



Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2019

Filière : TSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Modélisation CCINP TSI 2019

Éléments de correction

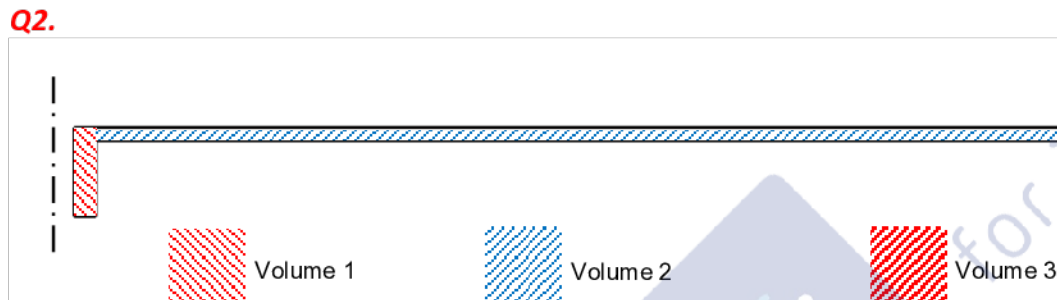
ETUDE D'UNE PLATINE VINYLE

Partie I – Inertie du plateau

I.1 – Simplification de l'étude

Q1.
Le plateau possède une symétrie de révolution donc les produits d'inertie sont nuls. La matrice est diagonale.

I.2 – Décomposition du volume du plateau



La section du plateau est l'union de 3 volumes élémentaires dont l'inertie peut être déterminée.

Q3.
 r varie de r_1 à r_2
 z varie de 0 à H
 θ varie de 0 à 2π

$$I(O, \text{vol1})_z = \rho \cdot \int_z dz \cdot \int_\theta d\theta \cdot \int_r r^3 dr = \rho \cdot \int_0^H dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \rho \cdot [z]_0^H \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r_1}^{r_2} = \rho \cdot H \cdot 2\pi \cdot \frac{r_2^4 - r_1^4}{4}$$

$$I(O, \text{vol1})_z = 2\pi \cdot H \cdot \rho \cdot \frac{r_2^4 - r_1^4}{4}$$

Q4.
 r varie de r_2 à r_3
 z varie de $H - e$ à H
 θ varie de 0 à 2π

$$I(O, \text{vol2})_z = \rho \cdot \int_z dz \cdot \int_\theta d\theta \cdot \int_r r^3 dr = \rho \cdot \int_{H-e}^H dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{r_2}^{r_3} r^3 dr = \rho \cdot [z]_{H-e}^H \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r_2}^{r_3} = \rho \cdot e \cdot 2\pi \cdot \frac{r_3^4 - r_2^4}{4}$$

$$I(O, \text{vol2})_z = 2\pi \cdot e \cdot \rho \cdot \frac{r_3^4 - r_2^4}{4} \quad (\text{Résultat qu'il est possible de trouver par analogie})$$

Q5.
 r varie de r_3 à r_4
 z varie de 0 à H
 θ varie de 0 à 2π

$$I(O, S_a)_z = \rho \cdot \int_z dz \cdot \int_\theta d\theta \cdot \int_r r^3 dr = \rho \cdot \int_0^H dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{r_3}^{r_4} r^3 dr = \rho \cdot [z]_0^H \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r_3}^{r_4} = \rho \cdot H \cdot 2\pi \cdot \frac{r_4^4 - r_3^4}{4}$$

$$I(O, S_a)_z = 2\pi \cdot H \cdot \rho \cdot \frac{r_4^4 - r_3^4}{4} \quad (\text{Résultat qu'il est possible de trouver par analogie})$$

Q6.

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta r} \cdot r + z_0 = -\frac{H}{r_5 - r_4} \cdot r + z_0. \text{ Or pour } r = r_5, z = 0, \text{ donc } 0 = -\frac{H}{r_5 - r_4} \cdot r_5 + z_0 \text{ et } z_0 = +\frac{H}{r_5 - r_4} \cdot r_5$$

$$\text{Donc : } z = \frac{H}{r_5 - r_4} \cdot (r_5 - r) \text{ ou } r = r_5 - z \cdot \frac{r_5 - r_4}{H}$$

Q7.

$$I(O, S_b)_z = \rho \cdot \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{r_4}^{r_5 - z \cdot \frac{r_5 - r_4}{H}} r^3 dr \right) d\theta \right) dz = \rho \cdot \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{r^4}{4} \right]_{r_4}^{r_5 - z \cdot \frac{r_5 - r_4}{H}} \right) d\theta \right) dz = \frac{\rho}{4} \cdot \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\left(r_5 - z \cdot \frac{r_5 - r_4}{H} \right)^4 - r_4^4 \right) d\theta \right) dz$$

$$I(O, S_b)_z = \frac{\rho}{4} \cdot \int_0^H \left(\left(\left(r_5 - z \cdot \frac{r_5 - r_4}{H} \right)^4 - r_4^4 \right) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \right) dz = \frac{\rho}{4} \cdot \int_0^H \left(\left(\left(r_5 - z \cdot \frac{r_5 - r_4}{H} \right)^4 - r_4^4 \right) \cdot 2\pi \right) dz$$

$$I(O, S_b)_z = 2\pi \cdot \frac{\rho}{4} \cdot \int_0^H \left(\left(r_5 - z \cdot \frac{r_5 - r_4}{H} \right)^4 - r_4^4 \right) dz = 2\pi \cdot \frac{\rho}{4} \cdot \left(\int_0^H \left(r_5 - z \cdot \frac{r_5 - r_4}{H} \right)^4 dz - \int_0^H r_4^4 dz \right)$$

