

Proposition de corrigé

Concours : e3a - Polytech

Année : 2010

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

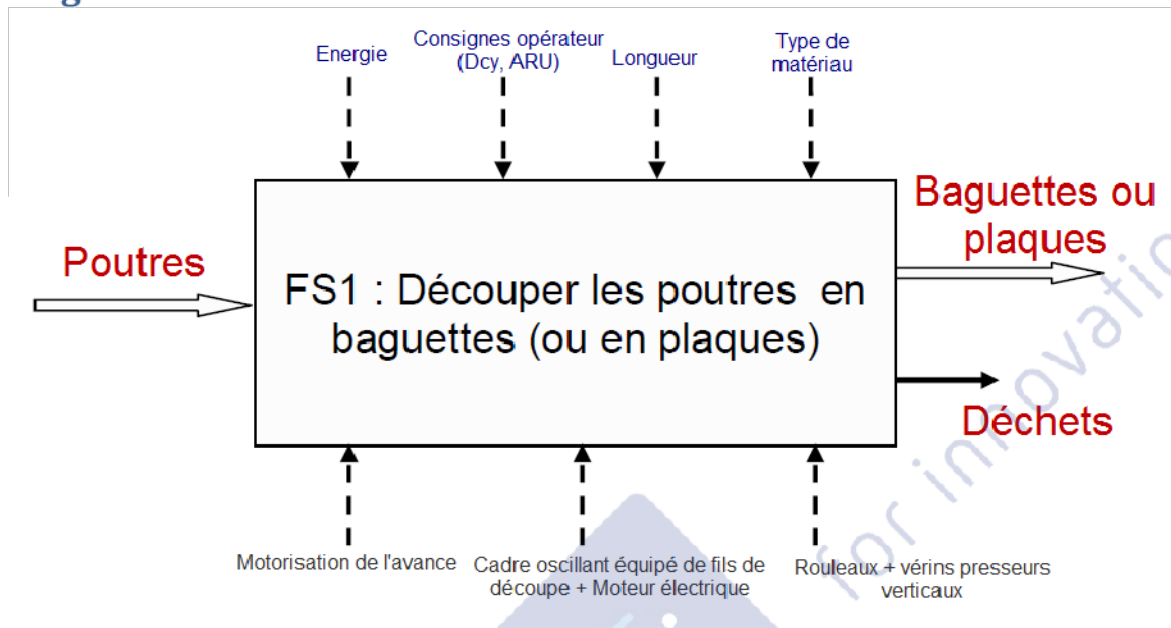
En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Q1-1 : Diagramme SADT



Q2-1 : Hyperstatisme

Le graphe des liaisons du système étudié est donné ci-contre.

Le nombre de mobilités cinématiques de ce système est $m_c = 1$, c'est-à-dire une seule mobilité utile ou loi entrée/sortie.

En effet, si on écrit une fermeture cinématique du système on a :

$$\{V_{1/0}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{0/3}\} = \{0\}$$

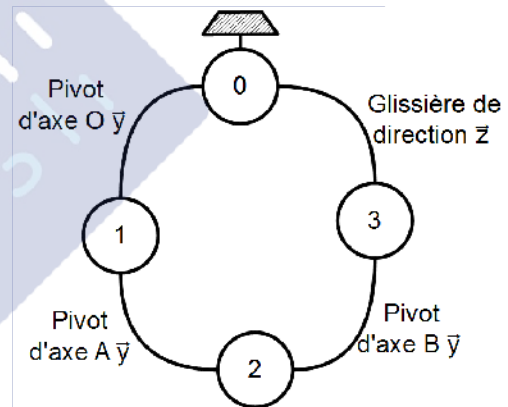
$$\text{Soit, en } O : \begin{Bmatrix} \omega_{1/0} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} \omega_{2/1} \cdot \vec{y} \\ V_{x(O \in 2/1)} \cdot \vec{x} + V_{z(O \in 2/1)} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} \omega_{3/2} \cdot \vec{y} \\ V_{x(O \in 3/2)} \cdot \vec{x} + V_{z(O \in 3/2)} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{z(O \in 0/3)} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_O = \{0\}.$$

Le rang du système d'équations cinématiques à $I_c = 4$ inconnues est donc $r_c = 3$ (Une équation de résultante cinématique en \vec{x} et deux équations de moment, en \vec{x} et \vec{z}). D'où $m_c = I_c - r_c = 1$.

Comme le nombre cyclomatique du système est $\mu = 1$. On a donc $h = m_c + 6 \cdot \mu - I_c = 3$.

Du point de vue statique, on a $I_s = 20$ inconnues pour $n_p = 4$ pièces, soit $h = I_s - (6 \cdot (n_p - 1) - m_c) = 3$

On peut remarquer qu'une étude faite avec la modélisation plane donne $h = 0$.



Q2-2 : Solution isostatique

En utilisant le point de vue cinématique, il faut diminuer la valeur de $m_c - I_c$ de 3.

En remplaçant les liaisons L_{2-1} et L_{3-2} par des rotules, on obtient $I_c = 8$, mais on rajoute dans les torseurs cinématiques exprimés en O deux composantes de résultante en \vec{x} et \vec{z} et une composante de moment en \vec{y} . Le rang du système d'équations cinématiques est donc alors $r_c = 6$ soit $m_c = 2$ ce qui traduit la présence d'une mobilité interne (rotation de la pièce 2 autour de l'axe (AB)). Donc $\boxed{h = 0}$.

Autre solution : on peut aussi remplacer la liaison en A ou B par une sphère cylindre / linéaire annulaire d'axe parallèle à \vec{y} . On ajoute 3 inconnues cinématiques sans ajouter de mobilité interne.

Les rotules peuvent être réalisées par l'utilisation de composants standardisés (coussinets sphériques, rotules lisses), on en considérant du jeu dans les liaisons pivot.

Q2-3 : Fermeture géométrique

Remarque : il y a une contradiction entre fixer la vitesse de la bielle à 2000 tr/mn et indiquer qu'à $t=0$, $\dot{\theta} = 0$.

On écrit la fermeture géométrique : $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$

En projection sur \vec{z} : $OA \cdot \cos \theta + AB \cdot \cos \beta - OB = 0$, soit $\boxed{OB = R \cdot \cos \theta + L \cdot \cos \beta}$.

Si β est petit, on a $\cos \beta \approx 1$, d'où $\boxed{OB = R \cdot \cos \theta + L}$.

Q2-4 : Vitesse

En dérivant l'expression approchée de la question précédente, on obtient la valeur algébrique en projection sur \vec{z} de la vitesse:

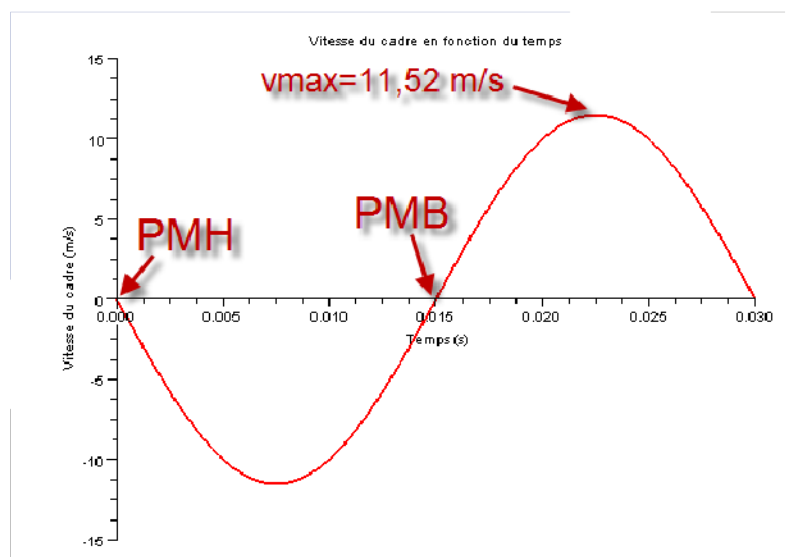
$$\boxed{v_{cadre/bâti} = \frac{d(OB)}{dt} = -R \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta}$$

Q2-5 : Tracé

On a $\dot{\theta} = 2000 \approx 210 \text{ rad/s}$, d'où une vitesse maximale $v_{maxi \text{ cadre/bâti}} = \dot{\theta} \cdot R = 11,52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La fréquence du mouvement est donc $F = \frac{2000}{60} \text{ Hz}$

D'où une période $\boxed{T = \frac{1}{F} = 30 \text{ ms}}$.



