teaching sciences for innovation

Proposition de corrigé

Concours : e3a - Polytech

Année : 2014

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Etude du téléphérique Vanoise Express

Cahier réponses

Toutes les réponses seront portées sur ce cahier à l'exclusion de toute autre copie. Les résultats sont à reporter dans les cadres prévus en bas à droite.

Sauf indication particulière, toutes les valeurs numériques sont à donner avec 3 chiffres significatifs et leurs unités. Si un résultat numérique est demandé, une expression littérale ne sera pas acceptée, et réciproquement.

3- Vérification du critère « Durée d'un trajet » de la fonction FP1 Respect du critère « Distance » de la fonction FT21

Question 1. : Pour cette question, on demande des résultats numériques avec 4 chiffres significatifs à exprimer en secondes ou mètres (unités SI).

1- Le cahier des charges précise que la distance à parcourir en petite vitesse est d_p=40 mètres.

$$(t_4-t_3)= V_p / d_p$$

$(t_4-t_3)=d_p/V_p$=40m/0.8m/s=50 secondes

$\boxed{t_4-t_3 = 50 \text{ secondes}}$

2- $v(t)=a.t \Rightarrow v(t_1)=V_0=a\times t_1 \Rightarrow$

$$t_1=V_0/a$$

t_1=12 / 0,4=30 secondes

$\boxed{t_1 = 30 \text{ secondes}}$

d_a=aire sous courbe=$V_0\times t_1/2$

$d_a=12\times 30/2$=180 mètres

$\boxed{d_a = 180 \text{ mètres}}$

3- $a=(V_p-V_0)/(t_3-t_2)$

$$(t_3-t_2)=(V_p-V_0)/a$$

$(t_3-t_2)=(0.8-12)/(-0.4)=28$ secondes

$\boxed{t_3-t_2 = 28 \text{ secondes}}$

aire sous courbe$=V_0\times(t_3-t_2)-(V_0-V_p)\times(t_3-t_2)/2$

$d_d=12\times28-(12-0,8)\times28/2=179.2$ mètres

$\boxed{d_d = 179,2 \text{ mètres}}$

4- La distance à parcourir entre les instants t_1 et t_2 est
$d_{12}=d_t-d_a-d_d-d_p$ et

$V_0=d_{12}/(t_2-t_1)$

$$(t_2-t_1) = (d_t-d_a-d_d-d_p)/ V_0$$

$(t_2-t_1)=(1830-180-179,2-40)/12=119,2$ secondes

$\boxed{t_2-t_1=119,2 \text{ secondes}}$

5-

$$t_t=6+t_1+(t_2-t_1)+(t_3-t_2)+(t_4-t_3)+2$$

$t_t=6 + 30 + 119,2 + 28 + 50 + 2=235,2$ secondes

$\boxed{t_t = 235,2 \text{ secondes}}$

Vérifiez le critère*:* « ***Durée d'un trajet*** *(de* *<u>l'ordre de départ</u>* *jusqu'à* *<u>l'ouverture des portes)</u>* » de la fonction FP1

t_t= 235.2 secondes < 240 secondes = 4 minutes

Le cahier des charges est donc respecté

4- Vérification des critères de la fonction FT132

Question 2. :

1. Montrez que $T_1=T'_1$. Précisez le solide isolé, et le principe ou théorème utilisé.

On isole la poulie de déviation et le bout de câble

Bilan des actions mécaniques extérieures

- Actions du câble T_1 et T'_1.
- Action de la liaison pivot d'axe B, $\vec{z}$

Théorème du moment statique,
au point B en projection sur $\vec{z}$

$(T'_1-T_1)\times(d/2)=0 \Rightarrow T'_1=T_1$

2. Montrez que $T_1=\dfrac{Mc.g}{2}$. Précisez le solide isolé, et le principe ou théorème utilisé.

On isole la poulie de déviation, le contrepoids et le bout de câble

Bilan des actions mécaniques extérieures

- Actions du câble T_1 et T'_1.
- Poids du contrepoids de masse M_c

Théorème de la résultante statique en proj/ $\vec{y}$: $2\times T_1=M_c\times g \Rightarrow T_1=\dfrac{Mc.g}{2}$

Question 3. :

Calculez **numériquement** la tension T_2 du câble tracteur côté Les Arcs. Précisez le ou les solides isolés, et le principe ou théorème utilisé.

On isole le chariot et la cabine.

Théorème de la résultantes statique
en projection sur le câble.

$T_2-T_1-Mg\times\sin\alpha=0$

$T_2=T_1+Mg\times\sin\alpha=\dfrac{Mc.g}{2}+Mg\times\sin\alpha$

$$\boxed{T_2=245\,306\ \text{N}}$$

$T_2=35000\times9,81/2+29000\times9,81\times\sin(15°)=245306\ N$

Question 4. :

1. Isolez la poulie motrice. En explicitant le principe ou théorème utilisé, donnez l'expression de la tension $T_{ress\ mini}$ de chaque ressort en fonction de T_1, T_2, r, D et $\tan\varphi$.

