

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2010

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

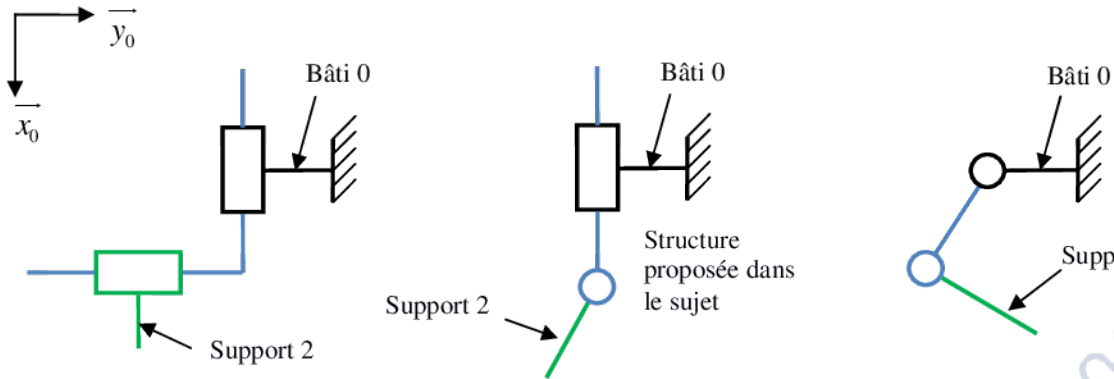
### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

Q1 : Le bras motorisé doit pouvoir déplacer la pince dans des plans horizontaux  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  et effectuer une translation suivant une direction verticale  $\vec{z}_0$ .

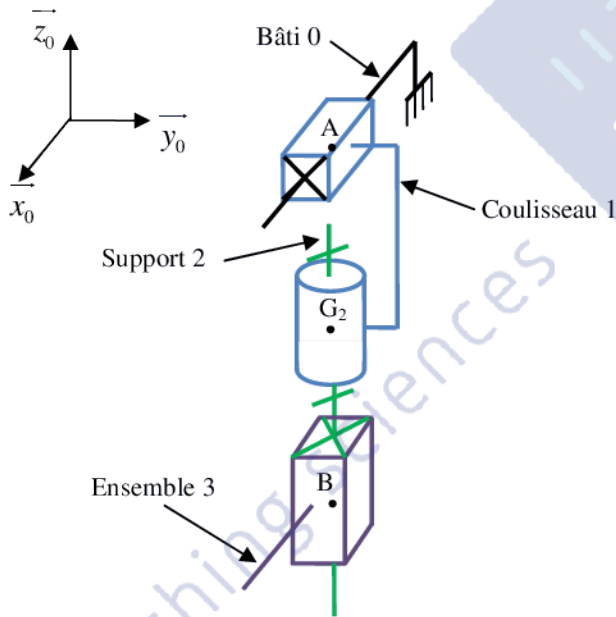
Pour le déplacement dans un plan horizontal, on propose les trois structures suivantes :



Q2 :

Liaison	Bâti 0 / Coulisseau 1	Coulisseau 1 / Support 2	Support 2 / Ensemble 3
Modèle de liaison proposé	Glissière	Pivot	Glissière
Caractéristiques cinématiques	Direction $\vec{x}_0$	Axe $(G_2, \vec{z}_0)$	Direction $\vec{z}_0$

Q3 :



Q4 :

Effort	Ensemble isolé	Théorème utilisé	Justification du choix d'isolement et de théorème
$F_{M1}$	1 + 2 + 3	Résultante dynamique suivant $\vec{x}_0$	La force recherchée $F_{M1}$ est portée par $\vec{x}_0$ et la composante de la résultante transmissible par la liaison 1/0 est nulle suivant cette direction.
$C_{M2}$	2 + 3	Moment résultant dynamique suivant $\vec{z}_0$ , en $G_2$ .	Le couple recherchée $C_{M2}$ est portée par $\vec{z}_0$ et la composante du moment transmissible par la liaison 2/1 est nulle suivant cette direction en $G_2$ .
$F_{M3}$	3	Résultante dynamique suivant $\vec{z}_0$	La force recherchée $F_{M3}$ est portée par $\vec{z}_0$ et la composante de la résultante transmissible par la liaison 3/2 est nulle suivant cette direction.

Q5 :

On isole l'ensemble 2+3.