Q2-6 : Composantes des forces

On isole le système $S = \{\text{Vilebrequin}; \text{bielle}; \text{cadre}\}$.

La résultante dynamique du système est :

$$\vec{R}_d(S/R) = M_v \cdot \vec{\Gamma}(O \in \text{Vilebrequin}/0) + \frac{M_b}{2} \cdot \vec{\Gamma}(A \in \text{Bielle}/0) + \frac{M_b}{2} \cdot \vec{\Gamma}(B \in \text{Bielle}/0) + M_c \cdot \vec{\Gamma}(B \in \text{Cadre}/0)$$

- $\vec{\Gamma}(O \in \text{Vilebrequin}/0) = \vec{0}$
- $\vec{\Gamma}(A \in \text{Bielle}/0) = -\frac{(R \cdot \dot{\theta})^2}{R} \cdot \vec{z}_1 = -R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{z}_1$
- $\vec{\Gamma}(B \in \text{Bielle}/0) = -R(\cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \sin \theta \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{z}$ avec $\dot{\theta} = \text{cste}$, soit $\vec{\Gamma}(B \in \text{Bielle}/0) = -R \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{z}$
- $\vec{\Gamma}(B \in \text{Bielle}/0) = \vec{\Gamma}(B \in \text{Cadre}/0)$ en application de la loi de composition des vitesses

Donc $\vec{R}_d(S/R) = -R \cdot \frac{M_b}{2} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{z}_1 - R \cdot \left(\frac{M_b}{2} + M_c\right) \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{z}$:

Bilan des actions mécaniques :

- Les poids des différentes pièces sont négligés.
- On est en régime établi, d'où l'hypothèse du sujet de couple moteur nul.
- Restent les deux actions de liaison :

$$\{\mathcal{T}_{\text{Bâti} \rightarrow \text{Cadre}}\} = \begin{Bmatrix} X_{(b \rightarrow c)} \cdot \vec{x} \\ M_{(b \rightarrow c)} \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_B \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{\text{Bâti} \rightarrow \text{Vilb.}}\} = \begin{Bmatrix} X_{(b \rightarrow v)} \cdot \vec{x} + Z_{(b \rightarrow v)} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

Principe fondamental de la dynamique, théorème de la résultante en projection sur \vec{x} et \vec{z} :

$$\begin{cases} X_{(b \rightarrow c)} + X_{(b \rightarrow v)} = -R \cdot \frac{M_b}{2} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta \\ Z_{(b \rightarrow v)} = -R \cdot \frac{M_b}{2} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta - R \cdot \left(\frac{M_b}{2} + M_c\right) \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} H = R \cdot \frac{M_b}{2} \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ V = R \cdot (M_b + M_c) \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 \end{cases}$$

Q2-7 : Application numérique

On a $\dot{\theta} = 209,44 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

D'où

$$\begin{cases} H_{max} = R \cdot \frac{M_b}{2} \cdot \dot{\theta}^2 = 965 \text{ N} \\ V_{max} = R \cdot (M_b + M_c) \cdot \dot{\theta}^2 = 23400 \text{ N} \end{cases}$$

Q2-8 Equilibrage

Déplacer le centre d'inertie du vilebrequin et le modéliser par une masse ponctuelle M_v revient à ajouter à la résultante dynamique le terme :

$$M_v \cdot \vec{\Gamma}(C \in \text{Vilebrequin} / 0) = M_v \cdot d \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{z}_1$$

On a alors $V = R \cdot (M_b + M_c) \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - M_v \cdot d \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta$

$$\text{Donc } V = 0 \forall (\theta, \dot{\theta}) \Rightarrow \boxed{M_v \cdot d = R \cdot (M_b + M_c)}$$

Q2-9 : Equilibrage horizontal

De même que précédemment, on obtient : $H = R \cdot \frac{M_b}{2} \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 - M_v \cdot d \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta$

En remplaçant $M_v \cdot d$ par la valeur de la question précédente, on a :

$$\boxed{H = -R \cdot \left(\frac{M_b}{2} + M_c \right) \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2}$$

La valeur maximale de H est alors $H_{max} = 22437 \text{ N}$, ce qui est supérieur à la valeur limite de 3500N. L'équilibrage n'est pas satisfaisant.

Q2-10 : Cadre allégé

En prenant $M_c = 1 \text{ kg}$ et $d=0$, on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} H_{max} = 965 \text{ N} \\ V_{max} = 4343 \text{ N} \end{array}}$$

La valeur maximale de H est inchangée puisque M_c n'y intervient pas. V_{max} a diminué mais est encore au dessus du critère imposé.

Q2-11 : Equilibrage

En application de Q2-8, on obtient : $\boxed{d \cdot M_v = 0,099 \text{ kg} \cdot \text{m}}$

Soit $\boxed{H_{max} = 3377 \text{ N}}$. L'équilibrage est alors satisfaisant.

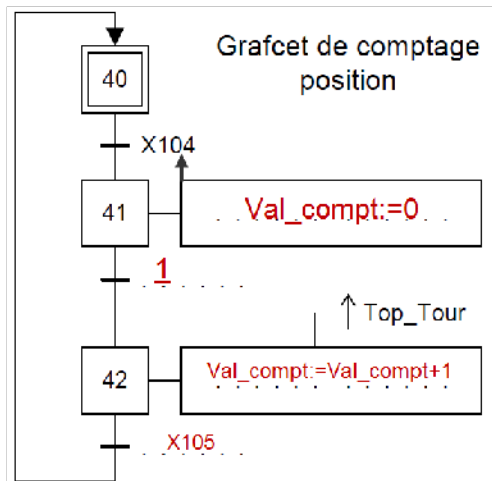
Q2-12 : Vérification

Suivant les cas, le poids P_c du cadre vaut $P_c = 87,3 \text{ N}$ (cadre de 8,9 kg) ou $P_c = 9,81 \text{ N}$ (cadre de 1 kg).

Le poids P_b de la bielle vaut $P_b = 7,85 \text{ N}$.

Même dans le cas d'un système équilibré, ces valeurs sont inférieures aux valeurs maximales de H, donc aux effets d'inertie.

Q3-1 : Graficet de comptage



On peut noter que le document réponse, en Q3-5, propose « Tempo 2s » et « Test étape Xi » et « Val_compt » comme entrées et sorties de l'API, alors que ce sont des variables internes à celui-ci.

Q3-2 : Distance α

Soit R_p le rayon de la poulie et θ_p l'angle parcouru par la poulie pour un tour du moteur.

On $\alpha = \theta_p \cdot R_p$, d'où $\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{187,5} \cdot 30 = 1,01 \text{ mm}$.

Q3-3 : Valeur finale

Dans la position correspondant à cette valeur, il ne reste que X_2 millimètres de poutre devant BA_1 , soit $X_{long i} - X_2$ millimètres dans le système en aval de BA_1 .

