

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2010

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

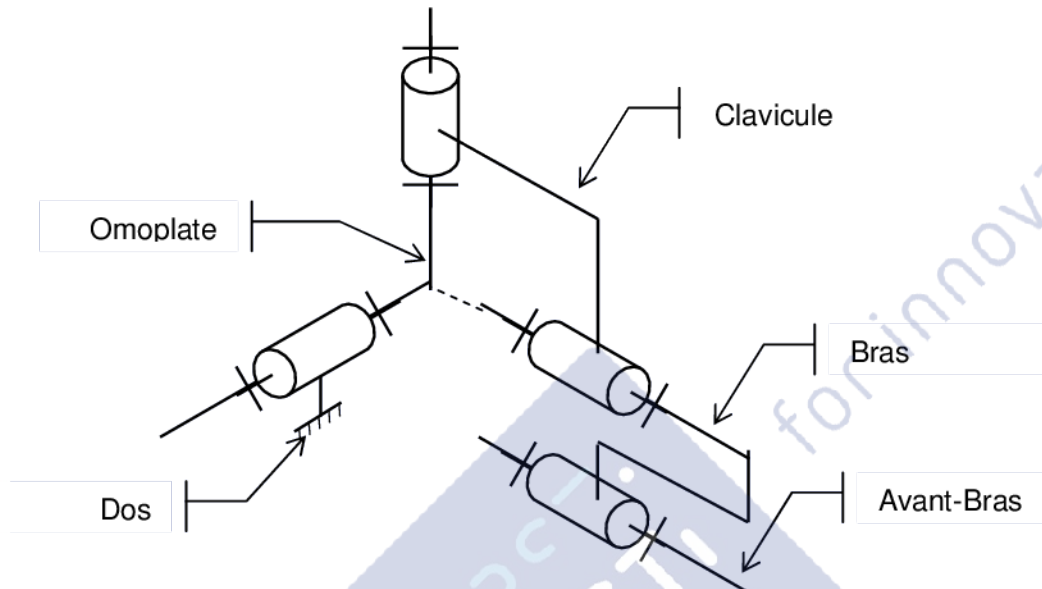
Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

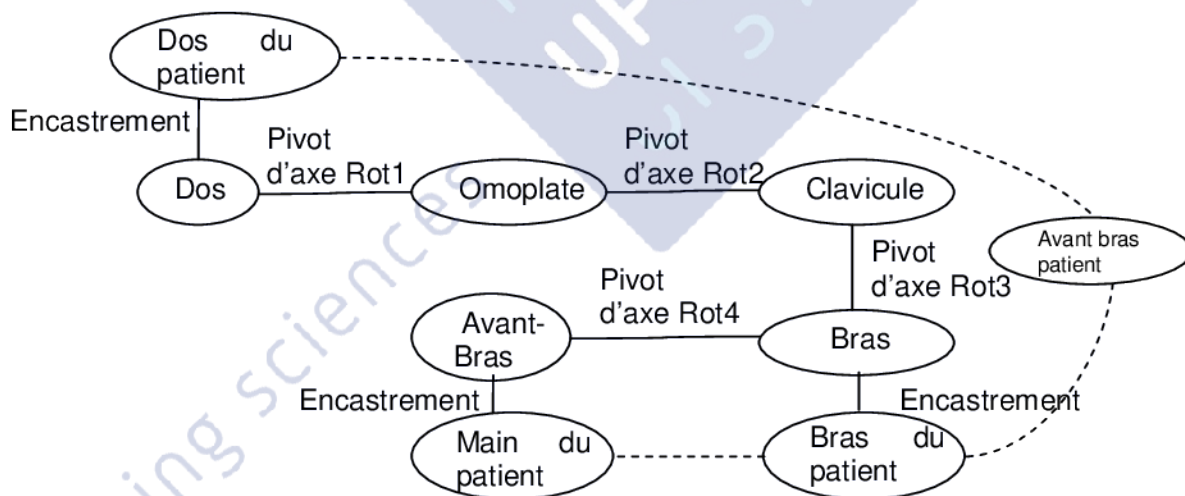
La robotique au service du handicap

I Introduction

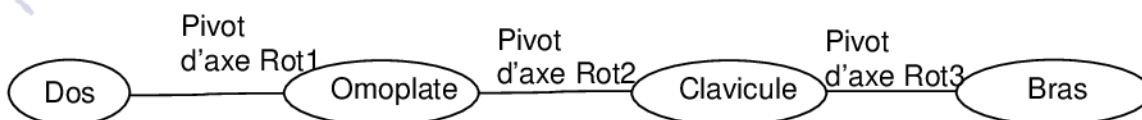
Q1. À partir du modèle de la figure 3, établir un schéma cinématique minimal de l'orthèse (hors motorisation) en repérant les cinq ensembles suivants : dos, omoplate, clavicule, bras et avant-bras.



Q2. Réaliser le graphe des liaisons de l'orthèse et du patient.



Q 3. Déterminer, sans calcul, la liaison cinématiquement équivalente à l'ensemble des liaisons entre le dos de l'orthèse et le bras de l'orthèse. En déduire, sans calcul, les mouvements du bras du patient par rapport à son dos que permet de réaliser cette orthèse.



Les 3 axes étant concourants en O, la liaison cinématiquement équivalente entre le dos de l'orthèse et le bras de l'orthèse en une liaison **sphérique (rotule) de centre O**.

Le bras du patient aura 3 rotations par rapport à son dos d'axes perpendiculaires.

II Étude de l'actionneur

II.A – Analyse et modélisation mécaniques

II.A.1) Étude du premier sous-ensemble de la transmission

Q 4. Par construction, les deux axes du croisillon sont orthogonaux. Écrire, en utilisant cette propriété, une équation liant les deux paramètres angulaires θ_E , θ_S et l'angle constant φ . En déduire la relation exprimant la vitesse angulaire de sortie $\omega_S = \dot{\theta}_S$ en fonction de la vitesse angulaire d'entrée $\omega_E = \dot{\theta}_E$, de l'angle φ et de la tangente de l'angle θ_E . Tracer l'allure de ω_S en fonction du temps, dans le cas où ω_E est constante ; on précisera les valeurs minimale et maximale de ω_S au cours du temps en fonction de φ et ω_E .

- Les 2 axes perpendiculaires liés au croisillon sont \vec{z}_E et \vec{x}_S

$$\vec{x}_S = \cos \theta_S \vec{x}^* - \sin \theta_S \vec{z}^* = \cos \theta_S (\cos \varphi \vec{x} + \sin \varphi \vec{z}) - \sin \theta_S \vec{z}$$

$$\vec{z}_E = \cos \theta_E \vec{z} + \sin \theta_E \vec{x}$$

$$\vec{z}_E \perp \vec{x}_S \text{ donc } \vec{z}_E \cdot \vec{x}_S = 0$$

$$\text{Soit } \sin \theta_E \cdot \cos \theta_S \cdot \cos \varphi - \cos \theta_E \cdot \cos \theta_S = 0$$

$$\text{La loi d'entrée-sortie géométrique est donc : } \tan \theta_E \cdot \cos \varphi = \tan \theta_S$$

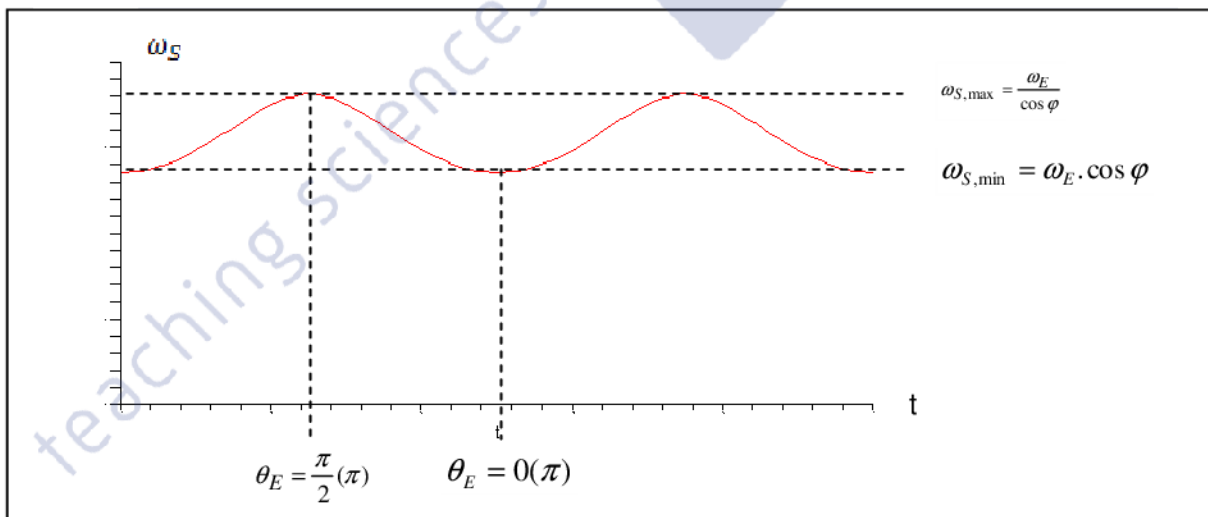
- Par dérivation de la loi d'ES géométrique on trouve :

$$(1 + \tan^2 \theta_E) \cdot \omega_E \cdot \cos \varphi = (1 + \tan^2 \theta_S) \cdot \omega_S \text{ soit } \omega_S = \frac{1 + \tan^2 \theta_E}{1 + \tan^2 \theta_E \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \omega_E \cdot \cos \varphi$$

ω_S est π -périodique et varie entre :

$$\omega_{S,\min} = \omega_E \cdot \cos \varphi \text{ atteinte en } \theta_E = 0(\pi)$$

$$\text{et } \omega_{S,\max} = \frac{\omega_E}{\cos \varphi} \text{ atteinte en } \theta_E = \frac{\pi}{2}(\pi)$$



Q 5. À l'aide des résultats de la question 4, exprimer le rapport des vitesses angulaires :

- ω_I / ω_M , où $\omega_I = \dot{\theta}_I$ et $\omega_M = \dot{\theta}_M$ sont respectivement les vitesses angulaires de la tige intermédiaire **I** et du moteur ;
- ω_I / ω_P , où $\omega_P = \dot{\theta}_P$ est la vitesse angulaire de la petite roue dentée liée à l'axe **24**.

