5 s par le cahier des charges fonctionnelles ; pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est égal à 3 fois sa constante de temps.

$$D'où : \frac{3}{K_r K_{r1} K_{r2} K_{r3} K_{r5}} = 0,5, \text{ soit } K_r = \frac{6}{K_{r1} K_{r2} K_{r3} K_{r5}}$$

Q14 : Identification de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en altitude

Le tracé fourni (relatif à la fonction de transfert isochrone $H_v(j\omega)$) est obtenu avec $\delta(p) = 0$ et $C_z(p) = 1$

En basses pulsations, le gain décroît selon une pente de -40 dB par décade, traduisant la présence d'un double intégrateur, confirmée par un déphasage de -180 degrés.

Pour les pulsations plus grandes, le gain décroît en -60 dB par décade et le déphasage tend vers -270 degrés ; ce qui, en tenant compte de la présence d'un double intégrateur, indique l'existence d'une fonction du premier ordre.

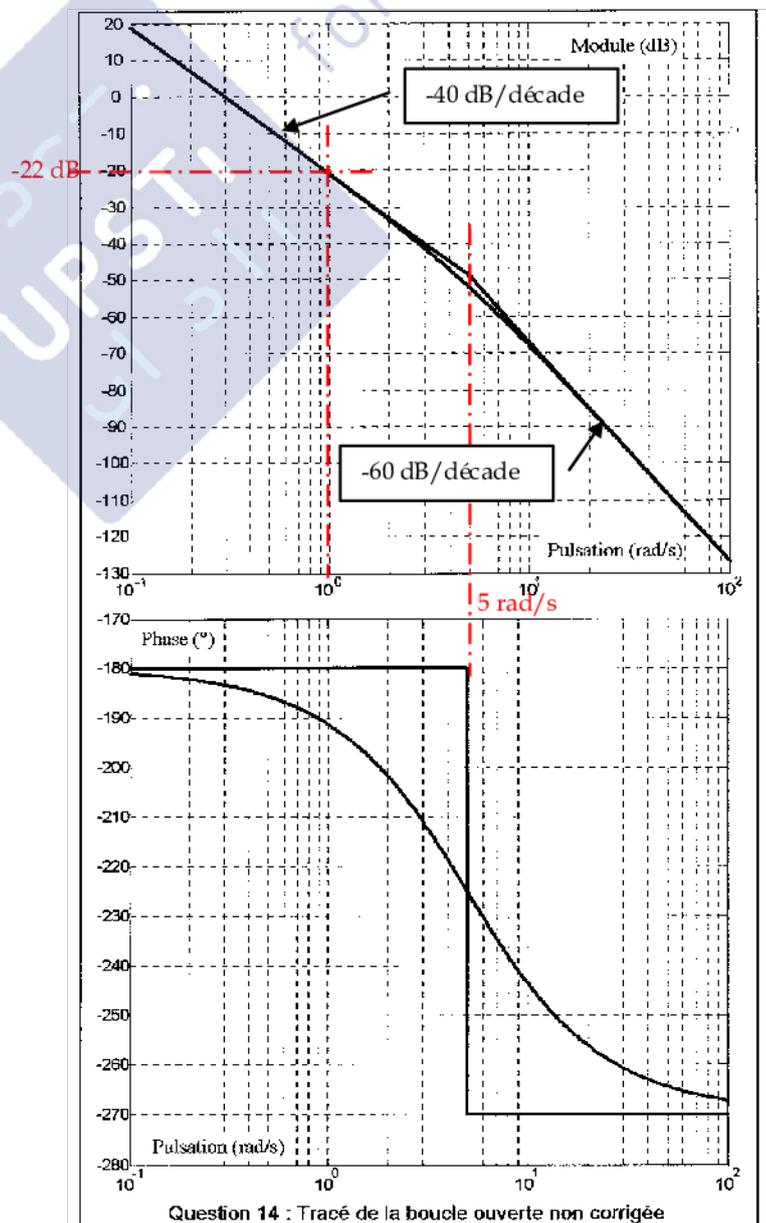
La constante de temps du premier ordre est l'inverse de la pulsation de cassure observée : 5 rad/s

Le gain du système en boucle ouverte est celui lui à la pulsation $\omega = 1 \text{ rad/s}$, soit -21 dB.

$$D'où H_z(p) = \frac{0,09}{p^2 (1 + 0,2p)}$$

En $\omega = 0,3 \text{ rad/s}$, le gain en boucle ouverte s'annule, avec un déphasage de -183 degrés, valeur inférieure à la valeur critique -180 degrés.