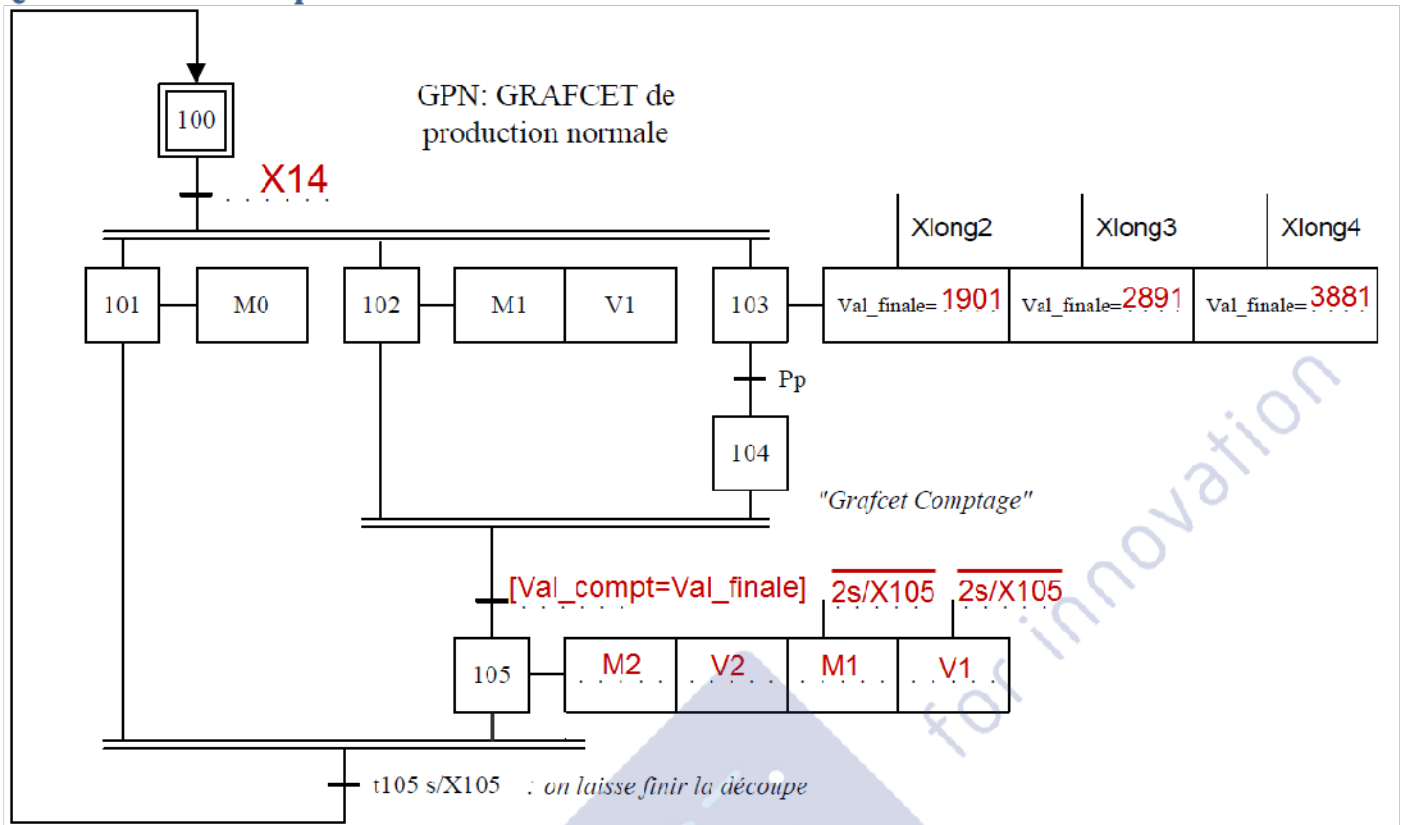
La longueur parcourue depuis P_p est donc égale à : $X_{long i} - X_2 - (X_1 - X_0)$.

Donc $Val_finale = \frac{X_{long i} - X_2 - (X_1 - X_0)}{\alpha}$.

Q3-4 : Application numérique

$X_{long i}$	Valeur finale
2 m	1901
3 m	2891
4 m	3881

Q3-5 : Grafcet de production normale



Q3-6 Temps d'attente

A l'activation de l'étape 105, il reste X_2 millimètres de poutre devant BA₁, soit à parcourir $X_2 + \frac{X_1}{2} = 240 \text{ mm}$ à 3m/mn. Soit :

$$t_{105} \geq \frac{0,24}{\frac{3}{60}} = 4,8 \text{ s}$$

Q3-7 Solution alternative

Pour éviter le comptage, on peut placer un capteur de présence sur la contre plaque 1 à X_2 millimètres en amont de la fin de BA₁. Si ce capteur est par exemple actif au niveau haut, un front descendant du signal qu'il délivre indiquera l'instant auquel sortir le vérin V₂.

Q4-1 : Forcé d'appui

La poutre se déplace en translation rectiligne uniforme. Le torseur dynamique de la poutre par rapport au bâti est donc nul : $\{D_{poutre/0}\} = \{0\}$.

On isole la poutre. Les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées, toutes modélisées par des glisseurs, sont :

- Son poids
- La force résistante totale
- L'action de la bande BA₁
- L'effort du vérin presseur V₃
- La réaction de la contre-plaque

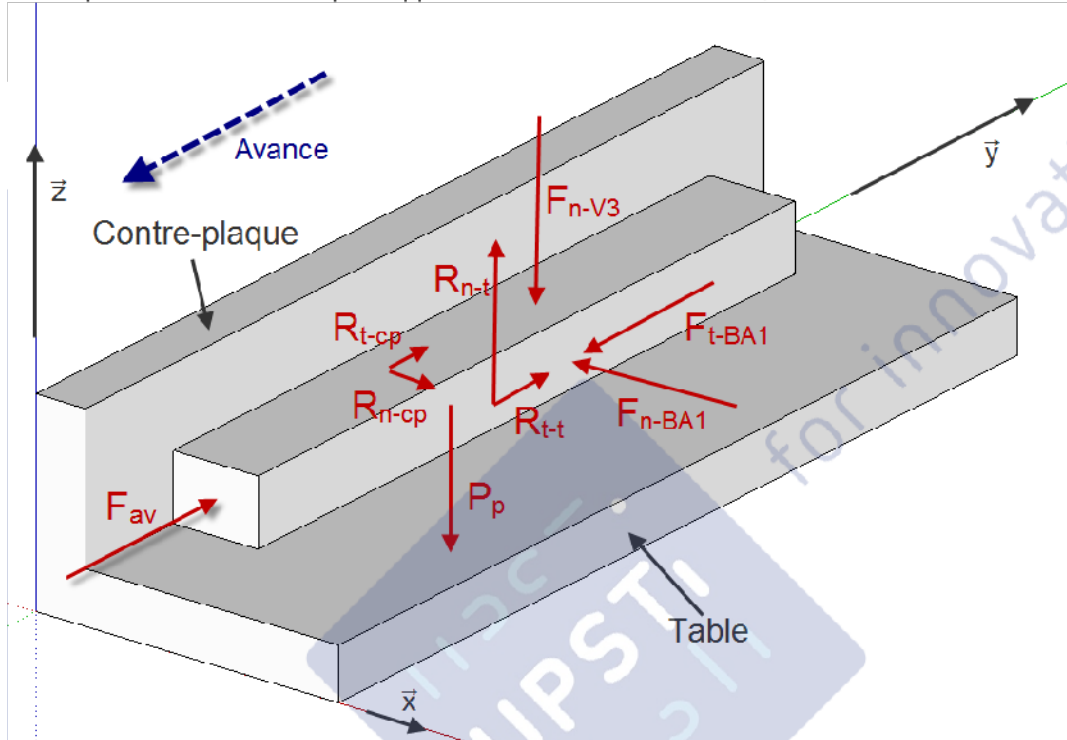
- La réaction de la table

NB : Les composantes des résultantes sont toutes exprimées en valeur absolue.

On nomme R_{t-cp} et R_{n-cp} les composantes respectivement tangentielle et normale de la réaction de la contre-plaque sur la poutre.

On nomme R_{t-t} et R_{n-t} les composantes respectivement tangentielle et normale de la réaction de la table sur la poutre.

En orientant les composantes des efforts par rapport au mouvement d'avance, on obtient :



On applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur les trois axes :

$$\begin{aligned} \text{En } \vec{x}: & \quad (1) R_{n-cp} - F_{n-BA_1} = 0 \\ \text{En } \vec{y}: & \quad (2) F_{av} + R_{t-cp} - F_{t-BA_1} + R_{t-t} = 0 \\ \text{En } \vec{z}: & \quad (3) R_{n-t} - F_{n-v_3} - P_p = 0 \end{aligned}$$

La poutre glisse sur la table et la contre plaque, on a donc :

$$(4) \frac{R_{t-cp}}{R_{n-cp}} = f_2 \quad \text{et} \quad (5) \frac{R_{t-t}}{R_{n-t}} = f_3$$

Enfin, la condition de non glissement de la poutre sur la bande impose (6) $\frac{F_{t-BA_1}}{F_{n-BA_1}} \leq f_1$.

(3) et (5) imposent que $R_{t-t} = f_3 \cdot (F_{n-v_3} + P_p)$

(1) et (4) imposent que $R_{t-cp} = f_2 \cdot F_{n-BA_1}$

D'où (2) qui donne : $F_{av} + f_2 \cdot F_{n-BA_1} - F_{t-BA_1} + f_3 \cdot (F_{n-v_3} + P_p) = 0$

L'inégalité (6) impose donc $\frac{F_{t-BA_1}}{F_{n-BA_1}} = \frac{F_{av} + f_3 \cdot (F_{n-v_3} + P_p)}{F_{n-BA_1}} + f_2 \leq f_1$

$$\text{D'où } \boxed{F_{n-BA_1} \geq \frac{F_{av} + f_3 \cdot (F_{n-v_3} + P_p)}{f_1 - f_2}}$$

$$\text{Application numérique : } \boxed{F_{n-BA_1} \geq 64,9 \text{ N}}$$

Q4-2 : Force d'avance

D'après la question précédente, on a : $F_{av} + f_2 \cdot F_{n-BA_1} - F_{t-BA_1} + f_3 \cdot (F_{n-V_3} + P_p) = 0$.

$$\text{D'où : } \boxed{F_{av} + f_2 \cdot F_{n-BA_1} + f_3 \cdot (F_{n-V_3} + P_p) = F_{t-BA_1}}$$

Application numérique, pour une force d'appui de 70 N : $\boxed{F_{t-BA_1} = 66,5 \text{ N}}$

On vérifie bien la condition de non glissement de la bande.

