

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2016

Filière : TSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

# CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

## EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI - MODELISATION

### PARTIE II - ÉTUDE DE LA PHASE PRÉCÉDANT LA MISE À L'EAU DE LA BOULE À VAGUES

#### Q1. Loi de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, la somme des puissances des forces extérieures exercées sur l'ensemble { câble ; boule à vague } est égale à la dérivée de son énergie cinétique par rapport au temps

#### Q2. Vitesse du centre de gravité

$$\vec{V}_{G,boule,0} = d \cdot \dot{\theta} \vec{x} \quad E_c = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\theta}^2$$

#### Q3. Expression des puissances mises en jeu :

Du à la force de gravité :  $P_g = -mgd\dot{\theta} \sin \theta$

Du aux frottements visqueux :  $P_f = -b\dot{\theta}^2$

#### Q4. Equation différentielle de l'évolution de l'angle

$$\frac{dE_c}{dt} = P_g + P_f$$

$$m d^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -mgd\dot{\theta} \sin \theta - b\dot{\theta}^2$$

$$m d^2 \ddot{\theta} = -mgd \sin \theta - b\dot{\theta}$$

#### Q5. Démonstration de la forme de l'équation

En posant :  $\theta \approx 0$  donc  $\sin \theta = \theta$  on obtient :  $m d^2 \ddot{\theta} = -mgd\theta - b\dot{\theta}$  (1)

#### Q6. Equation caractéristique de l'équation différentielle (1) et son discriminant.

$$m d^2 r^2 + b r + mgd = 0 \quad \Delta = b^2 - 4m^2 d^3 g$$

#### Q7. Valeur maximale que peut prendre le coefficient de frottement visqueux

$$\Delta < 0 \text{ donc } b < \sqrt{4m^2 d^3 g}$$

AN:  $b < 5397$

#### Q8. Expression de l'angle

Racines de l'équation caractéristique :  $\frac{-b \pm i \sqrt{-b^2 + 4m^2 d^3 g}}{2m d^2}$  soit  $\mu \pm i\omega$

Solution générale :  $\theta(t) = e^{\mu t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$

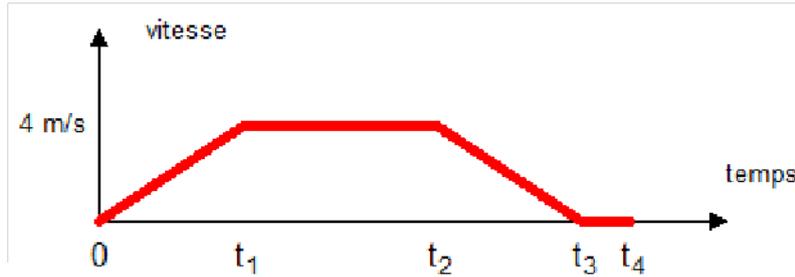
Conditions initiales :  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$

Solution de l'équation linéarisée (1) :  $\theta(t) = e^{\mu t} \theta_0 \cos \omega t$

#### Q9. Ecart entre les deux courbes

Il est insignifiant. On pourrait supposer que l'équation exacte possède un ordre supérieur à 2, mais avec des pôles qui sont largement non dominant.

Q10. Construire une représentation graphique de cette vitesse.



Q11. Exprimer la vitesse du chariot

Phase 1, de 0 à  $t_1$  :  $\dot{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}_{max}}{t_1} t$

Phase 2, de  $t_1$  à  $t_2$  :  $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_{max}$

Phase 3, de  $t_2$  à  $t_3$  :  $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_{max} - \frac{\dot{\lambda}_{max}}{t_3 - t_2} (t - t_2)$

Phase 4, de  $t_3$  à  $t_4$  :  $\dot{\lambda} = 0$

Q12. En déduire l'expression de l'accélération

Phase 1, de 0 à  $t_1$  :  $\ddot{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}_{max}}{t_1}$

Phase 2, de  $t_1$  à  $t_2$  :  $\ddot{\lambda} = 0$

Phase 3, de  $t_2$  à  $t_3$  :  $\ddot{\lambda} = -\frac{\dot{\lambda}_{max}}{t_3 - t_2}$

Phase 4, de  $t_3$  à  $t_4$  :  $\ddot{\lambda} = 0$

Q13. Résolution de l'équation sans second membre.

$$\Delta = 1500^2 - 4.1440.4710 = -24\,879\,600 \approx 5000^2$$

$$\mu = \frac{-1500}{2.1440} \approx -0.5 \quad \omega \approx \frac{5000}{2.1440} \approx 1,7$$

Solution sans second membre :  $\theta(t) = e^{-t/2}(A \cos 1,7t + B \sin 1,7t)$

Q14. Solution particulière de l'équation avec second membre.