Un tel système est instable.



Q15 : Réglage du correcteur à avance de phase

On propose d'introduire un correcteur à avance de phase de la forme $C_z(p) = K_{av} \frac{1 + \tau p}{1 + a\tau p}$, de manière à obtenir une marge de phase $\Delta\varphi = 60$ degrés, à la pulsation de coupure à 0 dB $\omega_c = 0,8$ rad/s ; on détermine les trois constantes du correcteur de la manière suivante :

- Réglage de la marge de phase :

A la pulsation $\omega_c = 0,8$ rad/s, le déphasage de $H_V(j\omega)$ est $\varphi[H_V(j\omega_c)] = -188$ degrés. Le correcteur doit donc apporter $\varphi[C_{av}(j\omega_c)] = -180 + \Delta\varphi - \varphi[H_V(j\omega_c)] = 68$ degrés.

Donc, $a = \frac{1 - \sin 68}{1 + \sin 68}$. A.N. : $a = 0,038$

- Réglage de la pulsation centrale du correcteur

Le correcteur doit apporter un maximum de phase à la pulsation $\omega_c = 0,8$ rad/s ; donc,

$\omega_c = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$. Il en découle : $\tau = \frac{1}{\omega_c\sqrt{a}}$. A.N. : $\tau = 6,43$ s

- Annulation du gain du système corrigé à la pulsation de coupure

A la pulsation $\omega_c = 0,8$ rad/s, le gain de $H_V(j\omega)$ est $G[H_V(j\omega_c)] = -17$ dB. Le correcteur doit être tel que $G[C_{av}(j\omega_c)] + G[H_V(j\omega_c)] = 0$, soit encore $20\log\left(\frac{K_{av}}{\sqrt{a}}\right) - 17 = 0$.

Donc, $K_{av} = \sqrt{a} \cdot 10^{\frac{17}{20}}$. A.N. : $K_{av} = 1,38$

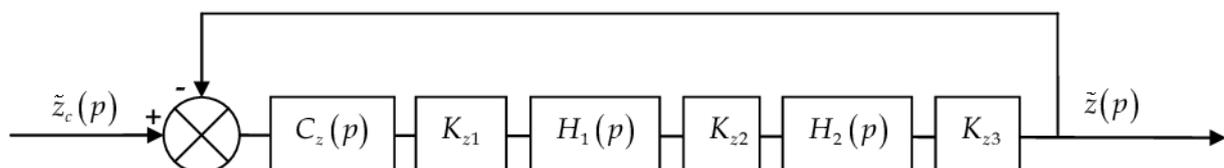
On obtient le correcteur suivant : $C_z(p) = 1,38 \frac{1 + 6,43p}{1 + 0,244p}$

Q16 : Altitude en régime établi

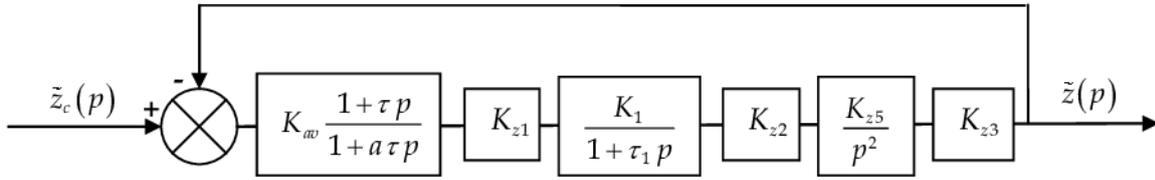
La réponse du drone à une consigne en échelon d'altitude z_0 , en présence d'une perturbation en échelon d'amplitude δ_g , se déterminer par superposition : $\tilde{z}(p) = H_{al}(p)\tilde{z}_c(p) + H_{coup\ al}(p)\tilde{\delta}(p)$, où $H_{al}(p) = \frac{\tilde{z}(p)}{\tilde{z}_c(p)}$

désigne la fonction de transfert en poursuite de l'altitude et $H_{coup\ al}(p) = \frac{\tilde{z}(p)}{\tilde{\delta}(p)}$ représente la fonction de transfert en régulation de l'altitude devant la perturbation $\tilde{\delta}(p)$.