Il est soumis à :

- l'action de la pesanteur :

$$\{\tau_{pes \rightarrow 2}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} -m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\tau_{pes \rightarrow 3}\}_{G_3} = \begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

- l'action de 1 sur 2 :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 2}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x}_0 + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_0 + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z}_0 \\ L_{1 \rightarrow 2} \vec{x}_0 + M_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_0 \end{Bmatrix}.$$

- l'action des frottements visqueux :

$$\{\tau_{fv \rightarrow 2}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -f_2 \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}.$$

- l'action de la motorisation  $M_2$  :

$$\{\tau_{M_2 \rightarrow 2}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{M_2} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

On applique le théorème du moment résultant dynamique suivant  $\vec{z}_0$ , en  $G_2$  :  $\overline{\delta}_{(G_2, 2+3/0)} \cdot \vec{z}_0 = \overline{M}_{G_2, 2+3 \rightarrow 2+3} \cdot \vec{z}_0$ .

$$\overline{\sigma}_{(G_2, 2/0)} \cdot \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \cdot \overline{I}_{(G_2, 2)}(\overline{\Omega}_{(2/0)}) = J_2 \dot{\theta} \text{ et donc } \overline{\delta}_{(G_2, 2/0)} \cdot \vec{z}_0 = \left[ \frac{d(\overline{\sigma}_{(G_2, 2/0)} \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_0 - \overline{\sigma}_{(G_2, 2/0)} \cdot \left[ \frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_0 = J_2 \ddot{\theta}.$$

$$\overline{\sigma}_{(G_3, 3/0)} \cdot \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \cdot \overline{I}_{(G_3, 3)}(\overline{\Omega}_{(3/0)}) = J_3 \dot{\theta}.$$

$$\overline{\delta}_{(G_3, 3/0)} \cdot \vec{z}_0 = \left[ \frac{d(\overline{\sigma}_{(G_3, 3/0)} \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_0 - \overline{\sigma}_{(G_3, 3/0)} \cdot \left[ \frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_0 = J_3 \ddot{\theta}.$$

$$\overline{V}_{(G_3, 3/0)} = \left[ \frac{d\overline{OG}_3}{dt} \right]_0 = \left[ \frac{d(x\vec{x}_0 + (d_1 + z)\vec{z}_0 + (d_2 + d)\vec{x}_1)}{dt} \right]_0 = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 + (d_2 + d)\dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1$$

$$\overline{V}_{(G_3, 3/0)} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 + (d_2 + d)\dot{\theta}\vec{y}_1.$$

$$\overline{\Gamma}_{(G_3, 3/0)} = \left[ \frac{d\overline{V}_{(G_3, 3/0)}}{dt} \right]_0 = \left[ \frac{d(\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 + (d_2 + d)\dot{\theta}\vec{y}_1)}{dt} \right]_0 = \ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0 + (d_2 + d)\ddot{\theta}\vec{y}_1 + (d_2 + d)\dot{\theta}^2 \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1.$$

$$\overline{\Gamma}_{(G_3, 3/0)} = \ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0 + (d_2 + d)\ddot{\theta}\vec{y}_1 - (d_2 + d)\dot{\theta}^2 \vec{x}_1.$$

$$\overline{\delta}_{(G_2, 3/0)} = \overline{\delta}_{(G_3, 3/0)} + m_3 \overline{G_2 G_3} \wedge \overline{\Gamma}_{(G_3, 3/0)} = J_3 \ddot{\theta} \vec{z}_0 + m_3 (z\vec{z}_0 + (d_2 + d)\vec{x}_1) \wedge (\ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0 + (d_2 + d)\dot{\theta}\vec{y}_1 - (d_2 + d)\dot{\theta}^2 \vec{x}_1).$$

$$\overline{\delta}_{(G_2, 3/0)} \cdot \vec{z}_0 = J_3 \ddot{\theta} + m_3 (d_2 + d) [\vec{x}_1 \wedge (\ddot{x}\vec{x}_0 + (d_2 + d)\dot{\theta}\vec{y}_1)] \cdot \vec{z}_0$$

$$\overline{\delta}_{(G_2, 3/0)} \cdot \vec{z}_0 = J_3 \ddot{\theta} + m_3 \left( -(d_2 + d)\ddot{x} \sin \theta + (d_2 + d)^2 \ddot{\theta} \right) = \left[ J_3 + m_3 (d_2 + d)^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (d_2 + d) \ddot{x} \sin \theta.$$