On isole la poulie motrice

Bilan des actions mécaniques extérieures:

- Action des deux freins à patin, de composante normale $T_{ress\ mini}$ et de composante tangentielle $T_{ress\ mini}.\tan\varphi$ (car on est à la limite du glissement)
- Actions du câble T_1 et T_2.
- Action de la liaison pivot d'axe A, $\vec{z}$

Théorème du moment statique
au point A en projection sur $\vec{z}$

$(T_2-T_1)\times(D/2)-2.T_{ress\ mini}\times\tan\varphi\times r=0$

$T_{ress\ mini}=(T_2-T_1)\times(D/2)/(2\times r\times\tan\varphi)$

$$\boxed{T_{ress\ mini}=\frac{D.(T_2-T_1)}{4.r.\tan\varphi}}$$

2. Calculez **numériquement** $T_{ress\ mini}$.

$T_{ress\ mini}$=(245 306-35000×9,81/ 2)×4/(4×1,9×0.3)

$T_{ress\ mini}$=129 200 N

$\boxed{T_{ress\ mini} = 129200\ N}$

Vérifiez si le niveau du critère « **Tension du ressort** des freins à patin pour immobiliser le téléphérique en gare, sans énergie extérieure » est suffisant.

2×$T_{ress\ mini}$=2×129 200=258 400 N < 280 000 N
Donc le niveau T_{ress} > 280 000 N est suffisant

Question 5. :

1. Calculez **numériquement** la pression minimum P_{min} que doit exercer l'huile sur le piston mobile pour comprimer le ressort.

$P_{min}=T_{ress}/S= 4\times T_{ress}/(\pi(D^2_{Ext}-D^2_{Int}))$

$$P_{min}= 4\times T_{ress}/(\pi(D^2_{Ext}-D^2_{Int}))$$

P_{min}=4×280 000/(π(200²-140²)=17,5 MPa

$\boxed{P_{min}.=17,5\ MPa=175\ Bars}$

2. Vérifiez si le niveau du critère « **Pression de desserrage** des freins à patin » est suffisant.

17.5 MPa < 21 MPa
donc le niveau "P>210 MPa" est suffisant.

Question 6. :

1. Ecrire l'équation du théorème de la résultante statique linéarisée à l'ordre 1 appliquée au bout de câble isolé, en projection sur $\vec{n}$.

dN-F×sin(dθ/2) -(F+dF)×sin(dθ/2)=0

dN-(2F-dF)×dθ/2)=0

On néglige les termes infiniment petits d'ordre 2

dN=F×dθ

$\boxed{dN=F\times d\theta}$

2. Ecrire l'équation du théorème de la résultante statique linéarisée à l'ordre 1 appliquée au bout de câble isolé, en projection sur $\vec{t}$.

(F+dF)×cos(dθ/2) *-F×cos(dθ/2) -dT*=0

Au premier ordre, cos(dθ/2)=1

dT=dF

$$\boxed{dT=dF}$$

3. En déduire une équation différentielle liant F, dF, dθ et ν_{mini} .

dT=dN. ν_{mini} $\Rightarrow$ dF = $F \times d\theta \times \nu_{mini}$

dF/F=$\nu_{mini} \times d\theta$

$$\boxed{dF/F=\nu_{mini} \times d\theta \text{ ou } \frac{dF(\theta)}{d\theta} = F(\theta).\nu_{\text{mini}}}$$

Question 7. : Après avoir intégré cette équation différentielle, en déduire l'expression littérale de ν_{mini} en fonction du rapport $\frac{T_2}{T_1}$ et de β.

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dF}{F} = \int_0^{\beta} \nu_{\min i} \times d\theta \quad \Rightarrow \quad [\ln(F)]_{T_1}^{T_2} = \nu_{\min i} \times \beta \Rightarrow$$

$$\ln(T_2) - \ln(T_1) = \ln(\frac{T_2}{T_1}) = \nu_{\min i} \times \beta$$

$$\nu_{\min i} = \frac{1}{\beta} \times \ln(\frac{T_2}{T_1})$$

$$\boxed{\nu_{\min i} = \frac{1}{\beta} \times \ln(\frac{T_2}{T_1})}$$

Question 8. : Indépendamment de ce qui a été fait précédemment, on donne $\frac{T_2}{T_1}$ =1.5

1. Calculez **numériquement** ν_{mini} .

ν_{mini} *=360/(2×π×200)×ln(1,5)*

ν_{mini} *=0.116*

$$\boxed{\nu_{mini} = 0.116}$$

2. Vérifiez si le niveau du critère « **Coefficient d'adhérence** entre la poulie motrice et le câble tracteur pour immobiliser le téléphérique en gare » est suffisant.

$\nu_{mini\ secu}$ =2×0.0116=0,232 < 0.3

Donc le niveau "$\tan\varphi \geq$0.3" est suffisant

5- Vérification du critère « Vitesse maximum de la cabine » de la fonction FT121
Vérification du critère « Durée d'arrêt par freinage mécanique de la cabine » de la fonction FT22

Question 9. :

1- Donnez l'expression de P_{Ext}, la somme des puissances extérieures au système matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel R_0.

$$P_{vent\text{->}cabine/R0} = {}_M\begin{Bmatrix} -F_{vent}.\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes {}_M\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_0.\vec{x}_1 \end{Bmatrix} = -Fvent \times V_0 \times \cos\gamma$$

Avec M, Point d'application de l'action du vent et $\vec{x}_1$ direction du déplacement

$$P_{g\text{->}cabine/R0} = {}_G\begin{Bmatrix} -M.g.\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes {}_G\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_0.\vec{x}_1 \end{Bmatrix} = -M \times g \times V_0 \times \sin\gamma$$

$P_{mot}=2P_m$

$$\boxed{P_{Ext} = 2P_m - Fvent \times V_0 \times \cos\gamma - M \times g \times V_0 \times \sin\gamma}$$

2- Donnez l'expression de P_{Int}, la somme des puissances intérieures au système matériel E.