Q4-3 : Vérification du moteur

La puissance nécessaire à la coupe est $P_c = 10,5 \cdot \frac{3}{60} = 0,525 \text{ W}$.

Si on considère qu'il n'y a pas glissement de la poutre sur la bande, la puissance P_m à développer par le moteur est :

$$\boxed{P_m = \frac{P_c}{\eta_{pc} \cdot \eta_r} = 0,94 \text{ W}}$$

Le moteur délivre une puissance suffisante.

On a de plus $P_m = C_m \cdot \Omega_m$.

On détermine $\Omega_m = \frac{1}{r} \cdot \frac{V}{R_B} = 312,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 2984 \text{ tr} \cdot \text{mn}^{-1}$. Cette vitesse correspond à la vitesse nominale du moteur.

On a donc $\boxed{C_m = \frac{P_m}{\Omega_m} = 0,003 \text{ N} \cdot \text{m}}$, qui est donc inférieur au couple maximal que peut délivrer le moteur.

Le moteur convient, tant du point de vue vitesse, que du point de vue couple, donc puissance.

Q4-4 : Relation cinématique

Conformément aux réponses de la question précédente :

$$\boxed{\Omega_B = \frac{V}{R_B}} \text{ et } \boxed{\Omega_B = r \cdot \Omega_m}$$

Q4-5 : Système à isoler

On isole l'ensemble des pièces mobiles, soit un seul ensemble Σ contenant :

- Poutre
- Bande
- Rouleaux
- Réducteur
- Arbre moteur

Q4-6 : Energie cinétique

L'énergie cinétique de Σ est la somme des énergies cinétiques de ses éléments constitutifs qui sont animés de mouvements de translation rectiligne ou de rotation autour d'un axe fixe. L'énergie cinétique de chaque élément s'exprime donc simplement. Si on note $T(\Sigma / 0)$ l'énergie cinétique du système par rapport au repère fixe, supposée galiléen, on a :

$$2 \cdot T(\Sigma / 0) = 2 \cdot J_{rouleaux} \cdot \Omega_B^2 + J_{entrée-réducteur} \cdot \Omega_m^2 + M_p \cdot V^2 + J_M \cdot \Omega_m^2$$

En appliquant les relations précédentes et en factorisant Ω_m^2 on obtient :

$$2 \cdot T(\Sigma / 0) = \Omega_m^2 \cdot (2 \cdot J_{rouleaux} \cdot r^2 + J_{entrée-réducteur} + M_p \cdot R_B^2 \cdot r^2 + J_M)$$

On retrouve l'expression de l'inertie équivalente du système ramenée à l'arbre moteur.

Q4-7 : Puissances mécaniques extérieures

Les puissances extérieures galiléennes appliquées au système sont :

- Puissance des actions résistant à l'avancement de la poutre.
- Puissance fournie par le moteur.

Ces puissances sont effectivement des grandeurs algébriques. Les résultantes soient définies en valeur absolue, il faut adapter le signe de chaque puissance en conséquence.

$$\text{Soit } P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0) = -(f_2 \cdot F_{n-BA_1} + f_3 \cdot (F_{n-v_3} + P_p) + F_{av}) \cdot V + C_m \cdot \Omega_m$$

$$\text{D'où } P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0) = \Omega_m \cdot (C_m - R_B \cdot r \cdot (f_2 \cdot F_{n-BA_1} + f_3 \cdot (F_{n-v_3} + P_p) + F_{av}))$$

Q4-8 : Puissances intérieures

Soit P_r la puissance perdue dans le réducteur :

$$P_r = (\eta_r - 1) \cdot C_m \cdot \Omega_m$$

Soit P_{pc} la puissance perdue dans le système poulie-courroie :

$$P_{pc} = (\eta_{pc} - 1) \cdot \eta_r \cdot C_m \cdot \Omega_m$$

Q4-9 : Théorème de l'énergie cinétique

En conséquence des questions précédentes, on a :

$$\frac{dT(\Sigma / 0)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0) + P_r + P_{pc}$$
$$\frac{dT(\Sigma / 0)}{dt} = \Omega_m \cdot \dot{\Omega}_m \cdot (2 \cdot J_{rouleaux} \cdot r^2 + J_{entrée-réducteur} + M_p \cdot R_B^2 \cdot r^2 + J_M)$$

$$\text{Donc } C_m = \frac{\dot{\Omega}_m \cdot (2 \cdot J_{rouleaux} \cdot r^2 + J_{entrée-réducteur} + M_p \cdot R_B^2 \cdot r^2 + J_M) + R_B \cdot r \cdot (f_2 \cdot F_{n-BA_1} + f_3 \cdot (F_{n-v_3} + P_p) + F_{av})}{1 + (\eta_r - 1) + (\eta_{pc} - 1) \cdot \eta_r}$$

Q4-10 : Application numérique

On suppose que le démarrage se fait à accélération constante, soit $\dot{\Omega}_m = \frac{3000 \cdot 2 \cdot \pi}{60 \cdot 0,1} = 1000 \cdot \pi = 3142 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

La masse de la poutre est $M_p = 4 \cdot 0,11 \cdot 0,11 \cdot 140 = 6,78 \text{ kg}$.

Le moment d'inertie du moteur est $J_M = 11 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

D'où $C_m = 0,0928 \text{ N} \cdot \text{m}$, cette valeur est supérieure au couple maximal que peut fournir le moteur, qui ne convient donc pas.

Q4-11 : Inertie équivalente

L'inertie équivalente J_{eq} vaut $J_{eq} = 2 \cdot J_{rouleaux} \cdot r^2 + J_{entrée-réducteur} + M_p \cdot R_B^2 \cdot r^2 + J_M$.

D'où $J_{eq} = 1,32 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

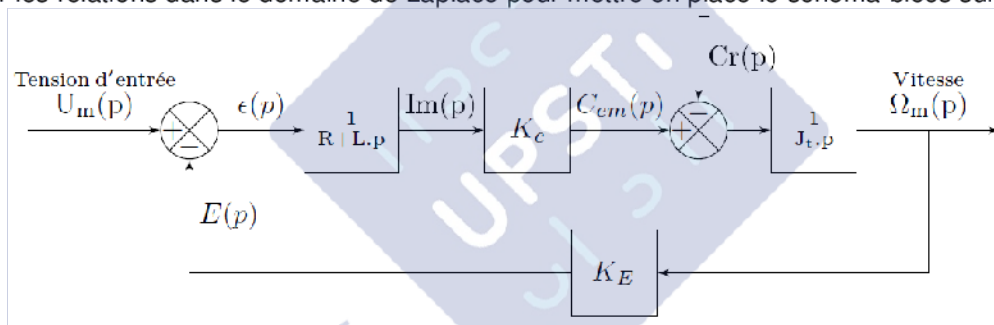
Le moteur représente 83% de l'inertie ramenée sur l'arbre, du fait de la faible inertie du réducteur et du rapport de réduction important qui divise l'inertie des rouleaux et de la poutre par un facteur $35 \cdot 10^3$.

Q5A-1 : Vitesse du rotor

Conformément aux réponses précédentes : $\Omega_m = \frac{\Omega_r}{r} = \frac{V}{r \cdot R_B}$

Q5A-2 : Equation de vitesse

On peut exploiter les relations dans le domaine de Laplace pour mettre en place le schéma-blocs suivant :



NB : Considérant que l'annexe G indique que la constante de vitesse du moteur est K_E , et pour qu'il n'y ait pas confusion avec la constante K_Ω de la question Q5A-3, j'utilise la notation de l'annexe G.