Solution particulière :  $\theta(t) = \frac{-384}{4710} \approx -0.08$

Q15. Solution générale de l'équation avec second membre

Solution générale :  $\theta(t) = e^{-\frac{t}{2}}(A \cos 1,7t + B \sin 1,7t) - 0.08$

Q16. Identification des quatre phases de la mise à l'eau

Phase 1 : de  $t_0 = 0$  à  $t_1 = 5s$

Phase 2 : de  $t_1$  à  $t_2 = 15s$

Phase 3 : de  $t_2$  à  $t_3 = 20s$

Phase 4 : après  $t_3$

Q17. Respect du critère d'angle maximal

Non car on dépasse  $6^\circ$

Q18. Temps d'attente

L'écart de 10 cm impose un angle inférieur à  $0.1/d$  (en assimilant  $\sin \theta = \theta$ ) soit 0,03rad soit  $2^\circ$

Cela est vrai à partir de  $t=21s$ , ce qui implique que la phase 4 doit durer au moins 1 seconde.

### PARTIE III - ESTIMATION DU TEMPS RÉEL D'UTILISATION DE LA BOULE À VAGUES

Q19. Matrice colonne

$$Z_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ r_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q20. Expression de  $P(A_{n+1})$

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \setminus A_n) \cdot P(A_n) + P(A_{n+1} \setminus R_n) \cdot P(R_n) + P(A_{n+1} \setminus F_n) \cdot P(F_n)$$

Q21. Expression de  $Z_{n+1}$

$$Z_{n+1} = U \cdot Z_n \text{ Donc par récurrence } \forall n \in \mathbb{N}, Z_n = U^n \cdot Z_0$$

Q22. Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_U(X) &= \det(X \cdot I_3 - U) \\ &= \begin{vmatrix} x - 0,1 & -0,8 & -0,5 \\ -0,1 & x - 0,2 & -0,1 \\ -0,8 & 0 & x - 0,4 \end{vmatrix} \\ &= (x - 0,1)(x - 0,1)(x + 0,4) \end{aligned}$$

Q23. Valeurs propres

Ce sont les racines du polynôme caractéristique : 1 ; -0,4 ; 0,1

Q24. Diagonalisable

Oui car elle admet trois valeurs propres distinctes.

Q25. Matrice  $D$  et  $P$

$$D = P^{-1}UP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 24 & -3 & -1 \\ 7 & -5 & 0 \\ 32 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Q26. Expression de  $U^n$

Comme  $D = P^{-1}UP$  une récurrence montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-0,4)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Q27. Démonstration

En inversant la matrice on obtient :  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/63 & 1/63 & 1/63 \\ 1/45 & -8/45 & 1/45 \\ -24/35 & 32/35 & 11/35 \end{pmatrix}$

Q28. Calculer la position stable de la boule.

On résout le système 
$$\begin{cases} a = 0.1a + 0.8r + 0.5f \\ f = 0.8a + 0.4f \\ a + r + f = 1 \end{cases} \quad \text{Ce qui donne } a = 8/21 ; r = 1/9 ; f = 32/63$$

Q29. Interprétation quant au temps réel d'utilisation de la boule.

La boule est donc utilisée à environ 50% du temps dans la piscine, elle est rangée 38% du temps et en panne 11% du temps.