$P_{int}=-f \times \omega^2_m(t)$

$$\boxed{P_{Int} = -f \times \omega^2_m(t)}$$

Question 10. : Donnez l'expression de la vitesse de rotation $\omega_m(t)$ d'un moteur en fonction de la vitesse $V(t)$ de la cabine, du rapport k et du diamètre D de la poulie motrice.

$V(t)=(D/2) \times \omega(t)=(k.D/2)\omega_m(t)$

$$\boxed{\omega_m(t) = (2/k \times D)V(t)}$$

Question 11. :

1- Appliquez le théorème de l'energie cinétique. Donnez l'expression de la puissance P_m délivrée par chaque moteur en fonction de k, V_0, D, M, g, f, γ et F_{Vent} .

A vitesse constante, $\frac{d}{dt}(T_{E/R_0}) = 0 = P_{ext} + P_{\text{int}} = 2P_m - F_{vent}V_0.\cos\gamma - Mg.V_0.\sin\gamma - f.\left(\frac{2}{k.D}\right)^2 V_0^2$

$$P_m = \frac{1}{2}\left(F_{vent} \times V_0 \times \cos\gamma + M \times g \times V_0 \times \sin\gamma + f \times \left(\frac{2}{k \times D}\right)^2 \times V_0^2\right)$$

2- Faire l'application numérique de P_m

$$P_m = \frac{1}{2}\left(5000 \times 12 \times \cos 15 + 29000 \times 9.81 \times 12 \times \sin 15 + 6 \times \left(\frac{2 \times 20}{4}\right)^2 \times 12^2\right)$$

P_m =514 kW

Les moteurs choisis ont une puissance maximum $P_{m,maxi}$=530 kW. Permettent-ils de respecter le niveau du critère « **Vitesse maximum de la cabine** dans une pente à 15° avec un vent défavorable » de la fonction FT121 ?

530>514 kW
donc les moteurs choisis respectent le niveau V_0>12 m/s

Question 12. :

1- Calculez en fonction de $\omega_m(t)$ l'expression littérale de l'énergie cinétique de chaque élément du système matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel R_0.

Pour la poulie motrice de diamètre D et de moment d'inertie J_{pm} :

T(Poulie motrice/R_0)= $\frac{1}{2}J_{pm}.\omega^2(t) = \frac{1}{2}J_{pm}.k^2.\omega_m^2(t)$

T(Poulie motrice/R_0)= $\frac{1}{2}J_{pm}.k^2.\omega_m^2(t)$

Pour les 5 poulies de déviation de diamètre d et de moment d'inertie respectifs J_d :

T(5 poulies déviation/R_0)= $\frac{5}{2}J_d.\left(\frac{D}{d}.\omega(t)\right)^2 = \frac{5}{2}J_d.\left(\frac{D}{d}.k\right)^2.\omega_m^2(t)$

T(5 poulies déviation/R_0)= $= \frac{5}{2}J_d\left(\frac{D}{d}.k\right)^2.\omega_m^2(t)$

Pour les 50 poulies de guidage de diamètre d_g et de moment d'inertie respectifs J_g :

T(50 poulies guidage/R$_0$)= $\frac{50}{2} J_g.\left(\frac{D}{d_g}.\omega(t)\right)^2 = \frac{50}{2} J_g.\left(\frac{D}{d_g}.k\right)^2.\omega_m^2(t)$

$$\boxed{T(\text{50 poulies guidage}/R_0)= \frac{50}{2} J_g.\left(\frac{D}{d_g}.k\right)^2.\omega_m^2(t)}$$

Pour le câble de masse m :

T(câble/R$_0$)= $\frac{1}{2} m.V^2(t) = \frac{1}{2} m.\left(\frac{D.\omega(t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m.\left(\frac{D.k}{2}\right)^2.\omega_m^2(t)$

$$\boxed{T(\text{câble}/R_0)= \frac{1}{2} m.\left(\frac{D.k}{2}\right)^2.\omega_m^2(t)}$$

Pour la cabine de masse M :

T(cabine/R$_0$)= $\frac{1}{2} M.V^2(t) = \frac{1}{2} M.\left(\frac{D.\omega(t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} M.\left(\frac{D.k}{2}\right)^2.\omega_m^2(t)$

$$\boxed{T(\text{cabine}/R_0)= \frac{1}{2} M.\left(\frac{D.k}{2}\right)^2.\omega_m^2(t)}$$

Pour les deux moteurs, de moment d'inertie respectifs J_m :

T(2 moteurs/R$_0$)= $\frac{2}{2} J_m.\omega_m^2(t)$

$$\boxed{T(\text{2 moteurs}/R_0)= \frac{2}{2} J_m.\omega_m^2(t)}$$

2- En déduire l'expression littérale du moment d'inertie équivalent J de tout le système matériel (E) ramené sur l'axe des moteurs.