En déduire la relation entre ω_M et ω_P . Conclure sur l'intérêt d'employer deux joints de Cardan dans cette configuration spécifique plutôt qu'un seul, et caractériser par **un seul mot** la propriété ainsi réalisée par les deux joints de Cardan.

$$\omega_I = \frac{1 + \tan^2 \theta_M}{1 + \tan^2 \theta_M \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \omega_M \cdot \cos \varphi = \frac{1 + \tan^2 \theta_I / \cos^2 \varphi}{1 + \tan^2 \theta_I} \cdot \omega_M \cdot \cos \varphi$$

et

$$\omega_I = \frac{1 + \tan^2 \theta_P}{1 + \tan^2 \theta_P \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \omega_P \cdot \cos \varphi = \frac{1 + \tan^2 \theta_I / \cos^2 \varphi}{1 + \tan^2 \theta_I} \cdot \omega_P \cdot \cos \varphi$$

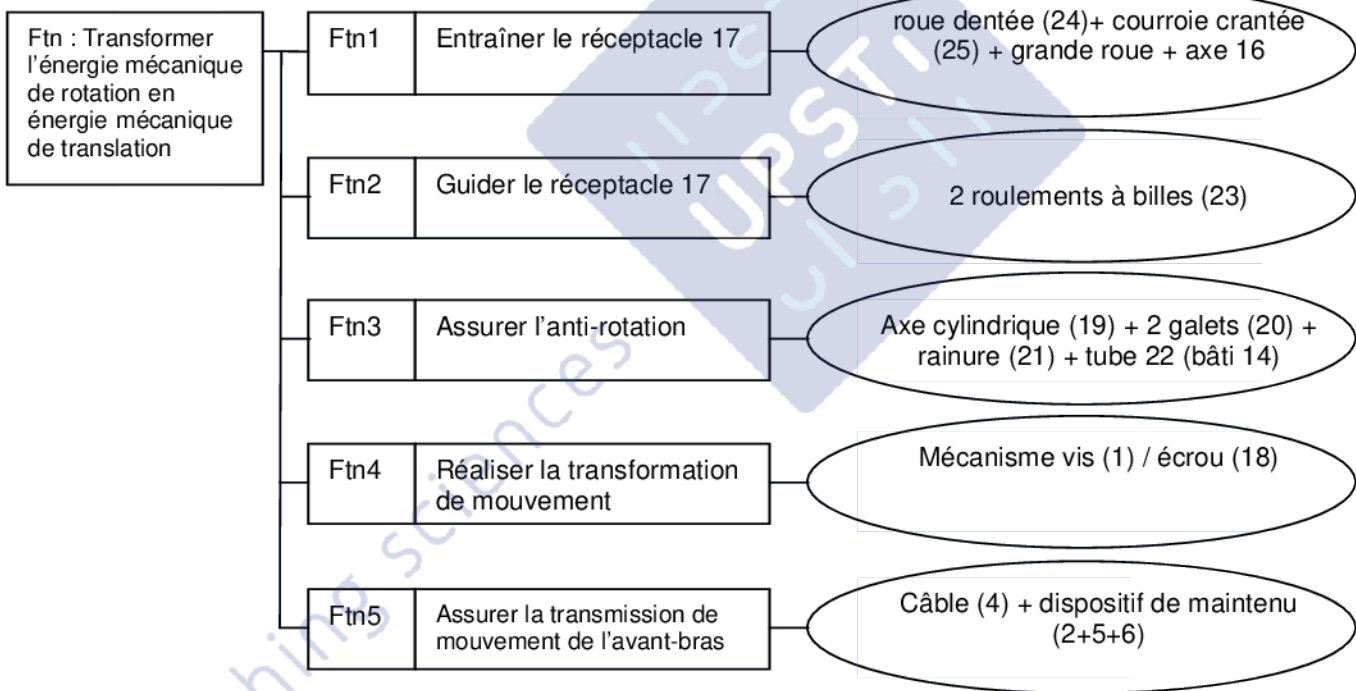
Soit $\omega_M = \omega_P$

Remarque : plus simplement, $\tan \theta_M \cdot \cos \varphi = \tan \theta_I = \tan \theta_P \cdot \cos \varphi$ soit $\theta_M = \theta_P$

L'association en série de 2 joints de cardan permet d'obtenir une transmission **homocinétique** : l'axe de sortie tourne à la même vitesse que l'axe moteur.

II.A.2) Étude du troisième sous-ensemble de la transmission

Q 6. Compléter le diagramme FAST proposé sur la figure R1 du document réponse en précisant les composants assurant les fonctions techniques mentionnées.

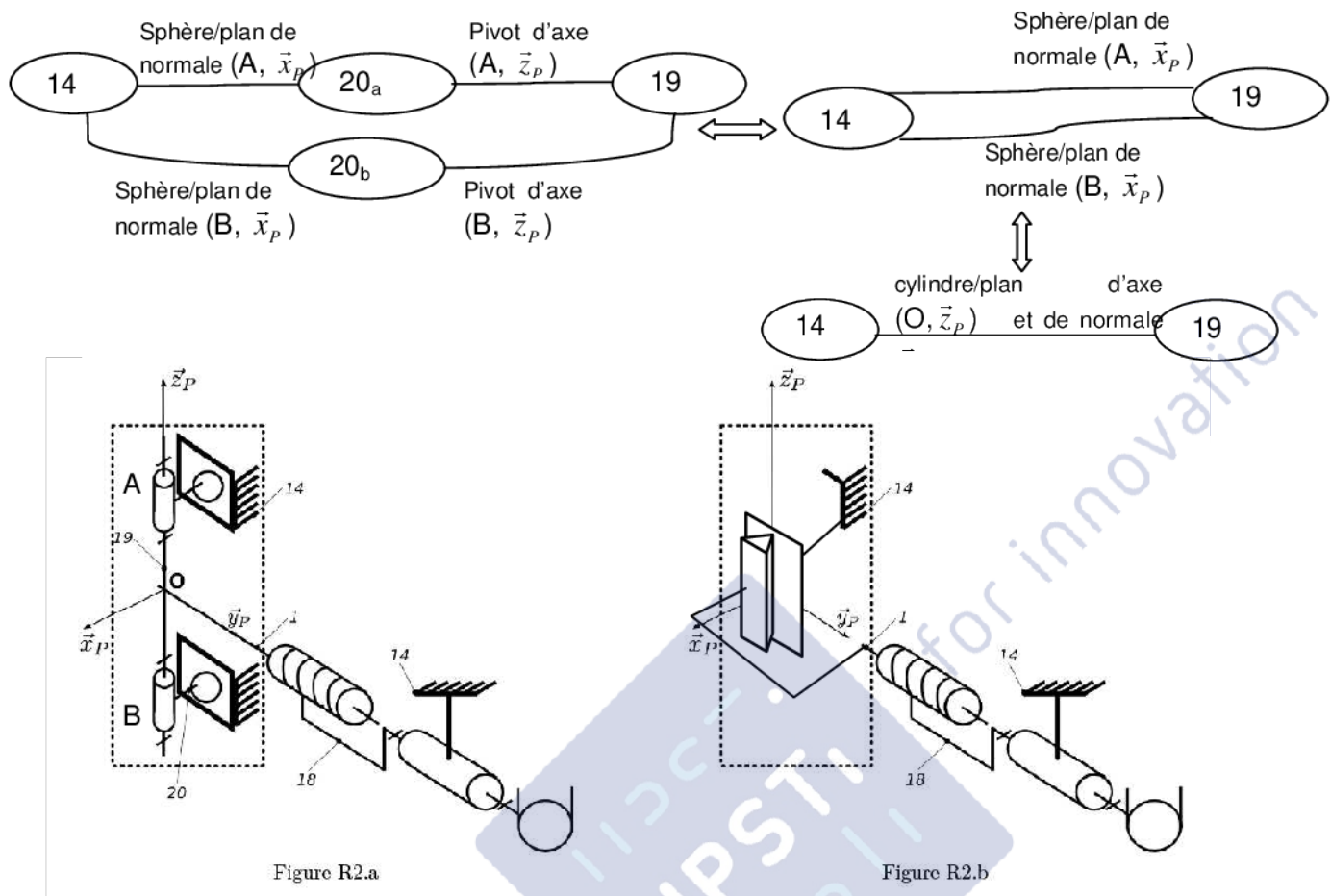


Q 7. Proposer une liaison cinématiquement équivalente L_{éq}(1/14) aux liaisons encadrées en pointillés dans la figure R2.a, que l'on dessinera dans le cadre en pointillés de la figure R2.b du document réponse. Justifier le terme d'« anti-rotation » donné au dispositif.