En appliquant la formule de Black, par superposition en prenant successivement $C_r(p) = 0$ et $U_m(p)$, on obtient :

$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{K_c}{(R + L \cdot p) \cdot J_t \cdot p}}{1 + \frac{K_c \cdot K_E}{(R + L \cdot p) \cdot J_t \cdot p}} \cdot U_m(p) - \frac{1}{J_t \cdot p + \frac{K_c \cdot K_E}{R + L \cdot p}} \cdot C_r(p)$$

Soit, après réduction au même dénominateur des facteurs de $U_m(p)$ et $C_r(p)$:

$$((R + L \cdot p) \cdot J_t \cdot p + K_c \cdot K_E) \cdot \Omega_m(p) = K_c \cdot U_m(p) - (R + L \cdot p) \cdot C_r(p)$$

Soient p_e et p_m les deux racines, supposées réelles, du polynôme :

$$(R + L \cdot p) \cdot J_t \cdot p + K_c \cdot K_E = J_t \cdot L \cdot \left(p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{K_c \cdot K_E}{J_t \cdot L} \right)$$

On a alors $\tau_e = -\frac{1}{p_e}$ et $\tau_m = -\frac{1}{p_m}$, d'où, en considérant $\tau_e < \tau_m$:

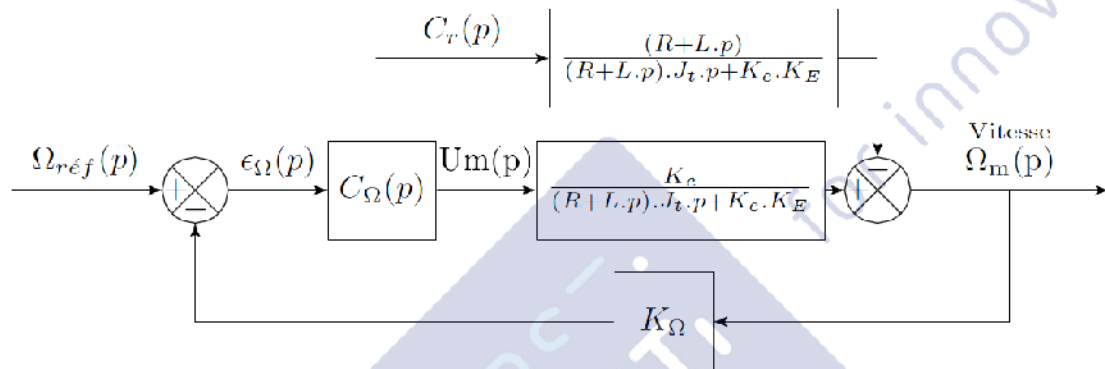
$$\tau_m = \frac{2}{\frac{R}{L} - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4 \cdot K_c \cdot K_E}{J_t \cdot L}}}$$

$$\tau_e = \frac{2}{\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4 \cdot K_c \cdot K_E}{J_t \cdot L}}}$$

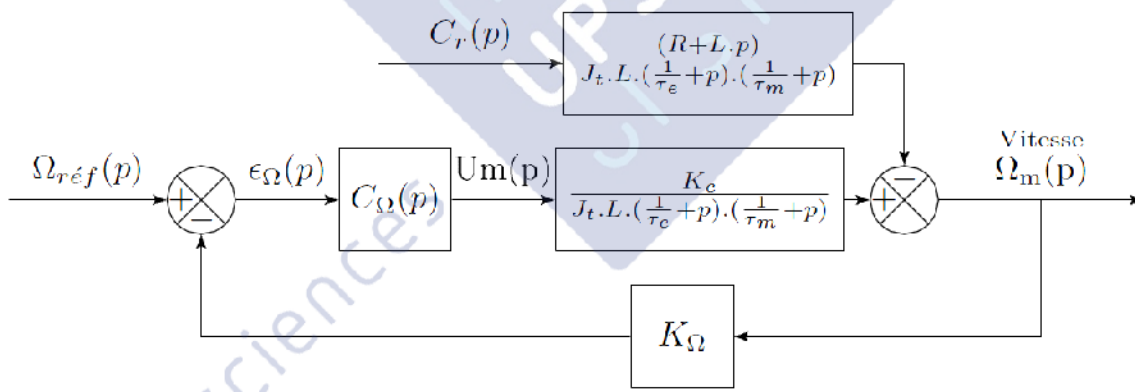
D'où la forme $\Omega_m(p) \cdot J_t \cdot L \cdot \left(\frac{1}{\tau_e} + p\right) \cdot \left(\frac{1}{\tau_m} + p\right) = K_c \cdot U_m(p) - (R + L \cdot p) \cdot C_r(p)$

Q5A-3 : Régulation de vitesse

En application de l'équation établie précédemment, on peut construire le schéma-blocs suivant, en utilisant cette fois-ci la valeur K_Ω à sa place :



Ou encore :



Q5A-4 : Expression de $\Omega_m(p)$

On a donc : $\Omega_m(p) = - \frac{(R+L \cdot p)}{J_t \cdot L \cdot \left(\frac{1}{\tau_e} + p\right) \cdot \left(\frac{1}{\tau_m} + p\right) + K_\Omega \cdot K_c \cdot C_\Omega(p)} \cdot C_r(p)$

Ou encore : $\Omega_m(p) = - \frac{(R+L \cdot p)}{(R+L \cdot p) \cdot J_t \cdot p + K_c \cdot K_E + K_\Omega \cdot K_c \cdot C_\Omega(p)} \cdot C_r(p)$

Q5A-5 : Correcteurs et valeurs finales

On a $\Omega_{m\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{C_{r0}}{p} \cdot \frac{-(R+L \cdot p)}{J_t \cdot L \cdot \left(\frac{1}{\tau_e} + p\right) \cdot \left(\frac{1}{\tau_m} + p\right) + K_\Omega \cdot K_c \cdot C_\Omega(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{C_{r0}}{p} \cdot \frac{-(R+L \cdot p)}{(R+L \cdot p) \cdot J_t \cdot p + K_c \cdot K_E + K_\Omega \cdot K_c \cdot C_\Omega(p)}$

- Correcteur proportionnel :

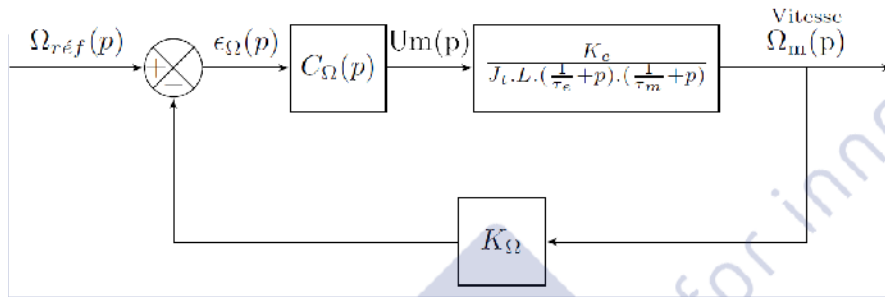
Si $C_{\Omega}(p) = C_{\Omega 0}$, on a
$$\Omega_{m\infty} = \frac{-C_{r0} \cdot R}{\frac{J_t \cdot L}{\tau_e \tau_m} + K_{\Omega} \cdot K_c \cdot C_{\Omega 0}} = \frac{-C_{r0} \cdot R}{K_c \cdot K_E + K_{\Omega} \cdot K_c \cdot C_{\Omega 0}}$$

- Correcteur intégral :

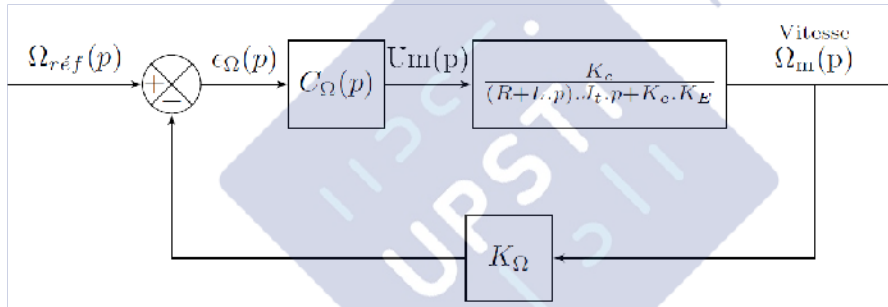
Si $C_{\Omega}(p) = \frac{C_{\Omega 0}}{p}$, on a
$$\Omega_{m\infty} = 0$$
.

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 et le correcteur intégral est placé en amont de la perturbation. Celle-ci est donc sans influence sur l'erreur statique.