T(E/R$_0$)= T(Poulie motrice/R$_0$) + T(5 poulies déviation/R$_0$) + T(50 poulies guidage/R$_0$) + T(câble/R$_0$) + T(cabine/R$_0$) + T(2 moteurs/R$_0$)

$$T(E/R_0)= \frac{1}{2} J_{pm}.k^2.\omega_m^2(t) + \frac{5}{2} J_d\left(\frac{D}{d}.k\right)^2.\omega_m^2(t) + \frac{50}{2} J_g.\left(\frac{D}{d_g}.k\right)^2.\omega_m^2(t) + \frac{1}{2} m.\left(\frac{D.k}{2}\right)^2.\omega_m^2(t) + \frac{1}{2} M.\left(\frac{D.k}{2}\right)^2.\omega_m^2(t) + \frac{2}{2} J_m.\omega_m^2(t)$$

$$\boxed{J = J_{pm}.k^2 + 5J_d\left(\frac{D}{d}.k\right)^2 + 50J_g.\left(\frac{D}{d_g}.k\right)^2 + (m+M).\left(\frac{D.k}{2}\right)^2 + 2J_m}$$

Question 13. :

1- Appliquez le théorème de l'énergie cinétique au système matériel (E) dans son mouvement par rapport au référentiel R_0. Déterminez l'expression de $\dot{\omega}_m(t)$, la dérivée temporelle de $\omega_m(t)$.

D'après les hypothèses complémentaires, $P_{Int}=0$, $P_m=0$ et $P_{Vent}=0$

$$P_{f->poul/R0}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{f\rightarrow poul}\\ -Cf.\vec{z}\end{matrix}\right\}_P \otimes \left\{\begin{matrix}\omega(t).\vec{z}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_P = -Cf.\omega(t) = -Cf.k.\omega_m(t)$$ avec P, un point de l'axe de la poulie

$$P_{g->cabine/R0}=\left\{\begin{matrix}-M.g.\vec{y}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G \otimes \left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ V_0.\vec{x}_1\end{matrix}\right\}_G = -M\times g\times V_0\times\sin\gamma = -M\times g\times k\times\frac{D}{2}\times\sin\gamma\times\omega_m(t)$$

$$\frac{d}{dt}T(E/R_0) = J\times\dot{\omega}_m(t)\times\omega_m(t) = \left(-Cf\times k - M\times g\times k\times\frac{D}{2}\times\sin\gamma\right).\omega_m(t)$$

$$\boxed{\dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J}\left(-Cf\times k - M\times g\times k\times\frac{D}{2}\times\sin\gamma\right)}$$

2- Donnez l'expression de la décélération notée a de la cabine en fonction de k, D et $\dot{\omega}_m(t)$.

$$a = \frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{D}{2}\times k\times\omega_m(t)\right) = \frac{D}{2}\times k\times\dot{\omega}_m(t)$$

$$\boxed{a = \frac{D}{2}\times k\times\dot{\omega}_m(t)}$$

3- Donnez en fonction de a et de V_0 l'expression de la durée τ du freinage.

$$a = \frac{0-V_0}{\tau-0} = -\frac{V_0}{\tau}$$

$$\boxed{\tau = -\frac{V_0}{a}}$$

4- Faire l'application numérique de τ si le téléphérique est lancé à la vitesse V_0=12 m/s dans une descente de pente γ=-10°.

$$a = \frac{-1}{800\times 20^2}.\frac{4}{2}\left(300000 + 29000\times 9.81\times\frac{4}{2}\times\sin(-10)\right) = -1.257\,m/s^2$$

$$\tau = -\frac{12}{-1.257} = 9.54s$$

$$\boxed{\tau = 9.54 \text{ secondes}}$$

Vérifiez le critère « **Durée d'arrêt par freinage mécanique de la cabine** lancée à V_0=12 m/s dans une descente à 10° sans vent. » de la fonction FT22.

9.54 s<10 s le critère est donc vérifié

6- Vérification des critères « Ecart statique », « Ecart de traînage », « Marge de phase » et « *Pulsation de coupure en boucle ouverte* » *de la fonction FT121*

Question 14. : Le schéma bloc de la double motorisation étant fourni, déterminez les fonctions de transfert $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$ écrites dans le domaine de Laplace.

$$u(t) - e(t) = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) \xrightarrow{L} U(p) - E(p) = I(p)[R + Lp] \quad (1)$$

$$2c_m(t) - c_r(t) = J\dot{\omega}_m(t) + f\omega_m(t) \xrightarrow{L} 2C_m(p) - C_r(p) = \Omega_m(p)[f + Jp] \quad (2)$$

$$C_m(t) = k_T i(t) \xrightarrow{L} C_m(p) = k_T I(p) \quad (3)$$

$$E(t) = k_E \omega_m(t) \xrightarrow{L} E(p) = k_T \Omega_m(p) \quad (4)$$

(1) $\rightarrow G_1(p) = \dfrac{1}{R + Lp}$ (2) $\rightarrow G_3(p) = \dfrac{1}{f + Jp}$

(3) $\rightarrow G_2(p) = k_T$ (4) $\rightarrow G_4(p) = k_E$

$G_1(p) = \dfrac{1}{R + Lp}$	$G_2(p) = k_T$	$G_3(p) = \dfrac{1}{f + Jp}$	$G_4(p) = k_E$

Question 15. : $\Omega_m(p)$ peut se mettre sous la forme : $\Omega_m(p) = F_1(p) \times U(p) - F_2(p) \times C_r(p)$

Exprimez les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ en fonction de $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.

$$C_r(p) = 0 \Rightarrow \left[\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\right]_{Cr(p)=0} = \frac{2G_1(p).G_2(p).G_3(p)}{1 + 2G_1(p).G_2(p).G_3(p).G_4(p)}$$

$$U(p) = 0 \Rightarrow \left[\frac{\Omega_m(p)}{-C_r(p)}\right]_{U(p)=0} = \frac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p).G_2(p).G_3(p).G_4(p)}$$

$F_1(p) = \dfrac{2G_1(p).G_2(p).G_3(p)}{1 + 2G_1(p).G_2(p).G_3(p).G_4(p)}$	$F_2(p) = \dfrac{G_3(p)}{1 + 2G_1(p).G_2(p).G_3(p).G_4(p)}$

Question 16. : Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...).