La liaison équivalente est une cylindre/plan (linéaire rectiligne) d'axe (O, \vec{z}_p) et de normale \vec{x}_p :

L'association en série d'une Sphère/plan de normale (A, \vec{x}_p) et d'un Pivot d'axe (A, \vec{z}_p) est une Sphère/plan de normale (A, \vec{x}_p)

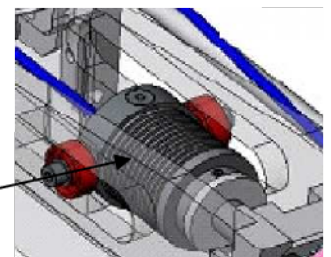
L'association en parallèle de 2 Sphère/plan de normale (A, \vec{x}_p) et (B, \vec{x}_p) est une cylindre/plan d'axe (O, \vec{z}_p) et de normale \vec{x}_p .



La liaison équivalente bloque toute rotation de la vis autour de \vec{y}_p , d'où le terme « dispositif anti-rotation ».

Q 8. Calculer le degré d'hyperstatisme du mécanisme décrit par le schéma cinématique complété de la figure R2.b. Justifier ce degré d'hyperstatisme en recensant les contraintes géométriques présentes dans le mécanisme.
 Quel composant, visible sur la figure 5, peut-on intercaler entre la vis 1 et l'axe cylindrique 19, qui sont en liaison encastrement dans la solution décrite ici, pour supprimer ces contraintes ?

- Degré de mobilité : $m_u = 1, m_i = 0$, soit $m = 1$
 Nombre d'inconnues d'efforts de liaisons :
 $l_s = 5$ (pivot) + 5 (hélicoïdale) + 2 (linéaire rectiligne) = 12
 Nombre d'équations issues de la statique :
 $E_s = 6 \times 2 = 12$
- degré d'hyperstatisme : $h = m + l_s - E_s = 1 + 12 - 12$
 soit $h = 1$
- Cette inconnue hyperstatique correspond à une contrainte dimensionnelle dans la direction \vec{x}_p : les axes des liaisons pivot et hélicoïdale doivent être concourants.
- On intercale un dispositif pour pallier tout défaut dimensionnel afin de rajouter un degré de liberté dans cette direction.



Q 9. Exprimer le rapport entre les normes du vecteur vitesse de rotation de la noix d'écrou 18/14 et du vecteur vitesse de translation de la vis 1/14 en fonction d'un paramètre géométrique de la vis.

$v_{1/14} = pv / (2\pi) \cdot \omega_{18/14}$ où pv est le pas de vis (mm/tr)

II.A.3) Modèle dynamique de la transmission complète

Q 10. On note N le rapport de réduction de la transmission, défini tel que $\omega_b = \omega_M/N$. Compte tenu des données précédentes et des résultats des questions 5 et 9, calculer N .

D'après la question 5, $\omega_P = \omega_P$

Or $\omega_G = \omega_P/N_R$ avec $N_R = 3$;

D'après la question 9, $v_{\text{cable}/14} = v_{1/14} = pv/(2\pi) \cdot \omega_{18/14}$ avec $p = pv/(2\pi) = 0,5 \text{ mm/rad}$

De plus le câble s'enroule sur la poulie R : $v_{\text{cable}/14} = R \cdot \omega_b$ avec $R = 25 \text{ mm}$.

D'où $\frac{\omega_b}{\omega_M} = \frac{1}{N} = \frac{p}{R \cdot N_R}$ soit $N = \frac{R \cdot N_R}{p}$

Q 11. À partir des hypothèses précédentes, écrire littéralement :

- la projection sur l'axe de l'articulation du théorème du moment dynamique appliqué à l'ensemble {axe de l'articulation + avant-bras} ;
- la projection sur l'axe du moteur du théorème du moment dynamique appliqué à l'axe moteur de l'actionneur.

- On isole $S = \{\text{axe d'articulation} + \text{avant-bras}\}$

Bilan d'actions mécaniques extérieures :

- Pivot bâti/S avec frottement visqueux de coefficient f : $C_f = -f \cdot \omega_b$
- Couple élastique du câble : $C_e = -K_r \cdot \left(\theta_b - \frac{\theta_M}{N} \right)$

Le théorème du moment dynamique appliqué à S selon l'axe de la pivot donne : $C_e + C_f = I_b \frac{d\omega_b}{dt}$

Soit $-K_r \cdot \left(\theta_b - \frac{\theta_M}{N} \right) - f \cdot \omega_b = I_b \frac{d\omega_b}{dt}$

- On isole $S' = \{\text{axe moteur}\}$

Bilan d'actions mécaniques extérieures :

- Pivot bâti/S'
- Couple moteur : C_M
- Couple résistant total : $-C_r$

Le théorème du moment dynamique appliqué à S' selon l'axe moteur donne :

$$C_M - C_r = I_M \frac{d\omega_M}{dt}$$

II.B – Synthèse de la loi de commande et validation de la boucle d'asservissement

Q 12. Au regard des objectifs souhaités, c'est-à-dire de fournir un couple égal à un couple de référence, justifier le choix de la grandeur asservie.

La variable asservie est l'**intensité du moteur** :

Le couple moteur est proportionnel à l'intensité : $C_M(t) = K_c \cdot i(t)$

L'objectif est la conception d'un actionneur permettant de délivrer un couple égal à un couple de référence. Pour asservir le couple on fait donc le choix d'asservir l'intensité moteur.

Un capteur de couple conduirait à un coût plus élevé.

Q 13. Exprimer le couple élastique ramené sur l'axe du moteur et préciser la norme du couple résistant total auquel est soumis le moteur. On supposera que le rendement de la transmission est égal à 1.

Isolons l'ensemble {moteur + mécanisme vis/écrou}

Bilan des puissances :

- Puissance du câble : $\mathcal{P}(c\grave{a}ble \rightarrow vis / 0) = -\frac{C_e}{R} \cdot \frac{p}{N_R} \omega_M = -\frac{C_e}{N} \omega_M$
- Puissance dû aux perturbations : $\mathcal{P}(pert \rightarrow mot / 0) = -C_{ext} \omega_M$
- Puissance motrice : $\mathcal{P}(mot) = C_M \omega_M$

Energie cinétique de l'ensemble en mouvement :

- $E_c(mot+vis+écrou/0) = 1/2 I_M \omega_M^2$ (les autres masses et inerties sont négligées)

Le théorème d'énergie/puissance donne : $C_M \omega_M - \frac{C_e}{N} \omega_M - C_{ext} \omega_M = I_M \omega_M \frac{d\omega_M}{dt}$

Soit $C_M - \frac{C_e}{N} - C_{ext} = I_M \frac{d\omega_M}{dt}$

Le couple élastique ramené à l'axe de rotation moteur est donc : $C'_e(t) = \frac{C_e}{N}$

Le couple résistant total est : $C_r(t) = C'_e(t) + C_{ext}$

Q 14. À partir des équations déterminées à la question 11, compléter le schéma bloc du document réponse figure R3 par les fonctions de transfert appropriées, exprimées avec une notation littérale.

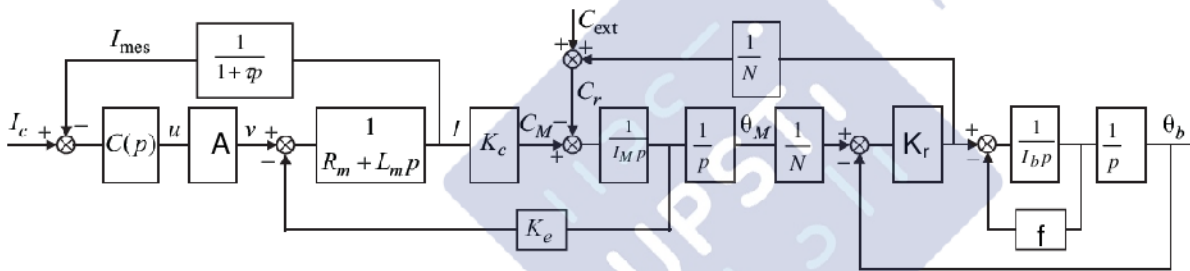


Figure R3

Q 15. Citez deux principes permettant de mesurer le courant dans le moteur.