Si on considère que le couple résistant est nul, on obtient :



Ou encore :



Q5A-6 : Fonction de transfert en boucle ouverte

On a donc directement :
$$T_{\Omega}(p) = \frac{C_{\Omega 0} \cdot K_{\Omega} \cdot K_c}{J_t \cdot L \cdot \left(\frac{1}{\tau_e} + p\right) \cdot \left(\frac{1}{\tau_m} + p\right) \cdot p} = \frac{C_{\Omega 0} \cdot K_{\Omega} \cdot K_c}{((R + L \cdot p) \cdot J_t \cdot p + K_c \cdot K_E) \cdot p}$$

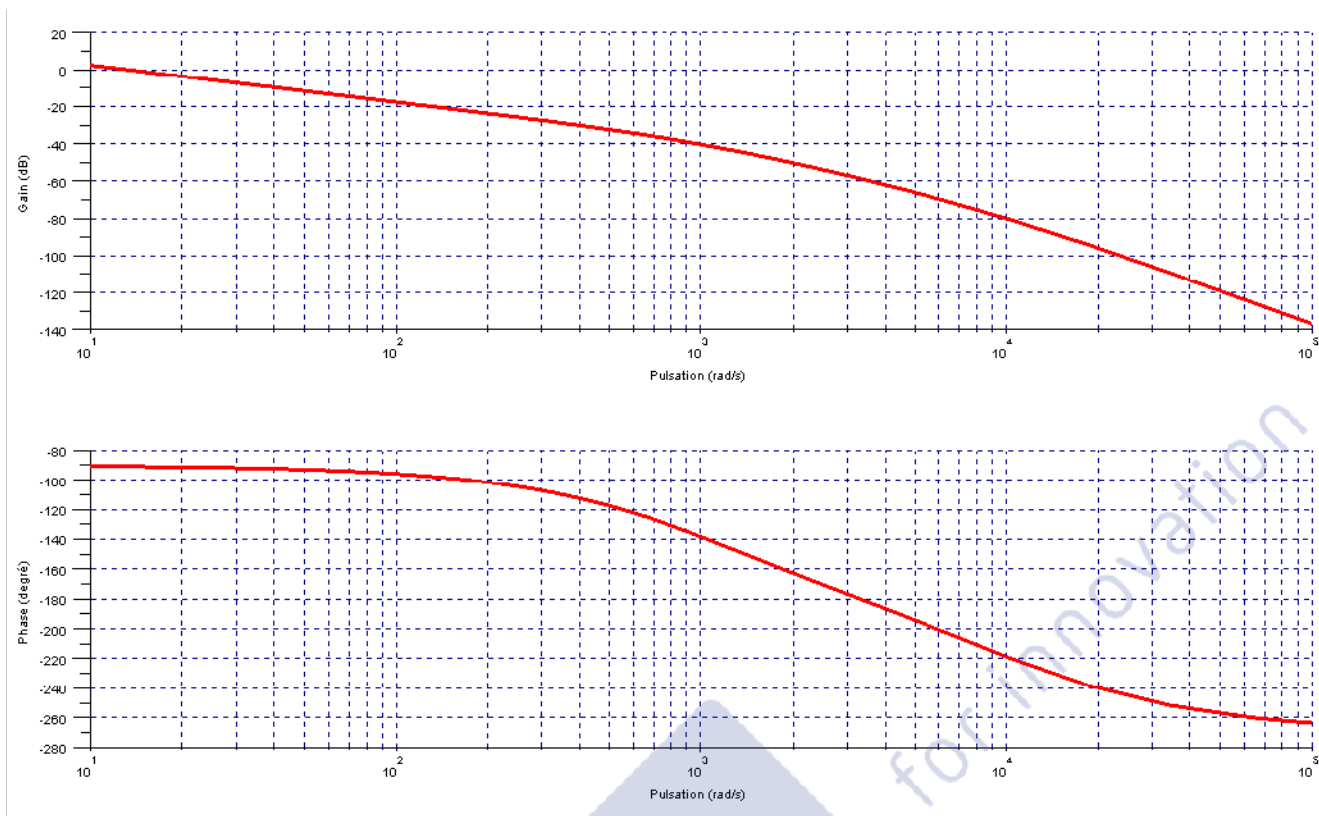
Q5A-7 : Constantes de temps

On calcule $\tau_e = 9,89 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ et $\tau_m = 9,23 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

On vérifie dans une certaine mesure l'hypothèse $\tau_m \gg \tau_e$.

Q5A-8 : Diagramme de Bode

On calcule $\frac{1}{\tau_e} = 10107 \text{ rad/s}$ et $\frac{1}{\tau_m} = 1083 \text{ rad/s}$. Le gain statique de $T_{\Omega}(p)$ vaut $\frac{C_{\Omega 0} \cdot K_{\Omega} \cdot K_c \cdot \tau_e \cdot \tau_m}{J_t \cdot L} = \frac{C_{\Omega 0} \cdot K_{\Omega}}{K_E} = 13,2$ (sans grandeur).



Q5A-9 : Gain du correcteur

La pulsation ω_φ pour laquelle la phase vaut -135° vérifie l'équation $\arg(T_\Omega(i \cdot \omega_\varphi)) = -135^\circ$.

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{C_{\Omega 0} \cdot K_\Omega \cdot K_c}{((R + L \cdot i \cdot \omega_\varphi) \cdot J_t \cdot i \cdot \omega_\varphi + K_c \cdot K_E) \cdot i \cdot \omega_\varphi}\right) = -135^\circ$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{C_{\Omega 0} \cdot K_\Omega \cdot K_c}{(R + L \cdot i \cdot \omega_\varphi) \cdot J_t \cdot i \cdot \omega_\varphi + K_c \cdot K_E}\right) = -135^\circ$$

$$\Rightarrow \arg(R \cdot J_t \cdot i \cdot \omega_\varphi - L \cdot J_t \cdot \omega_\varphi^2 + K_c \cdot K_E) = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{R \cdot J_t \cdot \omega_\varphi}{K_c \cdot K_E - L \cdot J_t \cdot \omega_\varphi^2} = \tan 45^\circ = 1$$

La résolution de l'équation en ω_φ donne $\omega_\varphi = 905 \text{ rad / s}$. Le gain pour cette pulsation vaut $G_{\varphi dB} = -39 \text{ dB}$.

Il faut donc remonter le diagramme de gain de 39dB, soit fixer $C_{\Omega 0} = 10^{\frac{39}{20}} = 89,1$.

Q5A-10 : Boucle fermée

En appliquant la formule de Black, on obtient :

$$\frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{Ref}(p)} = \frac{C_{\Omega 0} \cdot K_c}{J_t \cdot L \cdot \left(\frac{1}{\tau_e} + p\right) \cdot \left(\frac{1}{\tau_m} + p\right) \cdot p + C_{\Omega 0} \cdot K_\Omega \cdot K_c} = \frac{C_{\Omega 0} \cdot K_c}{((R + L \cdot p) \cdot J_t \cdot p + K_c \cdot K_E) \cdot p + C_{\Omega 0} \cdot K_\Omega \cdot K_c}$$

Q5A-11 : Valeur finale

Le système est de classe 1, l'erreur statique est donc nulle. Comme $K_{\Omega} = 1$, on $\boxed{\Omega_{m\infty} = \Omega_0}$

On le vérifie par $\Omega_{m\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\Omega_0}{p} \cdot \frac{C_{\Omega_0} \cdot K_c}{J_t \cdot L \cdot (\frac{1}{\tau_e} + p) \cdot (\frac{1}{\tau_m} + p) \cdot p + C_{\Omega_0} \cdot K_{\Omega} \cdot K_c} = \Omega_0$.

Q5A-12 : Efficacité

La régulation en vitesse est efficace pour une consigne en échelon :

- L'erreur statique est nulle.
- La valeur finale est insensible à une perturbation en échelon.

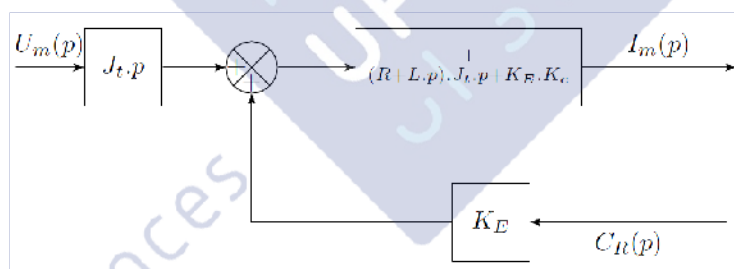
Cette régulation nécessite cependant un réglage de gain pour palier la possibilité d'une instabilité générée par le correcteur intégral. Enfin, l'étude menée ne permet pas de juger de l'efficacité en terme de temps de réponse, si ce n'est qu'en augmentant le gain en boucle ouverte, on augmente la bande passante, donc la dynamique/réactivité du système.