Modèles d'identification : **fonctions du 1[er] ordre**

Justifications : **tangente à l'origine non nulle + allure exponentielle décroissante**

Déterminez **numériquement** $F_1(p)$

On pose : $F_1(p)=\dfrac{K_1}{1+\tau_1\cdot p}$

$$K_1=\frac{\omega_m(\infty)}{100}=\frac{17.25}{100}=0.1725 rad/(sV)$$

$Tr_{5\%}=3\cdot\tau_1=1.4s$ $\tau_1=0.47s$

Déterminez **numériquement** $F_2(p)$

On pose : $F_2(p)=\dfrac{K_2}{1+\tau_2\cdot p}$

$$K_2=\frac{-\omega_m(\infty)}{1000}=\frac{0.58}{1000}=5.8\cdot10^{-4} rad/(s\cdot N\cdot m)$$

$Tr_{5\%}=3\cdot\tau_2=1.4s$ $\tau_2=0.47s$

$F_1(p)=\dfrac{0.1725}{1+0.47\cdot p}$	$F_2(p)=\dfrac{5.8\cdot10^{-4}}{1+0.47\cdot p}$

Question 17. : Donnez la valeur **numérique** des trois constantes B, D et T.

D'après le schéma : $H(p)=F_2(p)=\dfrac{K_2}{1+\tau_2\cdot p}=\dfrac{5.8\cdot10^{-4}}{1+0.47\cdot p}$

Et par conséquent : $B=\dfrac{K_1}{K_2}=\dfrac{0.1725}{5.8\cdot10^{-4}}=297.4N\cdot m/V$

$B=297.4N\cdot m/V$	$D=K_2=5.8\cdot10^{-4} rad/s\cdot N\cdot m$	$T=0.47s$

Question 18. :

1- Déterminez l'expression du gain « E ».

La transmission implique :

$$v(t)=\frac{D}{2}\cdot\omega(t)=\frac{D}{2}\cdot k\cdot\omega_m(t)$$

$$\boxed{E=\frac{D}{2}\cdot k}$$

Faire une application numérique

$$\boxed{E=0.1m}$$

2- Déterminez l'expression du gain « F » pour que $\varepsilon(t)=0$ entraîne $v_c(t)=v(t)$.

$\varepsilon(t)=F\cdot v_c(t)-\dfrac{\mu}{E}v(t)=0$ quand $v_c(t)=v(t)$ si $F=\dfrac{\mu}{E}$

$$\boxed{F=\frac{\mu}{E}}$$

Faire une application numérique.

$$\boxed{F=7.16V\cdot s/m}$$

Question 19. : Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

La fonction de transfert en boucle ouverte est du 1er ordre ⇒ système bouclé stable

Question 20. : On suppose $C_r(p)=0$. Calculez en fonction de C_0, A', B, G, et V_0 l'expression de l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude V_0=12 m/s.

La FTBO est de **classe nulle** donc $\varepsilon'_s = \dfrac{V_0}{1+K_{FTBO}} = \dfrac{V_0}{1+C_0\cdot A'\cdot B\cdot G}$

$$\boxed{\varepsilon'_s = \frac{V_0}{1+C_0\cdot A'\cdot B\cdot G}}$$

Faire l'application numérique.

$$\boxed{\varepsilon'_s = 4.286\,m/s}$$

Question 21. : On suppose $Vc(p)=0$.

1- Calculez en fonction de C_0, A', B, G, et C_{r0} l'expression de l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude C_{r0}=-7270 $N.m$ qui modéliserait la descente des « Arcs ».

$$\frac{V(p)}{Cr(p)} = \frac{-G}{1+T\cdot p+C_0\cdot A'\cdot B\cdot G} \qquad \varepsilon''(p) = -V(p) = \frac{G}{1+T\cdot p+C_0\cdot A'\cdot B\cdot G}\cdot Cr(p)$$

$$\varepsilon''_s = \lim_{p\to 0} p\cdot\varepsilon''(p) = \frac{Cr_0\cdot G}{1+C_0\cdot A'\cdot B\cdot G}$$

$$\boxed{\varepsilon''_s = \frac{Cr_0\cdot G}{1+C_0\cdot A'\cdot B\cdot G}}$$

Faire l'application numérique.

$$\boxed{\varepsilon''_s = -0.156\,m/s}$$

2- Faire également une application numérique si C_{r0}=+7460 $N.m$ pour la modélisation de la montée vers « La Plagne ».

$$\boxed{\varepsilon''_s = +0.160\,m/s}$$

__Question 22. :__ Donnez **__numériquement__** l'écart statique total ε_s dans les deux cas suivants :

1- Descente des « Arcs ».

$$\varepsilon'_s = 4.286 - 0.156$$

$$\boxed{\varepsilon'_s = 4.13m/s}$$

2- Montée vers « La Plagne ».

$$\boxed{\varepsilon'_s = 4.46m/s}$$

3- Existe-t-il une valeur de C_0 réaliste pour laquelle le critère « **Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifiez.