- Une résistance calibrée en dérivation (shunt)
- Capteur de courant à effet Hall

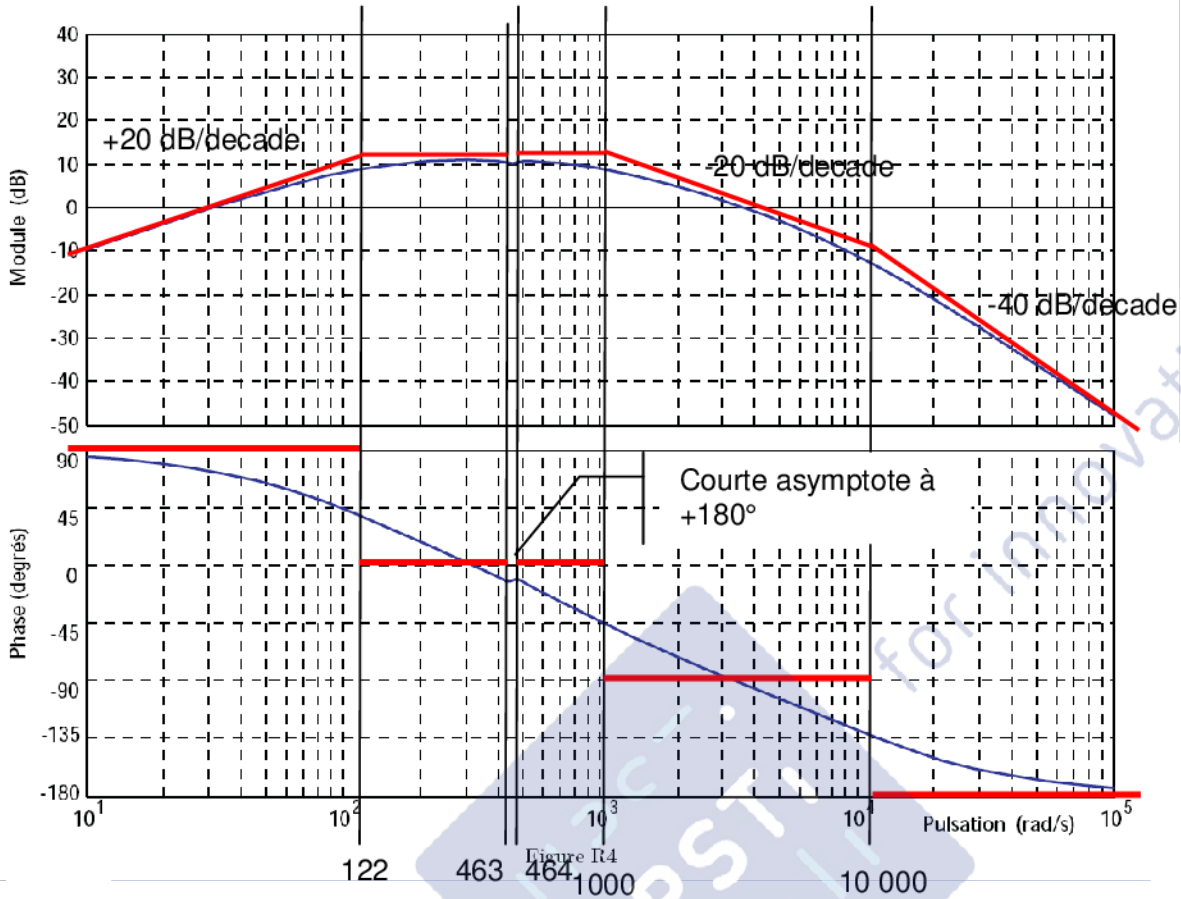
II.B.1) Synthèse du régulateur P.I. de la boucle de courant

Q 16. Compléter le diagramme de la figure R4 par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction $H(p)$.

Les pulsations de coupure sont : 463 (numérateur), 122, 464, 1000 et 10000 (dénominateur).

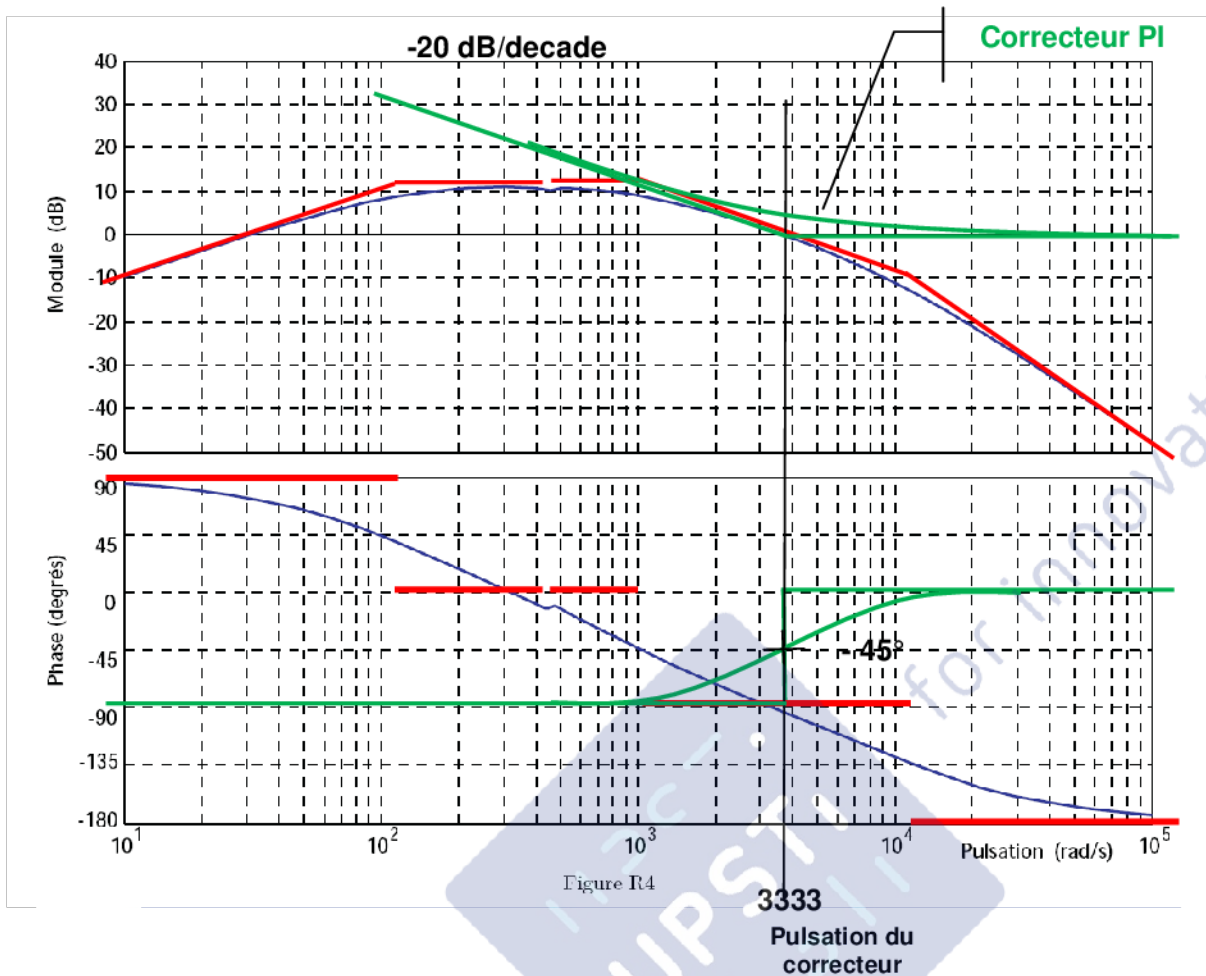
$$H(p) = \frac{I_{mes}(p)}{U(p)} = \frac{0,0326p \left(1 + \frac{2 \times 0,08}{463} p + \frac{1}{(463)^2} p^2 \right)}{\left(1 + \frac{p}{122} \right) \left(1 + \frac{2 \times 0,09}{464} p + \frac{1}{(464)^2} p^2 \right) \left(1 + \frac{p}{10^3} \right) \left(1 + \frac{p}{10^4} \right)}$$

463 et 464 étant très proches l'un de l'autre, leur influence sera négligeable et peu visible sur les diagrammes de Bode.



Q 17. En adoptant $K = 1$, tracer directement sur la figure R4 du document réponse, le diagramme de Bode (module et phase) de $C(p)$: diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) \text{ avec } T_i = 0,3 \text{ ms soit } \frac{1}{T_i} = 3333 \text{ rad/s}$$



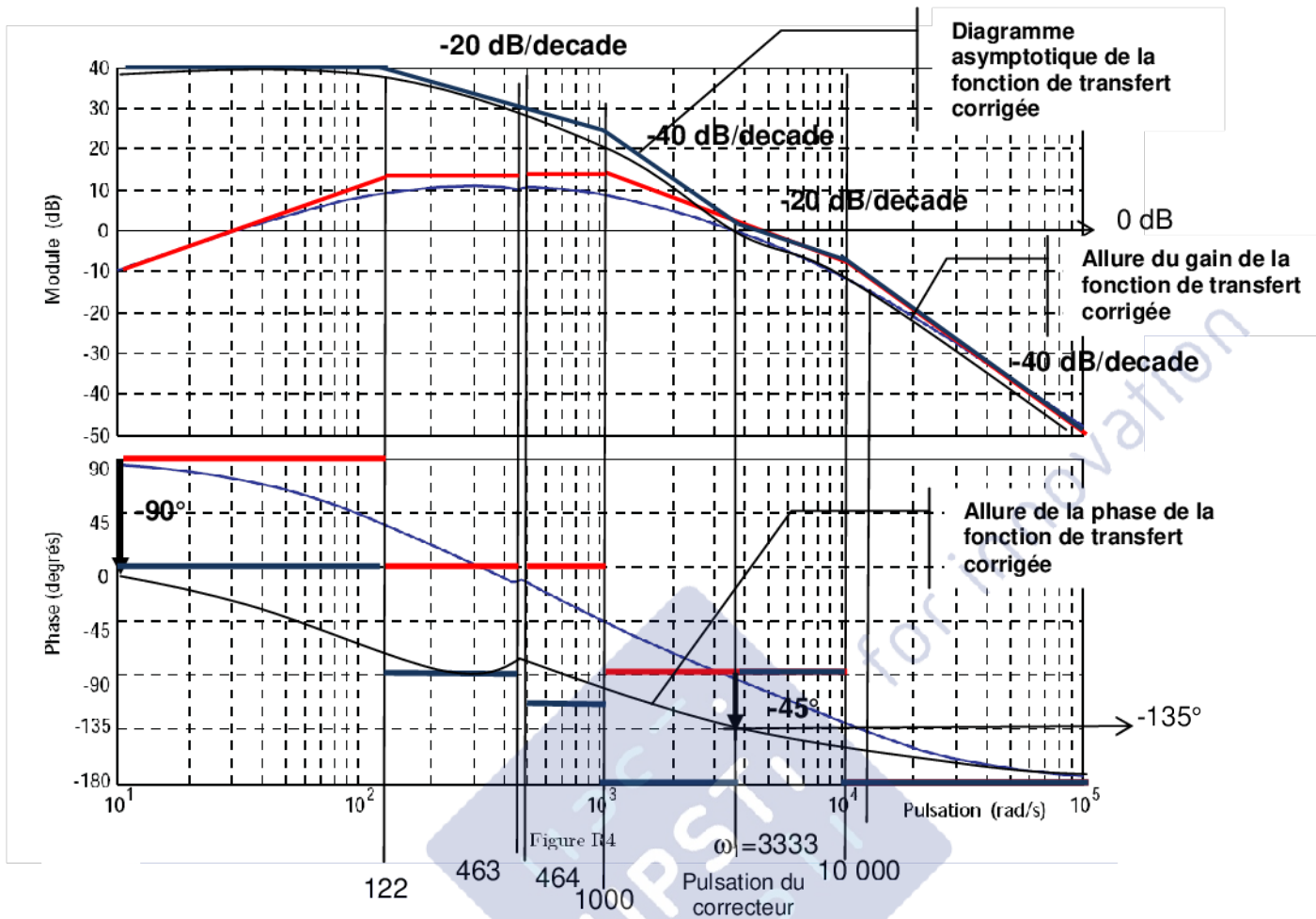
Q 18. En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on utilisera directement la figure R4 en différenciant les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation ω_1 telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à -135° et la valeur numérique du gain statique.