- En poursuite ($\tilde{\delta}(p) = 0$), le schéma bloc peut se modifier comme suit :



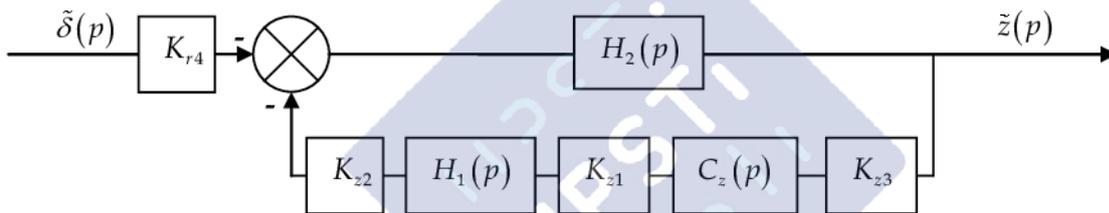
Soit, en prenant en compte la forme des fonctions de transfert (on a montré à la question 11 que $H_1(p)$ est une fonction du 1^{er} ordre) :



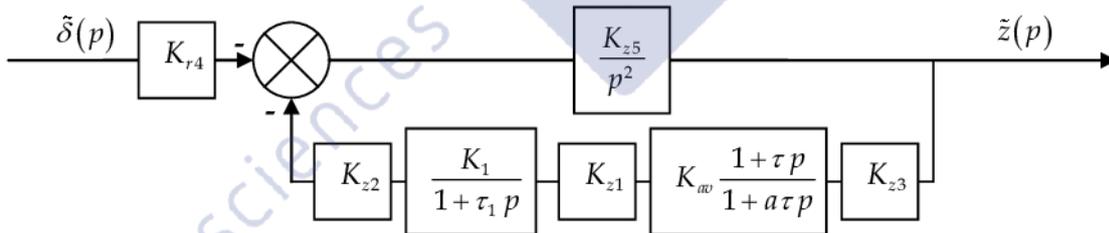
La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 2 ; l'erreur en régime établi à un échelon de position est donc nulle. On peut le vérifier en appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\tilde{z}_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{z_0}{p} [1 - H_{al}(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} z_0 \left[\frac{1}{1 + H_{boal}(p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} z_0 \left[\frac{1}{1 + \frac{K_{av} K_{z1} K_1 K_{z2} K_{z5} K_{z3} (1 + \tau p)}{p^2 (1 + a \tau p) (1 + \tau_1 p)}} \right] = 0$$

- En régulation ($\tilde{z}_c(t) = z_0$, soit $\tilde{z}_c(p) = 0$), le schéma bloc prend la forme suivante :



Soit, en prenant en compte la forme des fonctions de transfert :



La fonction de transfert en aval de la perturbation $\left(\frac{K_{z5}}{p^2}\right)$ est de classe 2 ; celle en amont de la perturbation $\left(\frac{K_1 K_{z1} K_{z2} K_{z3} K_{av} (1 + \tau p)}{(1 + \tau_1 p) (1 + a \tau p)}\right)$ est d'ordre 2 et de classe 0 ; l'erreur en régime établi

devant un échelon de perturbation est alors : $\tilde{z}_\infty = - \underbrace{\left(\frac{1}{K_1 K_{z1} K_{z2} K_{z3} K_{av}}\right)}_{\text{inverse du gain de la fonction de transfert amont de la perturbation}} K_{r4} \delta_g$.

On peut le vérifier en appliquant le théorème de la valeur finale : $\tilde{z}_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\delta_g}{p} H_{régulal}(p)$;

$$\tilde{z}_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \delta_g \left[\frac{\frac{K_{z5}}{p^2}}{1 + \frac{K_1 K_{z1} K_{z2} K_{z3} K_{av} (1 + \tau p) \cdot K_{z5}}{(1 + \tau_1 p)(1 + a\tau p) p^2}} \cdot K_{r4} \right] = \delta_g \left[\frac{K_{r4}}{K_1 K_{z1} K_{z2} K_{z3} K_{av}} \right]$$