Non car pour annuler cette erreur statique il faudrait un **gain C_0 infini**

__Question 23. :__ Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée *FTBO(p)*.

$$FTBO(p) = \frac{C_i \cdot A' \cdot B \cdot G}{p \cdot (1 + T \cdot p)}$$

$$\boxed{FTBO(p) = \frac{C_i \cdot A' \cdot B \cdot G}{p \cdot (1 + T \cdot p)}}$$

Faire l'application numérique pour $C_i = 1$.

$$\boxed{FTBO(p) = \frac{1.8}{p \cdot (1 + 0.47 \cdot p)}}$$

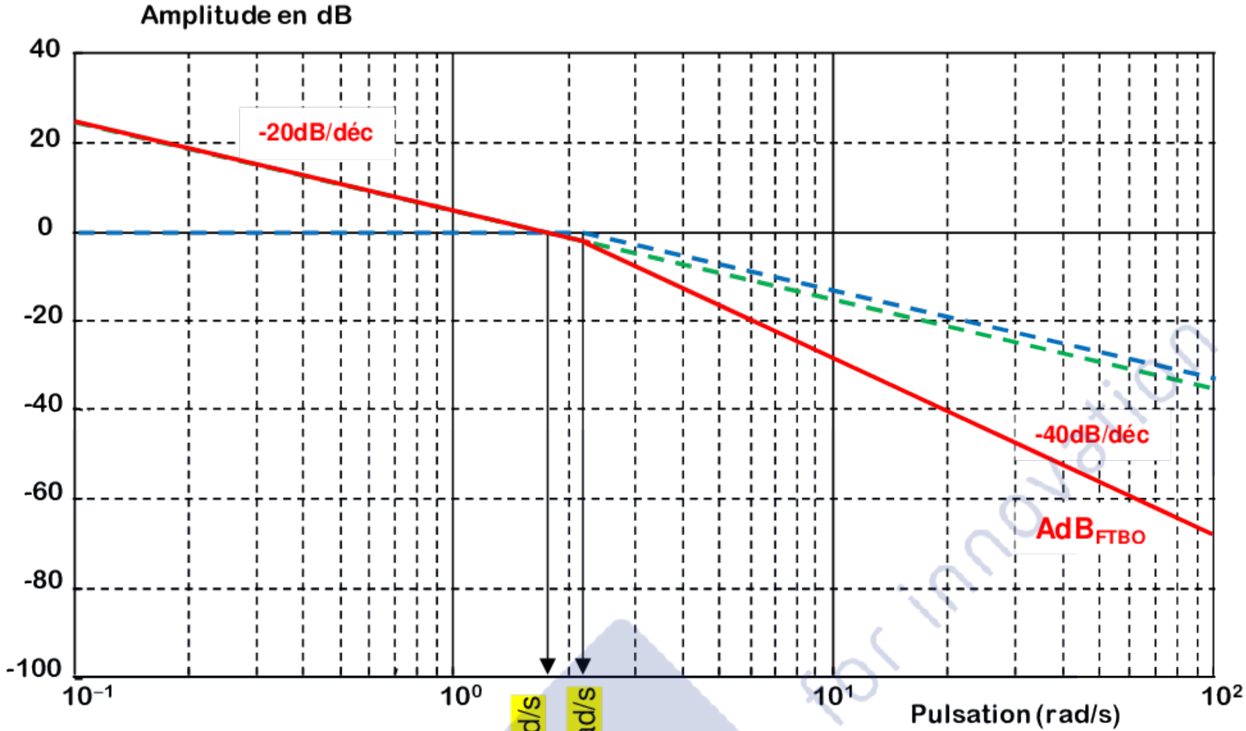
__Question 24. :__ Tracez sur la feuille page suivante le diagramme asymptotique de Bode de *FTBO(p)*. Tracez également l'allure des courbes.

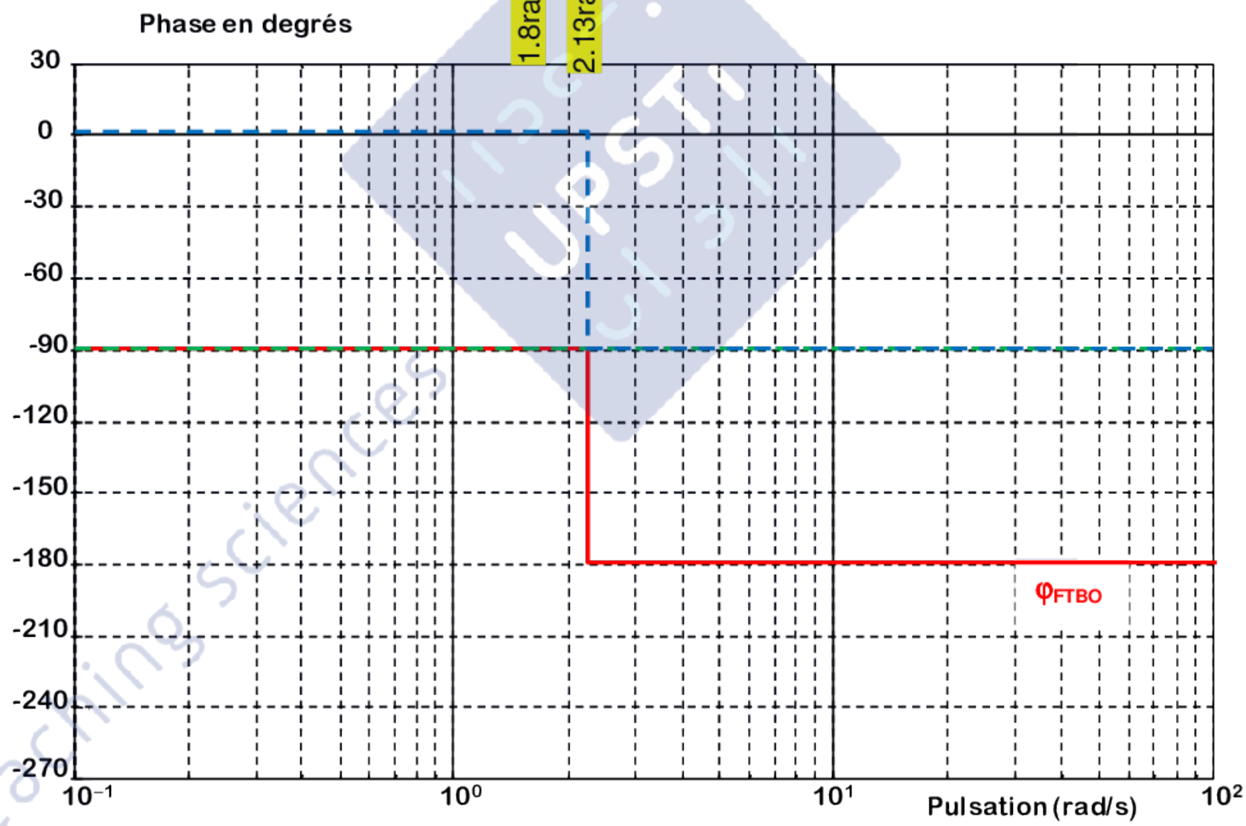
La FTBO peut s'écrire : $FTBO(p) = \frac{1.8}{p} \times \frac{1}{(1 + 0.47 \cdot p)}$