$$\overline{M}_{G_2, 2+3 \rightarrow 2+3} \cdot \vec{z}_0 = C_{M_2} - f_2 \dot{\theta}.$$

$$\text{On en déduit donc } \boxed{C_{M_2} - f_2 \dot{\theta} = \left[ J_2 + J_3 + m_3 (d_2 + d)^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (d_2 + d) \ddot{x} \sin \theta} \quad (E_2).$$

$$\text{D'où } C_{M_2} = \left[ J_2 + J_3 + m_3 (d_2 + d)^2 \right] \ddot{\theta} + f_2 \dot{\theta} - m_3 (d_2 + d) \ddot{x} \sin \theta.$$

$$\text{Par identification : } A = J_2 + J_3 + m_3 (d_2 + d)^2 ; B = f_2 ; C = -m_3 (d_2 + d) \sin \theta.$$

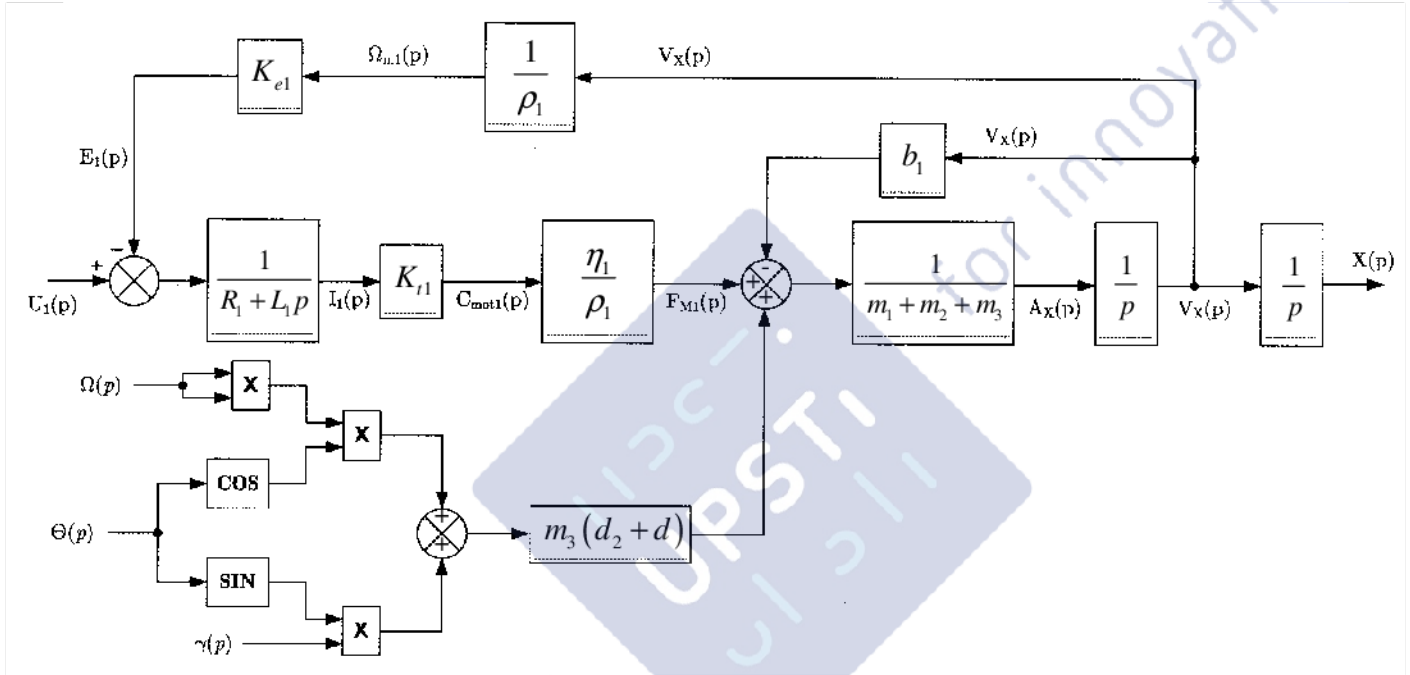
Q6 :  
Les mouvements des axes 1 et 2 sont couplés car les équations différentielles ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) comportent toutes les deux des termes en  $x$ ,  $\theta$  et leurs dérivées.