On remarque que la phase de la fonction de transfert non corrigée vaut -90° approximativement en 3300 rad/s, ce qui correspond à la pulsation de coupure du correcteur PI (3333 rad/s pour lequel le déphasage vaut -45°).

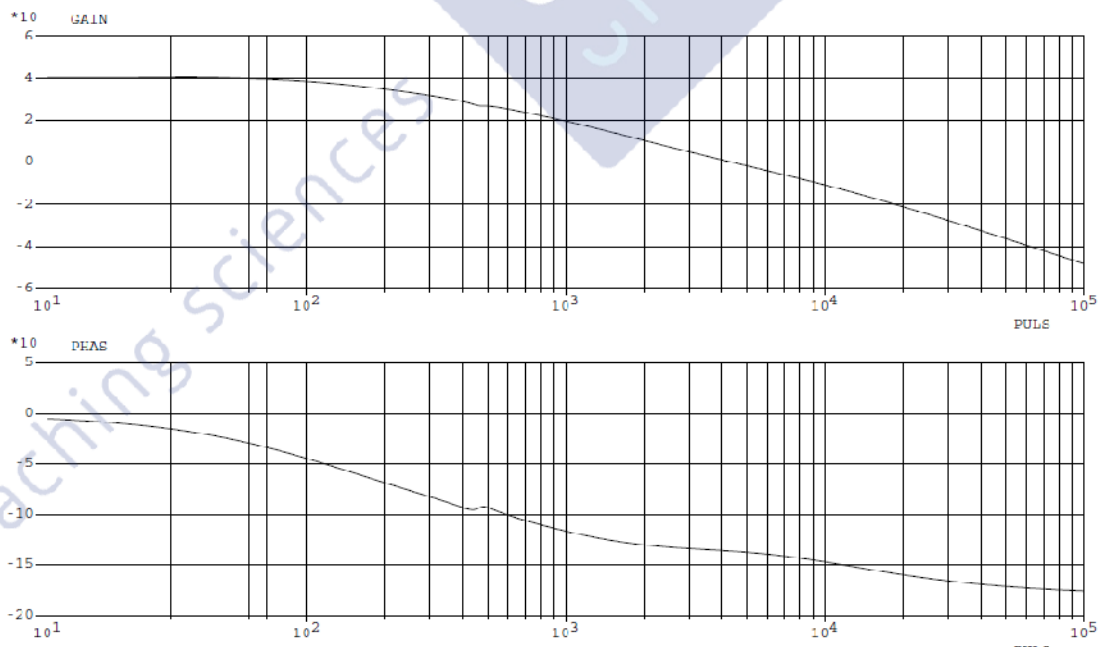
Donc en 3300 rad/s environ, la phase corrigée est de $-90^\circ - 45^\circ = -135^\circ$

Soit $\omega_1 = 3300$ rad/s ;

A cette pulsation, le gain est de $0\text{dB} + 3\text{dB}$ soit un gain statique $10^{3/20} \approx 1,4$



Complément : tracé des diagrammes de Bode de la fonction de transfert corrigée en boucle ouverte



Valeurs plus précises (obtenue numériquement) : 3620 rad/s 2,56dB

Q 19. Déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer une marge de phase de 45° .

On règle la valeur de K pour que le module de la fonction de transfert corrigée soit unitaire :

$$20 \cdot \log K + 3 \text{ dB} = 0 \text{ soit } K = 10^{-3/20} = 0,7$$

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur $C(p)$ qui vient d'être déterminé.

Q 20. Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

La marge de gain est infinie car la phase est toujours supérieure à -180° et la marge de phase est positive (45°) donc le système ainsi corrigé est stable en boucle fermée.

Q 21. Déterminer l'écart statique $\Delta i_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} (i_c(t) - i_{mes}(t))$ en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$ d'amplitude I_0 et l'exprimer sous la forme $\Delta i_0 = k I_0$ en précisant la valeur numérique de k .

La fonction de transfert corrigée est $H_{BO}(p) = H(p) \cdot C(p)$.

Celle-ci étant de classe 0, l'écart statique en réponse à un échelon est : $\Delta i_0 = \frac{1}{1 + K_{bo}} I_0$ avec

$$K_{bo} = 0,0326 \frac{K}{T} = 0,0326 \frac{0,7}{3 \cdot 10^{-4}} = 76 \quad \text{Soit } \Delta i_0 = 1,3 \cdot 10^{-2} I_0$$

Q 22. Exprimer G_{ic} en fonction de K_c et de N .

Le couple moteur et l'intensité sont liés par la constante de couple : $C_m(t) = K_c \cdot i(t)$

Le couple moteur est lié au couple appliqué C_a : $C_m(t) \omega_m(t) = C_a(t) \omega_a(t)$

soit $C_a(t) = C_m(t) \frac{\omega_m(t)}{\omega_a(t)} = N \cdot C_m(t)$ donc $G_{ic} = K_c \cdot N$

Q 23. En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle $\Delta i = 0$, donner la valeur du gain G_0 permettant d'assurer l'égalité des couples de référence C_{ref0} et appliqué C_a .

Si en régime permanent l'erreur est nulle, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = I_0$ soit $\lim_{t \rightarrow \infty} C_a(t) = G_{ic} \cdot G_0 \cdot C_{ref0}$

Pour avoir l'égalité des couples de référence et appliqué il faut $G_0 = \frac{1}{G_{ic}} = \frac{1}{N \cdot K_c}$

Q 24. En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer, en utilisant les résultats de la question 21 et l'expression de G_0 obtenue à la question 23, qu'en régime permanent l'erreur $\Delta C = C_{ref} - C_a$ entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est $\Delta C = k_1 C_{ref0}$. Déterminer k_1 en fonction de k .

D'après les résultats de la question 23, en régime permanent

$$\Delta C = \frac{1}{G_0} I_{cref} - G_{ic} I_\infty = G_{ic} (I_{cref} - I_\infty) = G_{ic} \Delta I_0$$

Or d'après les résultats de la question 31, $\Delta i_0 = k \cdot I_0$

Donc $\Delta C = G_{ic} \cdot k I_0 = k \cdot C_{ref0}$ donc $k_1 = k$

Q 25. Vérifier alors si les différentes exigences du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

Le cahier des charges stipule :

- $t_{5\%} \leq 2 \text{ ms}$

Or $t_{5\%} \approx \frac{3}{\omega_{0dB}}$

d'après les résultats de la question 18, $\omega_{0dB} = 3300 \text{ rad/s}$

soit $t_{5\%} \approx 9 \cdot 10^{-4} \text{ s} \leq 2 \text{ ms}$

OK

- $\varepsilon \leq 5\%$

Or d'après la question 24, $\varepsilon = k = 1,3 \cdot 10^{-2} \leq 5\%$

OK

- Le couple maximal sur l'axe est de 50 N.m
Or $C_{\text{nominal}} = N \cdot C_{\text{mot, nom}} = 150 \cdot 0,35 = 52,5 \text{ Nm} \approx 50 \text{ Nm}$

OK

III Synthèse d'une loi de commande pour l'exosquelette

III.A – Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

Q 26. Exprimer littéralement, au point G_2 et dans le repère R_1 , le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe R_0 supposé galiléen : $\{D(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2, (x_1, y_1, z_1)}$.