La FTBO est le produit :

- d'un intégrateur de gain 1.8
- d'un premier ordre de gain unitaire et de constante de temps 0.47s (pulsation de coupure 2.13rad/s)

Tournez la page S.V.P.





__Question 25. :__

1. Quelles valeurs **__numériques__** de C_i permettent de respecter le critère de « **Marge de phase** » du cahier des charges ?

$$M\varphi \geq 45° \quad \Rightarrow \quad \omega_{0dB} \leq 2.13 rad/s \quad \text{soit} \quad \frac{C_i A' BG}{\sqrt{2}} \leq 2.13 rad/s$$

$$C_i \leq \frac{\sqrt{2}}{A' BG} \cdot 2.13 \qquad C_i \leq 1.67$$

$$\boxed{C_i \leq 1.67}$$

2. Ces valeurs de C_i permettent-elles de respecter le critère de « ***Pulsation de coupure en boucle ouverte*** » du cahier des charges ? Justifiez.

Oui, tant que Ci n'est pas trop petit, le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » sera respectée

(*remarque* : on peut montrer que $\omega_{0dB} \geq 1 rad/s \Rightarrow C_i \geq \frac{(1+T^2)^{1/2}}{A'BG} = 0.61$)

Question 26. :

1. On suppose $C_r(p)=0$. Calculez **numériquement** l'écart statique en suivi de consigne ε'_s engendré par une consigne en échelon d'amplitude V_0=12 m/s.

La FTBO est de **classe 1** alors $\varepsilon'_s = 0$

$$\boxed{\varepsilon'_s = 0}$$

2. On suppose $Vc(p)=0$. Calculez **numériquement** l'écart statique en régulation ε''_s engendré par une perturbation échelon d'amplitude C_{r0}=*-7270 N.m* qui modéliserait la descente des « Arcs ».

Une intégration est placée en amont de la perturbation alors $\varepsilon''_s = 0$

$$\boxed{\varepsilon''_s = 0}$$

3. Donnez **numériquement** l'écart statique total $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$.

$$\boxed{\varepsilon_s = 0}$$

Le critère « **Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié ? Justifiez.

L'écart statique est **nul** donc le critère est vérifié

Question 27. : On suppose $C_r(p)=0$.

Calculez l'expression de l'écart de traînage ε_v engendré par une consigne en rampe unitaire.

Pour une FTBO de **classe 1**, l'erreur de traînage s'exprime : $\varepsilon_v = \frac{a}{K_{FTBO}} = \frac{1}{C_i \cdot A' \cdot B \cdot G}$

$$\boxed{\varepsilon_v = \frac{1}{C_i \cdot A' \cdot B \cdot G}}$$

Existe-t-il une valeur de C_i réaliste qui permette de vérifier le critère « **Ecart de traînage** (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » ? Justifiez.

L'erreur de traînage devant être nulle, C_i doit tendre vers **l'infini**, ce qui est **irréaliste**.

Question 28. : Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction $C_a(p)$?

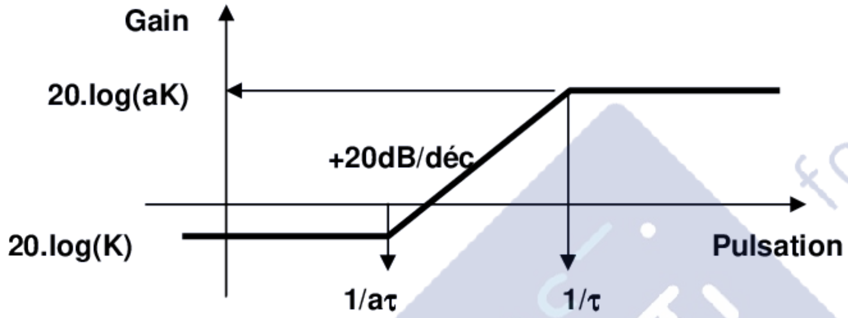
Pour ω_{0dB} la phase vaut -205° donc la **marge de phase est négative** : le système **n'est pas stable**