Q7 :  
Les conditions initiales sont nulles.  
Dans le domaine symbolique :

$$F_{M_1}(p) = (m_1 + m_2 + m_3)A_x(p) + b_1V_x(p) - m_3(d_2 + d) \left[ \mathcal{L}(\ddot{\theta} \sin \theta) + \mathcal{L}(\dot{\theta}^2 \cos \theta) \right]$$

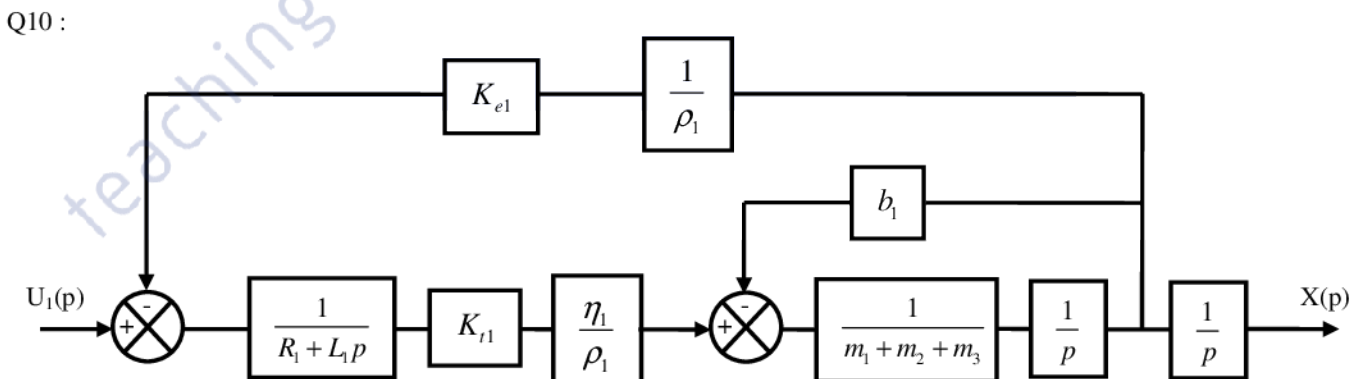
$$U_1(p) = (R_1 + L_1 p)I_1(p) + E_1(p) ; C_{mot1}(p) = K_{r1}I_1(p) ; E_1(p) = K_{e1}\Omega_{m1}(p).$$

$$\rho_1 F_{M_1}(p) = \eta_1 C_{mot1}(p) ; V_x(p) = \rho_1 \Omega_{m1}(p).$$



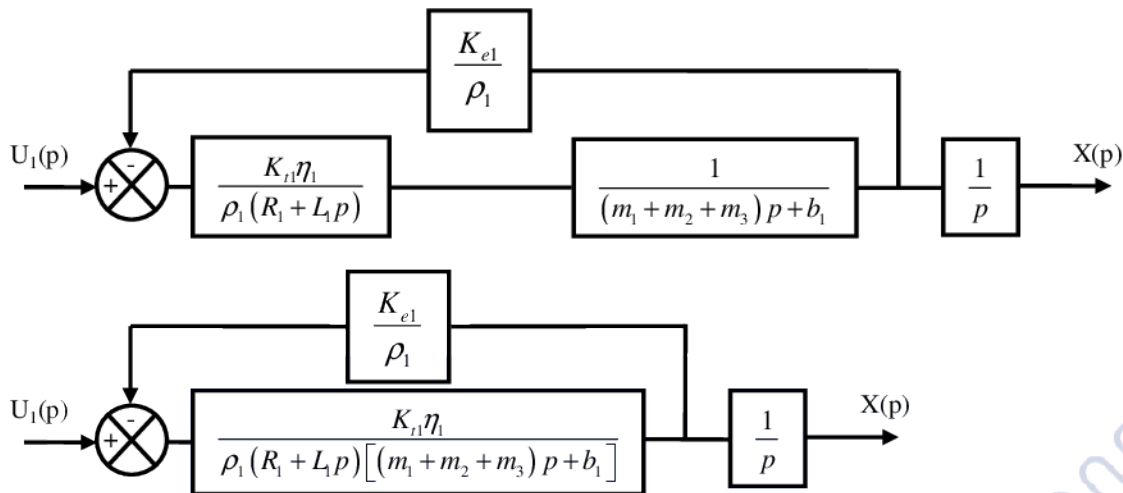
Q8 :  
Ce n'est pas la structure d'un système asservi car il n'y a pas de capteurs donnant en retour un signal sur l'état d'une grandeur physique (pas de feedback).  
Les retours et comparateurs visibles ne sont que l'image d'un système d'équations mis sous forme d'un schéma blocs.