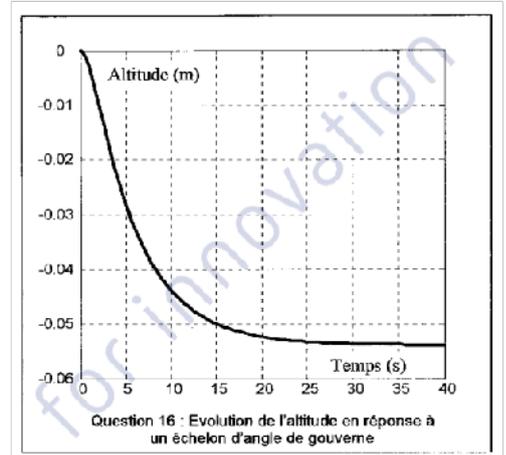
Au final ; l'erreur d'altitude en régime établi sous une consigne en échelon z_0 et une perturbation en échelon δ_g est : $\tilde{z}_\infty = -\frac{K_{r4}}{K_1 K_{z1} K_{z2} K_{z3} K_{av}} \delta_g$

Le tracé donné représente l'évolution de l'altitude au cours du temps, sous un échelon de perturbation unitaire des gouvernes ($\delta_g = 1$). Le drone se stabilise à une altitude $\tilde{z}_\infty = -54 \text{ mm}$.

On en déduit : $K_{r4} = -K_1 K_{z1} K_{z2} K_{z3} K_{av} \cdot \tilde{z}_\infty$

A.N. : L'application numérique n'est pas possible : il manque les valeurs de plusieurs constantes.

Q17 : Correcteur anticipatif des perturbations en altitude dues aux gouvernes



Dans le cas d'un fonctionnement en régulation ($\tilde{z}_c(p) = 0$), le schéma correctif proposé se transcrit à l'aide des trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_z(p) = -K_{z3} \tilde{z}(p) \\ \tilde{u}(p) = C_z(p) \varepsilon_z(p) + C_{antz}(p) \tilde{\delta}(p) \\ \tilde{z}(p) = H_2(p) [K_{z2} H_1(p) K_{z1} \tilde{u}(p) - K_{r4} \tilde{\delta}(p)] \end{cases}$$

On en tire l'égalité suivante :

$$[1 + K_{z3} H_2(p) K_{z2} H_1(p) K_{z1} C_z(p)] \varepsilon_z(p) = -[K_{z3} H_2(p) (K_{z2} H_1(p) K_{z1} C_{antz}(p) - K_{r4})] \tilde{\delta}(p)$$

On souhaite rejeter complètement toute perturbation, ce qui impose : $\varepsilon_z(p) = 0, \forall \tilde{\delta}(p)$; alors,

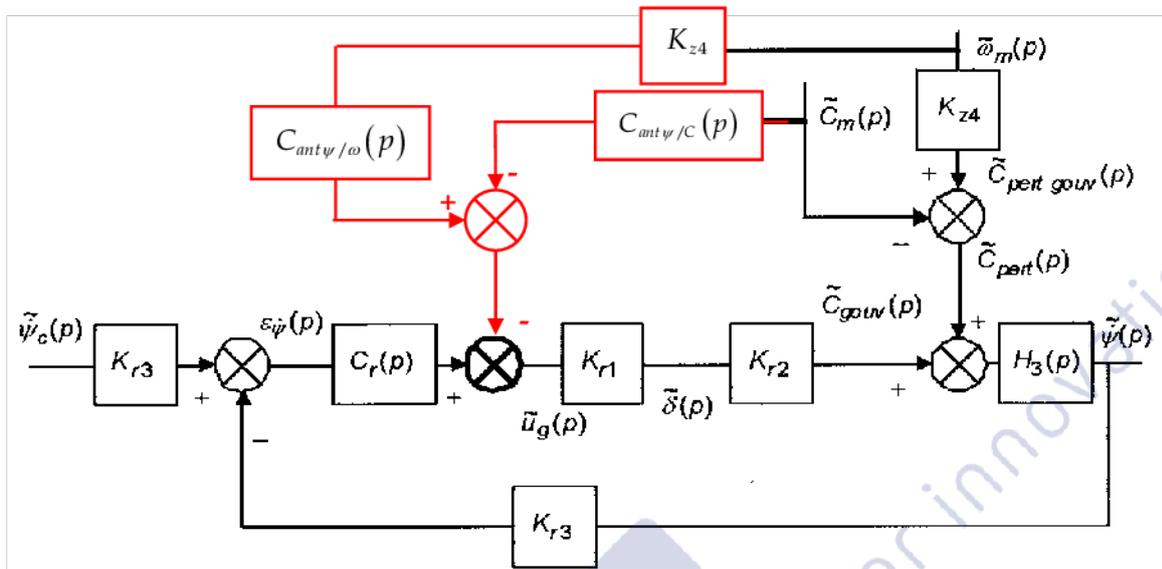
$$K_{z3} H_2(p) (K_{z2} H_1(p) K_{z1} C_{antz}(p) - K_{r4}) \text{ et donc } C_{antz}(p) = \frac{K_{r4} (1 + \tau_1 p)}{K_{z2} K_1 K_{z1}}, \text{ correcteur dérivé.}$$

Le gain d'un tel correcteur doit augmenter de +20 dB/décade lorsque la pulsation ω croît, ce qui est matériellement impossible à réaliser.