$$\{D_{AB/R_0}\} = \{D_{2/0}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} m_2 \vec{a}(G_2, 2/0) \\ \vec{\delta}_{G_2}(2/0) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{V}(G_2, 2/0) = l_1 \dot{\gamma} \vec{x}_1 + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \vec{x}_2$$

$$\vec{a}(G_2, 2/0) = l_1 \ddot{\gamma} \vec{x}_1 - l_1 \dot{\gamma}^2 \vec{z}_1 + \lambda_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \vec{x}_2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \vec{z}_2$$

$$m_2 \vec{a}(G_2, 2/0) = m_2 \begin{Bmatrix} l_1 \ddot{\gamma} + \lambda_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \sin \delta \\ 0 \\ -l_1 \dot{\gamma}^2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \sin \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 \cos \delta \end{Bmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\sigma}_{G_2}(2/0) = [I_{G_2}(2)] \vec{\Omega}(2/0) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R_2} \cdot \begin{matrix} 0 \\ \dot{\gamma} + \dot{\delta} \\ 0 \end{matrix}_{R_2 \text{ ou } R_1} = \begin{matrix} 0 \\ B_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \\ 0 \end{matrix}$$

$$\vec{\delta}_{G_2}(2/0) = \left(\frac{d\vec{\sigma}_{G_2}(2/0)}{dt} \right)_0 = B_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \vec{y}_1$$

Q 27. Le Principe Fondamental de la Dynamique permet d'établir la relation suivante (admise) :

$$C_1(t) + l_1 X_F \cos \gamma - l_1 Z_F \sin \gamma + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_1 m_1 g \sin \gamma - l_1 m_2 g \sin \gamma - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) =$$

$$\dot{\gamma} (B_1 + m_1 l_1^2) + \dot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2 + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$$

Détailler (**sans calcul**) la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

- On isole l'ensemble {bras (1) + Avant-Bras (2)}.
- BAME :

$$\{T(\text{bâti} \rightarrow 1)\}_o = \begin{Bmatrix} X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1 + Z_1 \vec{z}_1 \\ L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + N_1 \vec{z}_1 \end{Bmatrix} \text{ avec } M_1 = 0 \text{ si liaison pivot parfaite ;}$$

$$\{T(\text{actionneur1} \rightarrow 1)\}_o = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{T(\text{force} \rightarrow 2)\}_B = \begin{Bmatrix} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{T(\text{pesanteur} \rightarrow 1)\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} m_1 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{T(\text{pesanteur} \rightarrow 2)\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} m_2 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ;$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en 0 selon la direction \vec{y} :

$$C_1(t) + 0 + (\vec{OB} \wedge (X_F \vec{x} + Z_F \vec{z}) + \vec{OG}_1 \wedge m_1 g \vec{z} + \vec{OG}_2 \wedge m_2 g \vec{z}) \cdot \vec{y} = \vec{\delta}_o(1/0) \cdot \vec{y} + \vec{\delta}_o(2/0) \cdot \vec{y}$$

Compléments au corrigé : Détails du calcul (**non demandé**) :

$$\overline{OB} = l_1 \vec{z}_1 + l_2 \vec{z}_2 ; \overline{OG}_1 = \lambda_1 \vec{z}_1 ; \overline{OG}_2 = l_1 \vec{z}_1 + \lambda_2 \vec{z}_2$$

$$\vec{\delta}_O(2/0) = \vec{\delta}_{G_2}(2/0) + \overline{OG}_2 \wedge m_2 \vec{a}(G_2, 2/0)$$

$$\vec{\delta}_O(2/0) \cdot \vec{y} = B_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) + \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 \sin \delta & l_1 \dot{\gamma} + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ \hline 0 & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \cos \delta & -l_1 \dot{\gamma}^2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \cos \delta \end{array} \right) \wedge m_2 \cdot \vec{y}$$

$$\dot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \dot{\delta} + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$$

$$\vec{\delta}_O(1/0) = \vec{\delta}_{G_1}(1/0) + \overline{OG}_1 \wedge m_1 \vec{a}(G_1, 2/0)$$

$$\vec{\delta}_O(1/0) \cdot \vec{y} = B_1 \ddot{\gamma} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & l_1 \dot{\gamma} \\ \hline 0 & 0 \\ l_1 & -l_1 \dot{\gamma}^2 \end{array} \right) \wedge m_1 \cdot \vec{y} = \dot{\gamma} (B_1 + m_1 l_1^2)$$

Soit :

$$C_1(t) + l_1 X_F \cos \gamma - l_1 Z_F \sin \gamma + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_1 m_1 g \sin \gamma - l_1 m_2 g \sin \gamma - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) = \dot{\gamma} (B_1 + m_1 l_1^2) + \dot{\gamma} (B_2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta} (B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) - m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \dot{\delta} + m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2$$

Q 28. Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, **indépendante** de la précédente, faisant intervenir le couple $C_2(t)$, et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes L_1 , M_1 , N_1 , L_2 , M_2 , N_2 des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que ci-dessus.

- On isole l'Avant-Bras (2).

- BAME :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\}_A = \begin{Bmatrix} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y}_1 + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y}_1 + N_2 \vec{z}_1 \end{Bmatrix} \text{ avec } M_2=0 \text{ si liaison pivot parfaite ;}$$

$$\{T(\text{actionneur2} \rightarrow 2)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{T(\text{force} \rightarrow 2)\}_B = \begin{Bmatrix} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ;$$

$$\{T(\text{pesanteur} \rightarrow 2)\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} m_2 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ;$$

- On écrit le Théorème du moment dynamique en A selon la direction \vec{y} :

$$C_2(t) + 0 + (\overline{AB} \wedge (X_F \vec{x} + Z_F \vec{z}) + \overline{AG}_2 \wedge m_2 g \vec{z}) \cdot \vec{y} = \vec{\delta}_2(2/0) \cdot \vec{y}$$

- Détails du calcul :

$$\overline{AB} = l_2 \vec{z}_2 ; \overline{AG}_2 = \lambda_2 \vec{z}_2$$

$$\vec{\delta}_A(2/0) = \vec{\delta}_{G_2}(2/0) + \overline{AG}_2 \wedge m_2 \vec{a}(G_2, 2/0)$$

$$\text{avec } \vec{a}(G_2, 2/0) = l_1 \ddot{\gamma} \vec{x}_1 - l_1 \dot{\gamma}^2 \vec{z}_1 + \lambda_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \vec{x}_2 - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \dot{\delta} \vec{z}_2$$

$$\vec{\delta}_A(2/0) \cdot \vec{y} = B_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & l_1 \ddot{\gamma} \cos \delta + l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \\ \hline 0 & 0 \\ \lambda_2 & l_1 \dot{\gamma} \sin \delta - l_1 \dot{\gamma}^2 \cos \delta - \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \dot{\delta} \end{array} \right) \wedge m_2 \cdot \vec{y}$$

$$= B_2 (\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) + m_2 \lambda_2 (l_1 \dot{\gamma} \cos \delta + l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \dot{\delta})$$

Soit :
$$\begin{cases} C_2(t) + l_2 X_F \cos(\gamma + \delta) - l_2 Z_F \sin(\gamma + \delta) - \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) = \\ \dot{\gamma}(B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2) + \ddot{\delta}(B_2 + m_2 \lambda_2^2) + m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma}^2 \sin \delta \end{cases}$$

Q 29. En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$$

où C est un vecteur et A , B et Q sont des matrices 2×2 , que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement (γ, δ) et de leurs dérivées premières $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$.

Les expressions des couples moteur déterminées aux questions 27 et 28 peuvent s'écrire sous la

forme matricielle $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 g \sin \gamma + l_1 m_2 g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \\ \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 \lambda_2 (2\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 \lambda_2 \dot{\delta} \sin \delta & -m_2 l_1 \lambda_2 (\dot{\gamma} + \dot{\delta}) \sin \delta \\ m_2 \lambda_2 l_1 \dot{\gamma} \sin \delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$$

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas **statique** (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données $(C_1(t), C_2(t), X_F, Z_F)$ sont indépendantes du temps.

Q 30. Calculer les couples (C_1, C_2) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ($X_F = 0, Z_F = 0$) ; discuter de la configuration angulaire la plus **défavorable** vis-à-vis du cahier des charges.

On se place ici en statique, donc $\ddot{\gamma} = \ddot{\delta} = 0$ et $\dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$

Si $X_F = Z_F = 0$ alors on obtient :

$$C_{1,pes} = (\lambda_1 m_1 + l_1 m_2) g \sin \gamma + \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta)$$

Et

$$C_{2,pes} = \lambda_2 m_2 g \sin(\gamma + \delta)$$

La configuration la plus défavorable correspond donc à $\gamma + \delta = \pi/2$ et $\gamma = \pi/2$

Soit la configuration $\gamma = \pi/2$ et $\delta = 0$ pour laquelle :

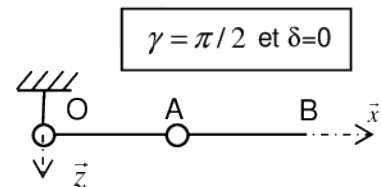
$$C_{1,pes \max} = (\lambda_1 m_1 + l_1 m_2 + \lambda_2 m_2) g \quad C_{2,pes \max} = \lambda_2 m_2 g$$

Application Numérique :

$$C_{1,pes \max} = (0,05.2,3 + 0,35.0,3 + 0,135.0,3)9,81 = 2,55 N.m$$

$$C_{2,pes \max} = 0,135.0,3.9,81 = 0,4 N.m$$

Le cahier des charges est respecté (couples inférieurs à 50 Nm).