Q9 :  
L'accélération maximale visible sur la figure 11 est supérieure à  $10 \text{ m.s}^{-2}$ . La commande des actionneurs en chaîne directe et simultanée n'est donc pas possible sans risque de débordement.





Ce schéma est mathématiquement équivalent à ceux-ci :



$$\frac{X(p)}{U_1(p)} = \frac{K_{r1}\eta_1}{p \times \left[ \rho_1(R_1 + L_1 p) \left[ (m_1 + m_2 + m_3)p + b_1 \right] + \frac{K_{r1}K_{e1}\eta_1}{\rho_1} \right]} = \frac{K_{r1}\eta_1\rho_1}{p \times \left[ \rho_1^2(R_1 + L_1 p) \left[ (m_1 + m_2 + m_3)p + b_1 \right] + K_{r1}K_{e1}\eta_1 \right]}$$

Soit sous forme canonique :

$$\frac{X(p)}{U_1(p)} = \frac{K_{r1}\eta_1\rho_1}{\rho_1^2 R_1 b_1 + K_{r1}K_{e1}\eta_1} \times \frac{1}{p \times \left[ 1 + \frac{\rho_1^2 \left[ R_1(m_1 + m_2 + m_3) + b_1 L_1 \right]}{\rho_1^2 R_1 b_1 + K_{r1}K_{e1}\eta_1} p + \frac{\rho_1^2 L_1 (m_1 + m_2 + m_3)}{\rho_1^2 R_1 b_1 + K_{r1}K_{e1}\eta_1} p^2 \right]}$$

Q11 :

La commande séquentielle découplée des axes entraîne une accélération en bout de pince qui ne dépasse pas  $10 \text{ m.s}^{-2}$  en valeur absolue pour les axes N°1 (maximum de  $7 \text{ m.s}^{-2}$ ) et N°3 (maximum de  $10 \text{ m.s}^{-2}$ ) d'après la figure 12.

Q12 :

Pour une commande découplée des axes, seule l'actionneur  $M_2$  est actif pendant le mouvement de la pince dû à l'axe N°2.

$$\overline{\Gamma}_{P/0} = \left[ \frac{d^2 \left( x\overline{x}_0 + (d_1 + z)\overline{z}_0 + d_p\overline{x}_1 \right)}{dt^2} \right]_0 = d_p \left[ \frac{d \left( \dot{\theta}\overline{z}_0 \wedge \overline{x}_1 \right)}{dt} \right]_0 = d_p \left[ \frac{d \left( \dot{\theta}\overline{y}_1 \right)}{dt} \right]_0 = d_p \left( \ddot{\theta}\overline{y}_1 + \dot{\theta}^2 \overline{z}_0 \wedge \overline{y}_1 \right)$$

Et donc  $\overline{\Gamma}_{P/0} = d_p \left( \ddot{\theta}\overline{y}_1 - \dot{\theta}^2 \overline{x}_1 \right)$ .

La norme maximale de l'accélération est donnée pour  $t = 1 \text{ s}$  où simultanément la vitesse et l'accélération de l'axe N°2 sont maximales en valeur absolue :  $\dot{\theta}_{MAX} = 1,6 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $|\ddot{\theta}_{MAX}| = 11 \text{ rad.s}^{-2}$ .

$$\|\overline{\Gamma}_{P/0}\|_{MAX} = d_p \sqrt{(\ddot{\theta}_{MAX})^2 + (\dot{\theta}_{MAX}^2)^2}$$

A.N. :  $\|\overline{\Gamma}_{P/0}\|_{MAX} = 0,5 \times \sqrt{(11)^2 + (1,6)^4} = 5,7 \text{ m.s}^{-2}$ .

Cette valeur est inférieure  $10 \text{ m.s}^{-2}$ , il n'y a donc pas de risque de débordement.