Q5A-13 : Validité du choix

Le couple calculé à la question Q4-9 correspond au couple résistant appliqué au moteur. Si F_{av} augmente, le couple augment, donc l'intensité qui parcourt le moteur. Cela va mener soit à une saturation en courant, soit à une rupture des fils.

Q5-B1 : Schéma-blocs

Sans même reprendre les équations différentielles, on peut exploiter l'annexe N pour arriver directement à :



Si on suit les indications du sujet, on a besoin des quatre équations du moteur, dans le domaine de Laplace :

$$\begin{aligned} U_m(p) &= R \cdot I_m(p) + L \cdot p \cdot I_m(p) + E(p) \\ J_t \cdot p \cdot \Omega_m(p) &= C_{em}(p) - C_r(p) \end{aligned}$$

D'où $I_m(p) = \frac{1}{R+L \cdot p} \cdot (U_m(p) - E(p)) = \frac{1}{R+L \cdot p} \cdot (U_m(p) - K_E \cdot \Omega_m(p))$ en application de $E(p) = K_E \cdot \Omega_m(p)$

Soit $I_m(p) = \frac{1}{R+L \cdot p} \cdot \left(U_m(p) - K_E \cdot \frac{C_{em}(p) - C_r(p)}{J_t \cdot p} \right) = \frac{1}{R+L \cdot p} \cdot \left(U_m(p) - K_E \cdot \frac{K_c \cdot I_m(p) - C_r(p)}{J_t \cdot p} \right)$, en application de $C_{em}(p) = K_c \cdot I_m(p)$.

En factorisant $I_m(p)$, on obtient $I_m(p) \cdot \left(1 + \frac{K_E \cdot K_c}{(R+L \cdot p) \cdot J_t \cdot p} \right) = \frac{1}{R+L \cdot p} \cdot U_m(p) + \frac{K_E}{J_t \cdot p \cdot (R+L \cdot p)} \cdot C_r(p)$

Donc $\boxed{I_m(p) = \frac{1}{(R+L \cdot p) \cdot J_t \cdot p + K_E \cdot K_c} \cdot (J_t \cdot p \cdot U_m(p) + K_E \cdot C_r(p))}$, d'où le schéma-bloc.

Q5B-2 : Fonction de transfert en boucle ouverte

On a directement : $\boxed{T_i(p) = \frac{C_i(p) \cdot J_t \cdot p \cdot K_i}{K_E \cdot K_c + (R+L \cdot p) \cdot J_t \cdot p}}$

Q5B-3 : Correcteur

Soit l'écart $\varepsilon_I(p) = I_{ref}(p) - I_m(p)$, on a $\varepsilon_I(p) = \frac{I_{ref}(p)}{1+T_i(p)} = \frac{K_E \cdot K_C + (R+L \cdot p) \cdot J_t \cdot p}{1+C_i(p) \cdot J_t \cdot p \cdot K_i} \cdot I_{ref}(p)$.

Pour une consigne en échelon d'amplitude I_{ref} , on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_I(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{K_E \cdot K_C + (R+L \cdot p) \cdot J_t \cdot p}{1+C_i(p) \cdot J_t \cdot p \cdot K_i} \cdot \frac{I_{ref}}{p}$.

Donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_I(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_E \cdot K_C \cdot I_{ref}}{1+C_i(p) \cdot J_t \cdot p \cdot K_i}$. Cet écart est nul si et seulement si $\lim_{p \rightarrow 0} C_i(p) \cdot J_t \cdot p \cdot K_i = +\infty$.

On choisit donc $C_i(p)$ sous la forme $C_i(p) = \frac{K}{p^2}$ (double intégrateur).

En d'autres termes, sous forme canonique $T_i(p)$ est de la forme $\frac{p \cdot C \cdot C_i(p)}{1+B \cdot p+A \cdot p^2}$, pour avoir une erreur statique (entrée en échelon) nulle, il est nécessaire que la classe de la FTBO soit au moins de 1. Il est donc nécessaire d'avoir un double intégrateur dans le correcteur.

Q5B-4 : Constante

Une augmentation de 50% de $\rho_{matériau}$, donc C_{R0} implique $\Delta C_R = k_0 \cdot V_{avance} \cdot 0,5 \cdot \rho_{matériau} = 0,5 \cdot C_{R0} = 0,5 \cdot C_n$.

$$\text{Donc } k_0 \cdot V_{avance} = \frac{C_n}{\rho_{matériau}} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}^4 / \text{kg}$$

Q5B-5 : Fonction de transfert en boucle fermée

On étudie le système autour du point de fonctionnement. Les entrées sont $\Delta I_{ref} = 0$ et $\Delta C_r(p) = k_0 \cdot V_{avance} \cdot \Delta \rho(p)$. On n'étudie donc que le comportement du système face à une perturbation. Il semble ici qu'on cherche à nous faire calculer non pas directement $I_M(p)$, mais plutôt sa variation $\Delta I_M(p)$ correspondant à la variation de densité du matériau. De plus, cette linéarisation, valable dans le domaine temporel, ne l'est pas forcément dans le domaine complexe.

Il vient donc $\Delta I_M(p) = \frac{1}{K_E \cdot K_C + (R+L \cdot p) \cdot J_t \cdot p} \cdot \left((K_E \cdot k_0 \cdot V_{avance} \cdot \Delta \rho(p)) - K_i \cdot C_i(p) \cdot J_t \cdot p \cdot \Delta I_M(p) \right)$

$$\text{D'où } \frac{\Delta I_M(p)}{\Delta \rho(p)} = \frac{K_E \cdot k_0 \cdot V_{avance}}{K_E \cdot K_C + (R+L \cdot p + K_i \cdot C_i(p)) \cdot J_t \cdot p}$$

Q5B-6 : Correcteur proportionnel

Pour un changement de densité en échelon $\Delta \rho(p) = \frac{\Delta \rho_0}{p}$ et un correcteur proportionnel $C_i(p) = C_{ip}$, et en supposant (?) que le correcteur respecte la condition de la question Q5B-3, on a :

$$I_{m1} = I_{ref0} + \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\Delta \rho_0}{p} \cdot \frac{K_E \cdot k_0 \cdot V_{avance}}{K_E \cdot K_C + (R + L \cdot p + K_i \cdot C_i(p)) \cdot J_t \cdot p} = I_{ref0} + \frac{k_0 \cdot V_{avance} \cdot \Delta \rho_0}{K_C}$$

Q5B-7 : Correcteur proportionnel intégral

Avec un correcteur proportionnel-intégral $C_i(p) = C_{ip} + \frac{C_{ii}}{p}$, et en supposant (?) que le correcteur respecte la condition de la question Q5B-3, on obtient :

$$I_{m2} = I_{ref0} + \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\Delta \rho_0}{p} \cdot \frac{K_E \cdot k_0 \cdot V_{avance}}{K_E \cdot K_C + (R + L \cdot p + K_i \cdot C_i(p)) \cdot J_t \cdot p} = I_{ref0} + \frac{K_E \cdot k_0 \cdot V_{avance} \cdot \Delta \rho_0}{K_E \cdot K_C + J_t \cdot K_i \cdot C_{ii}}$$

Q5B-8 : Vitesse moteur

On ne dit pas clairement si le moteur est inclus dans la boucle de vitesse ou seulement commandé en intensité. On ne donne pas non plus de valeurs pour C_{ip} et C_{ii} .

Dans le premier cas, la vitesse finale du moteur sera celle de consigne, soit environ 3000 tr / mn comme établi à la question Q4-3.

Dans le second cas, soit on a une vitesse qui, en régime établi, évolue de façon affine vers l'infini, soit un équilibre subtil se crée à une vitesse $\Omega_m = \frac{1}{J_t} \cdot (K_c \cdot I_{ref} - C_{r0}) = -17 \text{ tr / mn} ?$

Q5B-9 : Validation

Dans le premier cas, la boucle semble adaptée (quid du régime transitoire ?).