Q 31. Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique **maximale** peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

Hypothèses :

- $\ddot{\gamma} = \ddot{\delta} = 0$ et $\dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$ (statique)
- $\gamma = \pi/2$ et $\delta=0$ (configuration la plus défavorable)

$$C_{1,stat\ max} = (l_1 + l_2)Z_F + C_{1,pes\ max} \quad \text{et} \quad C_{2,stat\ max} = l_2 Z_F + C_{2,pes\ max}$$

Le couple statique maximal est limité à $C_{1,stat\ max} = 50$ N.m soit :

$$Z_{F,\ max} = \frac{C_{1,stat\ max} - C_{1,pes\ max}}{l_1 + l_2} = \frac{50 - 2,55}{0,35 + 0,27} \quad \text{soit} \quad \boxed{Z_{F,\ max} = 76,5\ N}$$

Le cahier des charges est respecté (effort de manipulation maximal du patient 50 N.m)

III.B – Synthèse d'une loi de commande « deux axes »

Q 32. Donner au moins un argument, en particulier vis-à-vis du cahier des charges souhaité, de l'intérêt de la boucle interne correspondant à la loi non linéaire donnée précédemment.

La boucle interne permet :

- de compenser le couple statique déterminé précédemment ;
- d'obtenir une loi de comportement $q(U)$ linéaire

En utilisant la loi correspondant à la boucle interne, le modèle dynamique peut-être réécrit selon la forme $\ddot{q} = U + N(q, \dot{q}, F)$ avec $N(q, \dot{q}, F) = M(q, \dot{q}).F$

Q 33. Préciser l'expression de la matrice **M** en fonction de **A** et de **Q**.

On a vu précédemment que l'équation dynamique de l'exosquelette se mettait sous la forme :

$$C_a = A(q, \dot{q})\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q}) + Q(q, \dot{q})F$$

La boucle interne calcule les couples aux axes par la relation :

$$C_a = A(q, \dot{q})U + B(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q})$$

Donc $A(q, \dot{q})\ddot{q} + Q(q, \dot{q})F = A(q, \dot{q})U$ soit $\ddot{q} = A^{-1}(q, \dot{q}).Q(q, \dot{q})F + U$

$$\boxed{M(q, \dot{q}) = A^{-1}(q, \dot{q}).Q(q, \dot{q})}$$

Q 34. Donner, par exemple sous forme algorithmique, une démarche permettant de linéariser le modèle dynamique selon la forme $\ddot{q}_1 = \tilde{A}q_1 + \tilde{B}\dot{q}_1 + \tilde{G}u + \tilde{H}f$ où $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{G}$ et \tilde{H} sont des matrices constantes, éventuellement dépendantes du point de fonctionnement.

La linéarisation est obtenue par un développement en série autour d'un point de fonctionnement donné :

Hypothèses :

Si on note $q_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}$ les petites variations de $q = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ autour du point de fonctionnement $q_0 = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}$, alors

$$q = q_0 + q_1.$$

De même $F = \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix} = F_0 + f$ avec $f = \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix}$ les petites variations de **F** autour du point de fonctionnement

$$F_0 = \begin{pmatrix} X_{F0} \\ Y_{F0} \end{pmatrix}$$

Et $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = U_0 + u$ avec $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ les petites variations de \mathbf{U} autour du point de fonctionnement $U_0 = \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix}$

D'après la question 33, $\ddot{q} = N(q, \dot{q}, F) + U$

En régime permanent :

Au point de fonctionnement on a $\boxed{0 = N(q_0, 0, F_0) + U_0}$ (1)

Linéarisation :

$$\boxed{\ddot{q}_1 = N(q_0 + q_1, 0 + \dot{q}_1, F_0) + U_0 + u}$$
 (2)

Avec $N(q_0 + q_1, 0 + \dot{q}_1, F_0) = A^{-1}(q_0 + q_1, \dot{q}_1) \cdot Q(q_0 + q_1, \dot{q}_1) \cdot (F_0 + f)$

Rappels :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 + m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 \\ B_2 + m_2 l_1 \lambda_2 \cos \delta + m_2 \lambda_2^2 & B_2 + m_2 \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } Q = \begin{bmatrix} -l_1 \cos \gamma - l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \delta) \\ -l_2 \cos(\gamma + \delta) & l_2 \sin(\gamma + \delta) \end{bmatrix} \quad (\text{question 29})$$

On linéarise ensuite $N(q, \dot{q}, F) = A(q, \dot{q})F$:

$$\boxed{N(q_0 + q_1, 0 + \dot{q}_1, F_0) = N(q_0, 0, F_0) + \frac{\partial N}{\partial q}(q_0, 0, F_0)q_1 + \frac{\partial N}{\partial \dot{q}}(q_0, 0, F_0)\dot{q}_1 + \frac{\partial N}{\partial F}(q_0, 0, F_0)f}$$
 (3)

Par (1), (2) et (3), on obtient : $\ddot{q}_1 = \frac{\partial N}{\partial q}(q_0, 0, F_0)q_1 + \frac{\partial N}{\partial \dot{q}}(q_0, 0, F_0)\dot{q}_1 + \frac{\partial N}{\partial F}(q_0, 0, F_0)f + u$

Soit $\ddot{q}_1 = \tilde{A}q_1 + \tilde{B}\dot{q}_1 + \tilde{G}u + \tilde{H}f$ avec : $\tilde{A} = \frac{\partial N}{\partial q}(q_0, 0, F_0)$; $\tilde{B} = \frac{\partial N}{\partial \dot{q}}(q_0, 0, F_0)$; $\tilde{G} = 1_{2 \times 2}$; $\tilde{H} = M(q_0, 0)$

Q 35. En justifiant la réponse, étudier la stabilité du modèle donné ci-dessus.

Les sorties $\dot{\gamma}_1$ et $\dot{\delta}_1$ sont donc régies par le système d'équations :

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}_1 = -18,4\gamma_1 - 33\delta_1 + u_1 - 3,9z_F \\ \ddot{\delta}_1 = 4\gamma_1 - 56,5\delta_1 + u_2 - 45,4z_F \end{cases} \text{ soit dans le domaine de Laplace :}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(p)(p^2 + 18,4) + 33\delta_1(p) = u_1(p) - 3,9z_F(p) \\ -4\gamma_1(p) + \delta_1(p)(p^2 + 56,5) = u_2(p) - 45,4z_F(p) \end{cases}$$

$$\gamma_1(p) = \frac{(u_1(p) - 3,9z_F(p))(p^2 + 56,5) - (u_2(p) - 45,4z_F(p)) \cdot 33}{(p^2 + 18,4)(p^2 + 56,5) + 4 \cdot 33}$$

$$\delta_1(p) = \frac{(u_2(p) - 45,4z_F(p))(p^2 + 18,4) + 4(u_1(p) - 3,9z_F(p))}{(p^2 + 18,4)(p^2 + 56,5) + 4 \cdot 33}$$

$$\gamma_1(p) = \frac{u_1(p)(p^2 + 56,5) - 33u_2(p) + z_F(p)(-3,9(p^2 + 56,5) + 45,4 \cdot 33)}{(p^2 + 18,4)(p^2 + 56,5) + 4 \cdot 33}$$

$$\delta_1(p) = \frac{4u_1(p) + u_2(p)(p^2 + 18,4) - z_F(p)(45,4(p^2 + 18,4) + 4 \cdot 3 \cdot 9)}{(p^2 + 18,4)(p^2 + 56,5) + 4 \cdot 33}$$

Une condition nécessaire pour que le système soit stable est que les coefficients du polynôme du dénominateur soient tous strictement de même signe. Or ici les coefficients de p^3 et p sont nuls.

Ce modèle n'est donc pas stable.

Q 36. En utilisant un raisonnement qualitatif (**sans calcul**), et en supposant que le système bouclé est stable, justifier qu'une régulation de type proportionnelle-intégrale (sur chaque composante des positions du bras) :

$$\frac{U_1(p)}{\varepsilon_1(p)} = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p} \right) \text{ et } \frac{U_2(p)}{\varepsilon_2(p)} = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p} \right)$$

où $\varepsilon_1(t) = \gamma_{1ref} - \gamma$ et $\varepsilon_2(t) = \delta_{1ref} - \delta$ sont les écarts sur chaque axe d'articulation étudié, ne permet pas d'assurer l'objectif escompté, c'est-à-dire un comportement de type raideur entre les variations des positions γ_1 et δ_1 , du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force z_F exercée par le patient.

Raisonnement « qualitatif » :

Avec des correcteurs de type « Proportionnel Intégral », les erreurs statiques en réponse à un échelon sont nulles.

Donc pour un échelon d'effort $z_F(p) = \frac{\Delta z}{p}$, si l'on suppose le système stable, on obtient des positions nulles en régime permanent, ce qui correspondrait à une raideur infinie, ce qui ne correspond pas au comportement escompté.