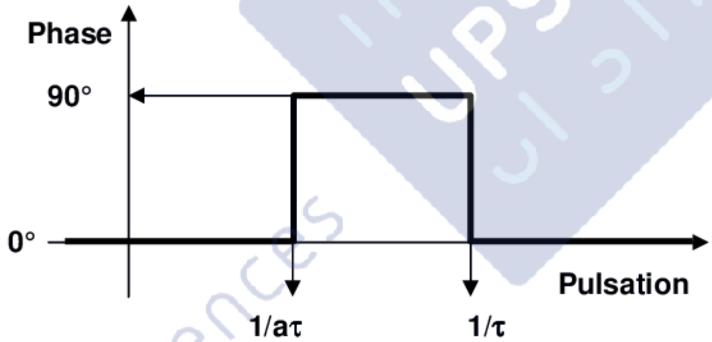
Question 29. : Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 rd/s pour obtenir une phase de -135° ?

Degrés de phase à ajouter : -205° + Degφ = -135°

Degrés de phase : **70°**

Question 30. : Tracez en fonction de a, τ et K les diagrammes **asymptotiques** de Bode (amplitude et phase) du correcteur $C_a(p) = K\dfrac{1+a.\tau.p}{1+\tau.p}$ avec a>1. Précisez clairement les amplitudes ou les phases de **toutes les asymptotes horizontales** en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.





Question 31. : La phase maximum $\varphi_{\max}$ ajoutée par $C_a(p)$ peut être calculée par la formule : $\sin\varphi_{\max} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Calculez **numériquement** a pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode à la question 29.

D'après ce qui précède :

$a = \dfrac{1+\sin\varphi_{max}}{1-\sin\varphi_{max}}$ avec $\varphi_{\max}$ = 70°

$a = 32.16$

Question 32. :

1. Donnez l'expression en fonction de a et τ de la pulsation ω pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

Etant donné les propriétés de symétrie de la courbe de phase : $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\tau \cdot a\tau}}$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}}$$

2. En déduire la valeur numérique de τ pour que $\varphi_{\max}$ soit ajoutée à la pulsation 1 rd/s.

Il vient : $\tau = \dfrac{1}{\omega\sqrt{a}}$

$$\boxed{\tau = 0.176 s}$$

Question 33. : Calculez **numériquement** la valeur à donner à K pour respecter les critères de « **Marge de phase** » et de « ***Pulsation de coupure en boucle ouverte*** » du cahier des charges ? Précisez la démarche utilisée.

Pour respecter ces 2 critères il faut que la pulsation ω_{0dB} soit égale à 1rad/s

Or pour ce correcteur le gain correspondant à son maximum de phase vaut : $20 \cdot log\left(K \cdot \sqrt{a}\right)$

D'après le diagramme de Bode fourni en annexe 4 il vient :

$$20 \cdot log\left(K \cdot \sqrt{a}\right) = -4.2 dB$$

$$\boxed{K = 0.109}$$

Question 34.

1. Les critères « **Ecart statique** en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « **Ecart de traînage** (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés ? Justifiez.

La FTBO est de **classe 2** alors l'écart statique est nul même en présence d'une perturbation échelon (une intégration au moins placée en amont de la perturbation)

La FTBO est de **classe 2** alors l'écart de traînage est nul

2. Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifiez.

D'après ce qui précède, ce correcteur permet bien de vérifier **tous les critères** du cahier des charges.

7- Vérification du critère « Energie consommée » de la fonction FP3

Question 35. :

1. Pour chacune des 6 phases, calculez numériquement en Joules l'énergie Wi (i variant de 1 à 6) produite ou consommée par le téléphérique, c'est-à-dire par l'ensemble des 2 moteurs.

0<t<30 s	30<t<71 s	71<t<127 s
$W_1 = 2\times -110\times 678/2\times 30$	$W_2 = 2\times -364\times 678\times 41$	$W_3 = 2\times 72\times 695\times 56$
W_1 = - 2.24 *MJ*	W_2 = - 20.24 *MJ*	W_3 = 5.6 *MJ*
127<t<149 s	**149<t<177 s**	**177<t<235 s**
$W_4 = 2\times 508\times 712\times 22$	$W_5 = 2\times 190\times (712+63)/2\times 28$	$W_6 = 2\times 448\times 63\times 58$
W_4 = 15.91 *MJ*	W_5 = 4.12 *MJ*	W_6 = 3.27 *MJ*

2. En déduire numériquement l'énergie W consommée pour le trajet entre « Les Arcs » et « La Plagne ».

W = 6.44 *MJ*

Calculez en euros le coût d'un trajet sur une base de 12 centimes le kilowattheure.

1 *kWh* = 3600 *kWs* = 3.6 *MJ* d(où une consommation de W = 6.44/3.6 = 1.79kWh

Coût = 1.79 x 12 centimes

Coût = 21.47 centimes

Le critère « **Energie consommée** pour un trajet sans vent contraire. » est-il vérifié ? Justifiez.

Le critère est bien vérifié 6.44 *MJ* < 10 *MJ*

---

3. Quelle énergie W_{Max} aurait-on consommée sans le système de récupération ?

$W_{Max} = W_3 + W_4 + W_5 + W_6$

W_{Max} = 28.92 *MJ*

Conclure sur l'intérêt de ce dispositif de récupération d'énergie.

Grâce à ce dispositif, la **consommation a ainsi été réduite** par 4.5 fois

Tournez la page S.V.P.

8- Conception partielle de la fonction FP2 : « Assurer la sécurité des passagers ».

Questions 36. 1&2 :