Q13 :

Etant donnée l'allure de la réponse en vitesse à un échelon, on adopte un modèle simplifié du 1<sup>er</sup> ordre de la forme :

$$\frac{\Omega(p)}{U_2(p)} = \frac{K_2}{1 + \tau p}$$

Pour l'évolution la plus lente :  $K_2 = \frac{\dot{\theta}(\infty)}{6,5} = \frac{57}{6,5} = 8,8 \text{ } ^\circ\text{.s}^{-1}\text{.V}^{-1}$  ;

$$\dot{\theta}(\tau) = 63\% \times \dot{\theta}(\infty) = 36 \text{ } ^\circ\text{.s}^{-1} \text{ et donc } \tau = 0,25 \text{ s.}$$

De plus, 
$$\frac{\Theta(p)}{U_2(p)} = \frac{1}{p} \times \frac{\Omega(p)}{U_2(p)} = \frac{K_2}{p(1+\tau p)}.$$

Q14 :

Les variations de position finale sont supérieures à  $1^\circ$  (ici plus de  $15^\circ$ ), le cahier des charges n'est donc pas respecté.

Ces différences de comportement sont dues à des actions perturbatrices variables qui agissent sur le système. Elles sont par ailleurs non modélisées sur le schéma blocs.

Le système n'est pas asservi et perturbé, il ne peut donc faire preuve d'une bonne répétabilité.

Q15 :

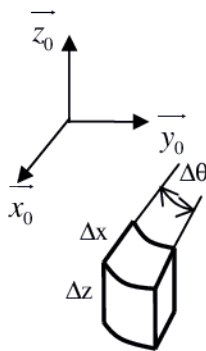
Si  $\tau\omega_u = 1$  alors  $\omega_u = \frac{1}{\tau} = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ . Le cahier des charges est respecté vis-à-vis de la rapidité ( $\geq 4 \text{ rad.s}^{-1}$ ).

Q16 :

On peut boucler le système afin d'améliorer la précision avec un retour d'information sur la position angulaire, à comparer avec la consigne.

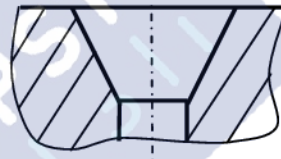
Q17 :

Pour le bon positionnement du tube dans un trou du plateau, la performance à prendre en compte est l'écart statique en position sur chacun des axes.



$\Delta x = 2 \text{ mm} ; \Delta z = 4 \text{ mm} ; \Delta\theta = 2^\circ.$

Partie supérieure du trou fraisurée afin de guider le centrage du tube dans son logement :



Q18 :

$\varphi(\omega) > 180^\circ$  donc la marge de gain est infinie :  $M_G = \infty$ .

$G_{dB}(2,3) \approx 0$  et  $\varphi(2,3) \approx -173^\circ$ . La marge de phase est alors  $M_\varphi \approx 7^\circ$ .

Le système est donc stable en boucle fermée.

Q19 :

Il y a une intégration dans la boucle et pas de perturbations modélisées, donc l'écart statique est nul :  $\varepsilon_S = 0^\circ$ . Le cahier des charges est donc respecté ( $< 1^\circ$ ).

Q20 :

Sans correction, la pulsation au gain unité est :  $\omega_u \approx 2,3 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Si on veut qu'elle soit au moins égale à  $4 \text{ rad.s}^{-1}$ , il faut translater la courbe en gain d'au moins environ 8 dB.

Cela donne donc  $20\log(K) \geq 8$  et  $K \geq 10^{\frac{8}{20}} = 2,5$ .

Le diagramme en phase n'est alors pas modifié et  $\varphi(4) \approx -176^\circ$ .

On en déduit alors la marge de phase :  $M_\varphi \approx 4^\circ$ .

Le cahier des charges n'est pas respecté quant au critère de stabilité ( $M_\varphi > 45^\circ$ ).

Q21 :

L'action correctrice doit non seulement translater la courbe en gain vers le haut (action proportionnelle), mais aussi augmenter la phase notamment aux abords de la pulsation au gain unité  $\omega_u$ . On pourrait pour cela proposer un correcteur à avance de phase.

Q22 :

Aux vues des tracés proposés figure 17, la commande est robuste car on observe peu de changement de comportement dans la phase transitoire et aucun en régime permanent, pour des variations de masse de  $\pm 10\%$ . Les performances en termes de précision et de stabilité sont donc conservées.

Q23 :