Compléments (Explications « plus détaillées ») :

$$\begin{cases} \gamma_1(p)(p^2 + 18,4) + 33\delta_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p} \right) (\gamma_{1ref}(p) - \gamma_1(p)) - 3,9z_F(p) \\ -4\gamma_1(p) + \delta_1(p)(p^2 + 56,5) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p} \right) (\delta_{1ref}(p) - \delta_1(p)) - 45,4z_F(p) \end{cases}$$

Soit, si on suppose $\gamma_{1ref}(p) = \delta_{1ref}(p) = 0$ (on étudie le comportement vis-à-vis d'un effort extérieur z_F) :

$$\begin{cases} \gamma_1(p) \left(p^2 + 18,4 + K_1 \left(1 + \frac{1}{T_1 p} \right) \right) + 33\delta_1(p) = -3,9z_F(p) \\ -4\gamma_1(p) + \delta_1(p) \left(p^2 + 56,5 + K_2 \left(1 + \frac{1}{T_2 p} \right) \right) = -45,4z_F(p) \\ \gamma_1(p)(T_1 p^3 + 18,4T_1 p + K_1(1 + T_1 p)) + 33T_1 p \delta_1(p) = -3,9T_1 p z_F(p) \\ -4T_2 p \gamma_1(p) + \delta_1(p)(T_2 p^3 + 56,5T_2 p + K_2(1 + T_2 p)) = -45,4T_2 p z_F(p) \end{cases}$$

Si $z_F(p) = \frac{\Delta z}{p}$ alors,
$$\begin{cases} \lim_{p \rightarrow 0} \gamma_1(p)(T_1 p^3 + 18,4T_1 p + K_1(1 + T_1 p)) + 33T_1 p \delta_1(p) = -3,9T_1 \Delta z \\ \lim_{p \rightarrow 0} -4T_2 p \gamma_1(p) + \delta_1(p)(T_2 p^3 + 56,5T_2 p + K_2(1 + T_2 p)) = -45,4T_2 \Delta z \end{cases}$$

En posant les valeurs en régime permanent $\Delta\gamma = \lim_{p \rightarrow 0} p\gamma_1(p)$ et $\Delta\delta = \lim_{p \rightarrow 0} p\delta_1(p)$, valeurs angulaires induites par l'échelon d'effort Δz , on trouve donc que $\lim_{p \rightarrow 0} \gamma_1(p) = cte\ finie$ donc que $\Delta\gamma = 0$ et $\Delta\delta = 0$.

On obtient donc avec ce type de correcteur une raideur infinie, ce qui ne correspond pas au comportement escompté.

Pour la suite, on adopte la loi de commande : $u(t) = K_p(q_{1ref} - q_1) + K_v(\dot{q}_{1ref} - \dot{q}_1)$ avec :

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{p11} & k_{p12} \\ k_{p21} & k_{p22} \end{bmatrix} \text{ et } K_v = \begin{bmatrix} k_{v11} & k_{v12} \\ k_{v21} & k_{v22} \end{bmatrix}$$

Par souci de simplicité, on pourra utiliser $q_{1ref} = 0$ et $\dot{q}_{1ref} = 0$.

Q 37. Déterminer les coefficients des matrices \mathbf{K}_p et \mathbf{K}_v afin que le comportement entrée-sortie entre les positions du bras et de l'avant bras, et les forces exercées par le patient, soit celui de fonctions du deuxième ordre :

$$\frac{\gamma_1(p)}{z_F(p)} = \frac{K_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_1} p + \frac{p^2}{\omega_1^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_1(p)}{z_F(p)} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_2} p + \frac{p^2}{\omega_2^2}}$$

permettant d'obtenir les valeurs des raideurs souhaitées et

caractérisées par un coefficient d'amortissement $\xi = 0,7$. Justifier alors que la bande passante ne peut pas être choisie d'une manière arbitraire.

Ici on a, sachant que $q_{1ref} = 0$ et $\dot{q}_{1ref} = 0$

$$\begin{cases} u_1(p) = -(k_{p11} + pk_{v11})\gamma_1(p) - (k_{p12} + pk_{v12})\delta_1(p) \\ u_2(p) = -(k_{p21} + pk_{v21})\gamma_1(p) - (k_{p22} + pk_{v22})\delta_1(p) \end{cases}$$

De plus on a trouvé question 35 :

$$\begin{cases} \gamma_1(p)(p^2 + 18,4) + 33\delta_1(p) = u_1(p) - 3,9z_F(p) \\ -4\gamma_1(p) + \delta_1(p)(p^2 + 56,5) = u_2(p) - 45,4z_F(p) \end{cases}$$

On peut donc relier les déplacements à l'effort extérieur :

$$\begin{cases} \gamma_1(p)(p^2 + 18,4 + k_{p11} + pk_{v11}) + (33 + k_{p12} + pk_{v12})\delta_1(p) = -3,9z_F(p) \\ (-4 + k_{p21} + pk_{v21})\gamma_1(p) + \delta_1(p)(p^2 + 56,5 + k_{p22} + pk_{v22}) = -45,4z_F(p) \end{cases}$$

Si l'on choisit : $k_{p12} = -33$, $k_{v12} = 0$, $k_{p21} = 4$, $k_{v21} = 0$, on obtient alors :

$$\frac{\gamma_1(p)}{z_F(p)} = \frac{-3,9}{p^2 + pk_{v11} + 18,4 + k_{p11}} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_1(p)}{z_F(p)} = \frac{-45,4}{p^2 + pk_{v22} + 56,5 + k_{p22}}$$

Le « comportement entrée-sortie » entre les déplacements et les efforts extérieurs est donc celui d'un deuxième ordre :

- De gains statiques $G_1 = \frac{-3,9}{18,4 + k_{p11}}$ et $G_2 = \frac{-45,4}{56,5 + k_{p22}}$
- De pulsations propres $\omega_1 = \sqrt{18,4 + k_{p11}}$ et $\omega_2 = \sqrt{56,5 + k_{p22}}$
- De coefficients d'amortissement $\xi_1 = \frac{k_{v11}}{2\sqrt{18,4 + k_{p11}}}$ et $\xi_2 = \frac{k_{v22}}{2\sqrt{56,5 + k_{p22}}}$

Le cahier des charges impose les raideurs : $\left| \frac{\Delta z_F}{\Delta \gamma} \right| = K_1 \geq 500 \text{ N.rad}^{-1}$ et $\left| \frac{\Delta z_F}{\Delta \delta} \right| = K_2 \geq 500 \text{ N.rad}^{-1}$

$$\text{Or } K_1 = \left| \frac{1}{G_1} \right| \quad \text{et} \quad K_2 = \left| \frac{1}{G_2} \right| \quad \text{donc} \quad \left| \frac{18,4 + k_{p11}}{3,9} \right| \geq 500 \quad \text{et} \quad \left| \frac{56,5 + k_{p22}}{45,4} \right| \geq 500$$

Le gain statique doit être négatif (à un effort vertical positif, dans le sens z, correspond un déplacement angulaire négatif (dans le sens horaire) donc :

$$-\frac{18,4 + k_{p11}}{3,9} \leq -500 \quad \text{et} \quad -\frac{56,5 + k_{p22}}{45,4} \leq -500$$

$$k_{p11} \geq 500 \cdot 3,9 - 18,4 \quad \text{et} \quad k_{p22} \geq 500 \cdot 45,4 - 56,5$$

$$k_{p11} \geq 1932 \text{ V/rad} \quad \text{et} \quad k_{p22} \geq 22646 \text{ V/rad}$$

Le coefficient d'amortissement impose les valeurs de k_{v11} et k_{v22} :

$$k_{v11} = 2\xi_1 \sqrt{18,4 + k_{p11}} = 2 \cdot 0,7 \cdot \sqrt{18,4 + 1932} = 62 \text{ V/(rad/s)}$$

$$k_{v22} = 2\xi_2 \sqrt{56,5 + k_{p22}} = 2 \cdot 0,7 \cdot \sqrt{56,5 + 22646} = 210 \text{ V/(rad/s)}$$

$$\text{On trouve donc: } \mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 1932 & -33 \\ 4 & 22646 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 62 & 0 \\ 0 & 210 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des pulsations ω_1 et ω_2 sont imposées par les valeurs de k_{p11} et k_{p22} , elles-mêmes imposées par les raideurs. Ces 2 critères ne sont cependant pas incompatibles puisqu'une augmentation de k_{p11} et k_{p22} entraîne une augmentation de la raideur et de la bande passante.

Q 38. Les figures 17 et 18 montrent un ensemble de résultats correspondant à deux types d'essais :

- pour le réglage de la loi de commande correspondant à celui de la question 37, la figure 17 montre les évolutions des positions angulaires du bras et de l'avant-bras (à partir du point de fonctionnement $t(0,6 \ 0,7)$ rad) et des couples sur les axes des articulations, en réponse à une variation intervenant à $t_0 = 1$ s de la force $Z_F = \Delta Z_F = -1$ N;
- la figure 18 montre le ralliement à une position de référence avec des efforts constants, $X_F = 50$ N et $Z_F = -50$ N en partant de conditions initiales nulles. Commenter ces courbes et conclure sur l'adéquation de la loi de commande proposée comparativement au cahier des charges.

• Figure 17 :
Un échelon d'effort extérieur de 1 N produit un décalage angulaire $\Delta\gamma=0,018$ rad et $\Delta\delta=0,02$ rad soit des raideurs :

$$\left| \frac{\Delta z_F}{\Delta \gamma} \right| = K_1 = 55 \text{ N.rad}^{-1} \leq 500 \text{ N.rad}^{-1} \text{ et}$$

$$\left| \frac{\Delta z_F}{\Delta \delta} \right| = K_2 = 50 \text{ N.rad}^{-1} \leq 500 \text{ N.rad}^{-1} \text{ et}$$

La raideur est moindre que ce que stipule le cahier des charges.

On observe un léger dépassement ($\xi \approx 0,7$)

Partant d'un couple non nul (compensation du poids), ils évoluent pour s'opposer à l'effort extérieur Z_F .

• Figure 18 :
Les efforts extérieurs sont les efforts maximaux admissibles (50N)
Le bras et l'avant-bras prennent la position horizontale ($\gamma = 90^\circ$ et $\delta = 0^\circ$).
Les couples au démarrage sont importants (150 N.m pour C_1) mais restent inférieurs à 4 fois le couple nominal statique comme précisé dans le cahier des charges (page 8 du sujet).
En régime permanent ils restent inférieurs à la valeur maximale du cahier des charges (50 N.m).