Q18 : Correcteur anticipatif des perturbations en lacet dues à la dynamique de l'arbre d'hélice

- En premier lieu, on doit placer les gains des capteurs K_{C_m} et K_{ω} permettant de connaître respectivement le couple moteur \tilde{C}_m et la vitesse de rotation du moteur $\tilde{\omega}_m$; toutefois, pour être cohérent avec la structure proposée à la question précédente, on supposera ces gains inclus dans les correcteurs.
- On tient compte, en aval de la mesure de $\tilde{\omega}_m$, de la constante de couplage K_{z4} .
- On introduit deux correcteurs anticipatifs de lacet : $C_{ant\psi/\omega}(p)$, dont l'entrée est le couple perturbateur du à la vitesse de rotation de l'hélice et $C_{ant\psi/C}(p)$, dont l'entrée est le couple moteur.

D'où le schéma ci-après :



En régulation ($\tilde{\psi}_c(p) = 0$), la structure ci-dessus se traduit par les trois équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\tilde{\psi}}(p) = -K_{r3} \tilde{\psi}(p) \\ \tilde{u}_g(p) = C_r(p) \varepsilon_{\tilde{\psi}}(p) - C_{ant\psi/\omega}(p) K_{z4} \tilde{\omega}_m(p) + C_{ant\psi/C}(p) \tilde{C}_m(p) \\ \tilde{\psi}(p) = H_3(p) [K_{r2} K_{r1} \tilde{u}_g(p) + K_{z4} \tilde{\omega}_m(p) - \tilde{C}_m(p)] \end{cases}$$

On en tire l'égalité suivante :

$$\left[\frac{1 + K_{r3} H_3(p) K_{r2} K_{r1} C_r(p)}{K_{r3} H_3(p)} \right] \varepsilon_{\tilde{\psi}}(p) = - [K_{z4} (1 - C_{ant\psi/\omega}(p) K_{r2} K_{r1}) \tilde{\omega}_m(p) + (C_{ant\psi/C}(p) K_{r2} K_{r1} - 1) \tilde{C}_m(p)]$$

On souhaite rejeter complètement toute perturbation, ce qui impose : $\varepsilon_{\tilde{\psi}}(p) = 0, \forall \tilde{C}_m(p)$ et $\forall \tilde{\omega}_m(p)$; ceci nécessite le respect des relations suivantes $1 - C_{ant\psi/\omega}(p) K_{r2} K_{r1} = 0$ et $C_{ant\psi/C}(p) K_{r2} K_{r1} - 1 = 0$

Dans une telle structure, on constate que les deux correcteurs anticipatifs sont des correcteurs proportionnels identiques : $C_{ant\psi/\omega}(p) = C_{ant\psi/C}(p) = \frac{1}{K_{r2} K_{r1}}$

Q19 : Efficacité des structures anticipatives

Les structures anticipatives en vitesse de lacet étant des gains purs, leur réalisation ne posera pas de problème ; on peut s'attendre à une bonne efficacité de la correction des effets du couplage, y compris en régime transitoire.

Par contre, le correcteur anticipatif d'altitude déterminé est un correcteur dérivé irréalisable :

$C_{antz}(p) = \frac{K_{r4}(1 + \tau_1 p)}{K_{z2} K_1 K_{z1}}$. Il convient de proposer un correcteur techniquement faisable ; par exemple,

$C_{antz}(p) = \frac{K_{r4}(1 + \tau_1 p)}{K_{z2} K_1 K_{z1}(1 + \tau_d p)}$, avec $\tau_d \ll \tau_1$, est un correcteur dont le gain est constant quand la pulsation tend vers l'infini. Bien évidemment, la correction ainsi réalisée ne sera pas idéale, notamment lors des variations rapides des positions angulaires des gouvernes.