PARTIE IV - MODÈLE POUR LA RÉALISATION DE LA COMMANDE DE LA BOULE À VAGUES

Q30. À partir d'une étude géométrique

$$\delta = l_3 \sin \alpha + l_4 \sin \beta \quad \text{en considérant } \beta \approx \frac{\pi}{2}$$

$$\text{on obtient } \delta = l_3 \sin \alpha + l_4 \quad (1)$$

Q31. Expression de l'effort vertical

En utilisant le PFD sur l'axe vertical :  $Poids + F_{eau/sphère} = m_2 \cdot \ddot{\delta}$  et le résultat (1)

$$F_{eau/sphère} = mg + l_3 \alpha^2 m_2 \sin \alpha$$

Q32. Expression du rayon

$$\text{En utilisant Pythagore : } r^2(y) + (R - y)^2 = R^2$$

$$\text{D'où : } r(y) = \sqrt{2Ry - y^2}$$

Q33. Justification du calcul du volume immergé de la sphère

$$V(e) = \int_0^e \pi \cdot r^2(y) \cdot dy = \int_0^e \pi(2Ry - y^2) dy$$

Q34. Expression littérale du volume immergé

$$V(e) = R\pi e^2 - \pi \frac{e^3}{3}$$

$$\text{Expression de la poussée d'Archimède : } F_{arch} = V(e) \cdot \mu_{eau} \cdot g = \pi \left( Re^2 - \frac{e^3}{3} \right) \cdot \mu_{eau} \cdot g$$

Q35. À l'équilibre

$$\text{En appliquant le PFS : } \vec{F}_{arch} + \vec{poids} = \vec{0}$$

$$\left( Re^2 - \frac{e^3}{3} \right) \cdot \mu_{eau} \cdot g = mg$$

$$\frac{3m}{e^2 \cdot \mu_{eau} \cdot \pi} = 3 \cdot R - e$$

$$\text{Soit } \frac{D}{e^2} = C - e \quad \text{avec } C = 3R \quad \text{et } D = \frac{3m}{\mu_{eau} \cdot \pi}$$

$$\text{AN : } C = 2,1 \text{ m} \quad \text{et } D = 0,15 \text{ m}^{-3}$$

Q36. Equation de la tangente à la courbe à la position d'équilibre

$$\text{On dérive la fonction } \omega : \dot{\omega} = K(2Re - e^2)$$

$$\text{Donc l'équation de la tangente devient } \omega = K(2Re_{equi} - e_{equi}^2)e + K(Re_{equi}^2 - e_{equi}^3/3)$$

Q37. Modèle linéaire de la poussée d'Archimède

$$F_{arch} = K(2Re_{equi} - e_{equi}^2)e + K(Re_{equi}^2 - e_{equi}^3/3) \quad \text{en posant } K = \pi \cdot \mu_{eau} \cdot g$$

$$\text{Donc } F_{arch} = k \cdot e + F_0$$

$$\text{avec } k = \pi \cdot \mu_{eau} \cdot g \cdot (2Re_{equi} - e_{equi}^2) \text{ et } F_0 = \pi \cdot \mu_{eau} \cdot g \cdot (Re_{equi}^2 - e_{equi}^3/3)$$

Q38. Transformée de Laplace d'une fonction retardée

$$F_a(p) = \int_0^{\infty} f_a(t)e^{-pt} dt$$

Comme  $f_a(t) = f(t - a)$  on obtient  $F_a(p) = \int_0^{\infty} f(t - a)e^{-pt} dt$

En faisant le changement de variable  $u = t - a$

$$F_a(p) = \int_0^{\infty} f(u)e^{-p(u+a)} du = e^{-pa} \int_0^{\infty} f(u)e^{-pu} du = e^{-pa}F(p)$$

Q39. Transformée de Laplace de l'équation différentielle

$$mp^2 Y_G(p) = F_{ext}(p) - k(Y_G(p) - Y_G(p) \cdot e^{-\tau p})$$

$$Y_G(p) = \frac{F_{ext}(p)}{mp^2 + k(1 - e^{-\tau p})}$$

Q40. Pulsation nécessaire pour obtenir les vagues de plus grandes amplitudes.

L'amplitude maximum est pour la pulsation  $\omega \approx 1,4 \text{ rad. s}^{-1}$

Q41. Autre phénomène à prendre en compte pour enrichir le modèle de cette étude

Il faudrait tenir compte de la réflexion des vagues sur les parois du bassin.

La société Wow Company utilise un logiciel de simulation pour trouver la meilleure position d'implantation de la boule à vague compte tenu des formes et dimensions de la piscine.