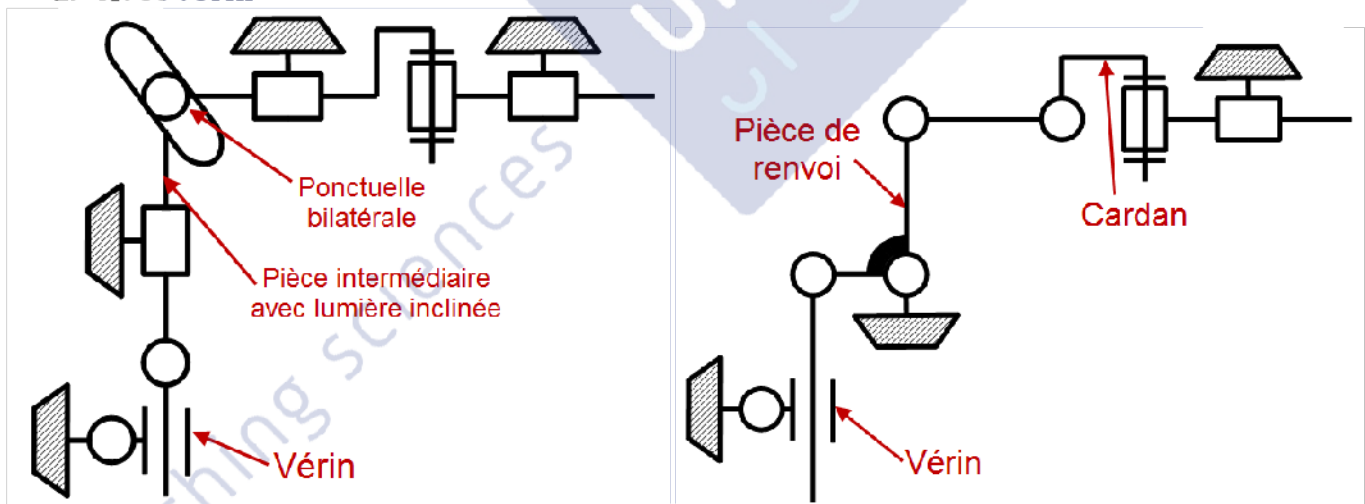
Q5B-10 : Conclusion

???

Q6-1 : Schémas de solutions

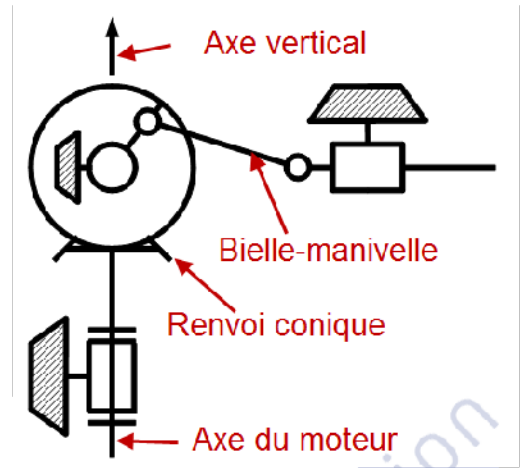
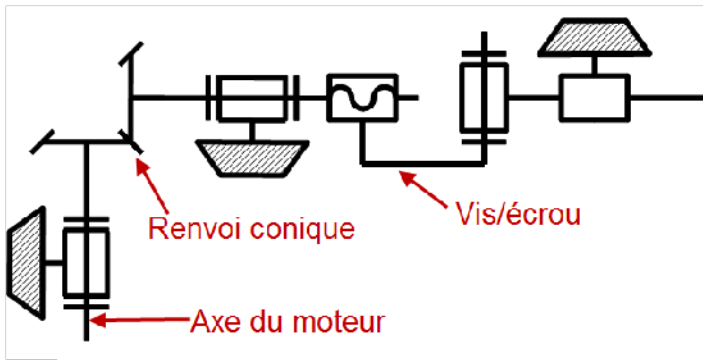
Il semblerait beaucoup plus simple de placer les vérins sous la table de la machine et de les faire travailler en tirant... Le sujet oblige également à définir une liaison pivot (ou rotule si on considère du jeu) dans la zone de liaison avec le boîtier. Le document réponse oriente clairement vers une solution représentée dans le plan de la figure. La contrainte principale est que la zone d'implantation autorisée est à peine plus large que la course totale imposée.

1. Avec vérin



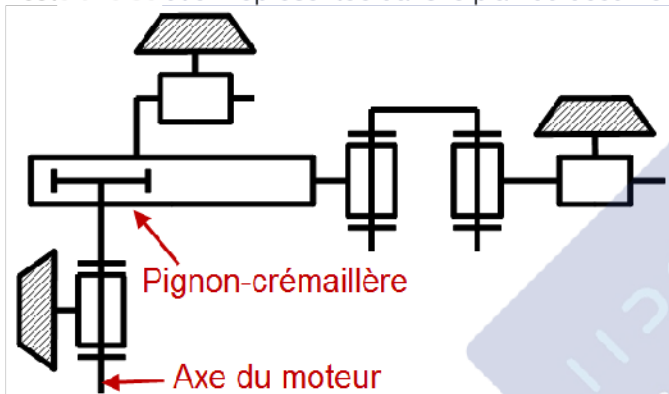
Ces deux solutions sont représentées dans le plan du document réponse et sont établies sans garantie d'isostatisme...

2. Avec moteur

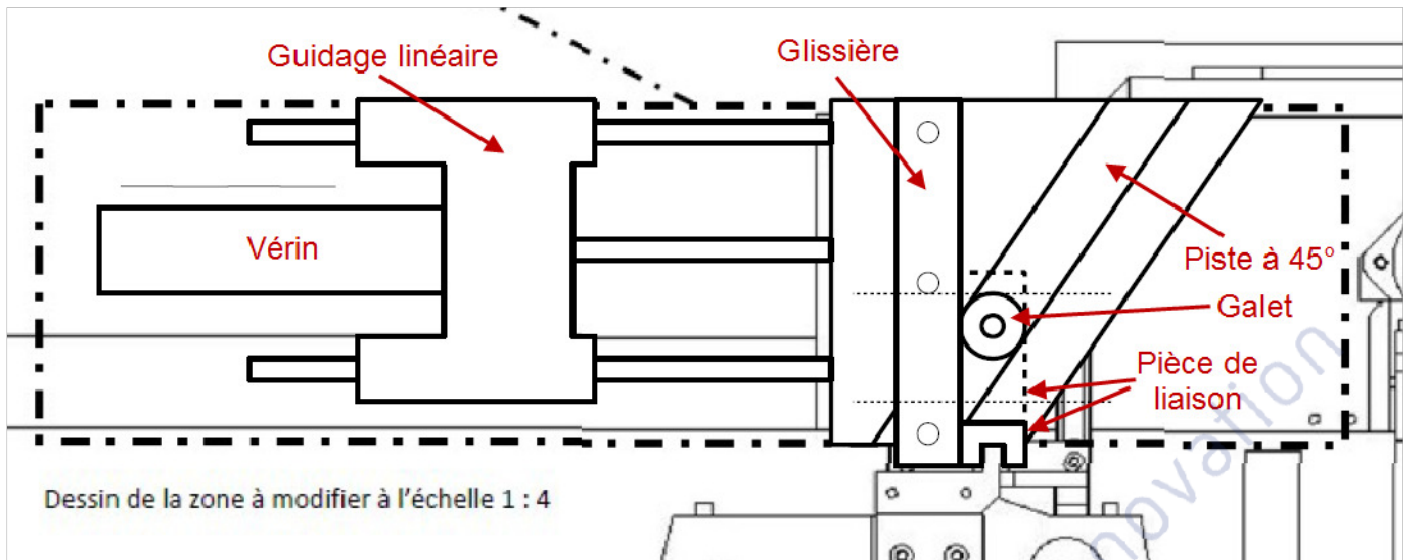


Le moteur peut aussi bien être placé dans le plan de la figure 2 que perpendiculairement à celui-ci, en dessous ou au dessus de la table. Pour la solution avec bielle et manivelle, le renvoi conique est inutile si le moteur est dans le plan.

Reste une solution représentée dans le plan du document réponse :



Q6-2 : Solution



L'ensemble vérin+guidage+glissière est placé sous la table de la machine. Une fente au travers de la table permet la jonction avec le boîtier par une pièce de liaison. On fait en sorte que dans la position représentée le vérin ait déjà parcouru 100 mm de course et que la longueur totale du corps du vérin excède 150 mm. De même, dans la position représentée, il reste 50 mm à parcourir au galet vers la contre-plaque, et donc 100mm dans l'autre sens. Cette configuration permet de faire travailler le vérin en poussée quand on serre la poutre.