$$I(O, S_b)_z = 2\pi \cdot \frac{\rho}{4} \cdot \left(\left[\frac{\left(r_5 - z \cdot \frac{r_5 - r_4}{H} \right)^5}{-5 \cdot \frac{r_5 - r_4}{H}} \right]_0^H - r_4^4 [z]_0^H \right) = 2\pi \cdot \frac{\rho}{4} \cdot \left(\left(\frac{\left(r_5 - H \cdot \frac{r_5 - r_4}{H} \right)^5}{-5 \cdot \frac{r_5 - r_4}{H}} - \frac{r_5^5}{-5 \cdot \frac{r_5 - r_4}{H}} \right) - r_4^4 H \right)$$

$$I(O, S_b)_z = 2\pi \cdot \frac{\rho}{4} \cdot \frac{1}{-5 \cdot \frac{r_5 - r_4}{H}} \left(\left(r_5 - H \cdot \frac{r_5 - r_4}{H} \right)^5 - r_5^5 + r_4^4 H \cdot 5 \cdot \frac{r_5 - r_4}{H} \right) = -2\pi \cdot \frac{\rho}{20} \cdot \frac{H}{r_5 - r_4} (r_4^5 - r_5^5 + 5 \cdot r_4^4 (r_5 - r_4))$$

$$I(O, S_b)_z = \pi \cdot \frac{\rho}{10} \cdot \frac{H}{r_5 - r_4} \cdot (r_5^5 - r_4^5 - 5 \cdot r_4^4 (r_5 - r_4))$$

(Il existe une expression avec $r_5^5 - r_4^5 = (r_5 - r_4) \cdot (r_5^4 + r_4 \cdot r_5^3 + r_4^2 \cdot r_5^2 + r_4^3 \cdot r_5 + r_4^4)$ mais pas forcément plus simple)

Partie II – Accélération de la platine

II.1 – Première solution de pilotage

Q8.

On isole l'ensemble {disque + plateau}.

Il est soumis à :

- L'action de la liaison pivot entre le système isolé et le bâti.
- L'action du couple moteur $C_p(t)$
- L'action du couple de frottements secs $-C_{fs}$
- L'action du couple de frottements fluides $C_{ff}(t) = \mu_{ff} \cdot \omega_p(t)$

On applique le théorème de l'énergie cinétique au système, dans le référentiel lié au bâti, considéré galiléen :

- Energie cinétique : $Ec(t) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_p^2(t)$
- Puissances :
 - L'action de la liaison pivot entre le système isolé et le bâti. Liaison parfaite, puissance nulle.
 - L'action du couple moteur : $P_p(t) = C_p(t) \cdot \omega_p(t)$
 - L'action du couple de frottements secs $P_{fs}(t) = -C_{fs} \cdot \omega_p(t)$
 - L'action du couple de frottements fluides $C_{ff}(t) = -\mu_{ff} \cdot \omega_p^2(t)$

$$\frac{dEc(t)}{dt} = \sum P_{\text{ext}} + \sum P_{\text{int}} \text{ Soit : } J \cdot \frac{d\omega_p(t)}{dt} \cdot \omega_p(t) = C_p(t) \cdot \omega_p(t) - C_{fs} \cdot \omega_p(t) - \mu_{ff} \cdot \omega_p^2(t)$$

$$\text{Or } \omega_p(t) \neq 0 \text{ donc } J \cdot \frac{d\omega_p(t)}{dt} = C_p(t) - C_{fs} - \mu_{ff} \cdot \omega_p(t)$$

Q9.

D'après l'énoncé, $C_p(t) = C_{nom}$.

Lorsque $t = 0$, le plateau est immobile, donc $\omega_p(0) = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle sans second membre $\frac{J}{\mu_{ff}} \cdot \frac{d\omega_p(t)}{dt} + \omega_p(t) = 0$ sont : $\omega_p(t) = \lambda \cdot e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre est : $\omega_p(t) = \frac{C_{nom} - C_{fs}}{\mu_{ff}}$

Donc $\omega_p(t) = \lambda \cdot e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t} + \frac{C_{nom} - C_{fs}}{\mu_{ff}}$. Or $\omega_p(0) = 0$ donc $\lambda = -\frac{C_{nom} - C_{fs}}{\mu_{ff}}$ et finalement :

$$\omega_p(t) = \frac{C_{nom} - C_{fs}}{\mu_{ff}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t}\right)$$

Q10.

$$\frac{d\omega_p(t)}{dt} = \frac{C_{nom} - C_{fs}}{J} \cdot e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t}$$

Si $C_{nom} > C_{fs}$, alors $\forall t$, $\frac{d\omega_p(t)}{dt} > 0$ et ω_p est croissante.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t} \rightarrow 0$ donc $\omega_p(t) \rightarrow \frac{C_{nom} - C_{fs}}{\mu_{ff}}$. $\omega_p(t)$ admet une asymptote horizontale d'équation $\omega = \frac{C_{nom} - C_{fs}}{\mu_{ff}}$

Si $C_{nom} < C_{fs}$, le système ne peut pas démarrer. Nous considérerons que $C_{nom} > C_{fs}$.

Q11.

On cherche C_{nom} telle que $\omega_{fin} = \frac{C_{nom} - C_{fs}}{\mu_{ff}}$ c'est-à-dire $N_{fin} \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{C_{nom} - C_{fs}}{\mu_{ff}}$ donc $C_{nom} = N_{fin} \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot \mu_{ff} + C_{fs}$

A.N. : $C_{nom} = 33 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0.02 + 0.4 = 0.469$ soit $C_{nom} = 0.47 \text{ N.m}$

Q12.

Le temps de réponse à 5% $t_{5\%}$ est défini par : $\forall t \geq t_{5\%}, |\omega_{fin} - \omega(t)| \leq 0.05 \cdot \omega_{fin}$.

$\omega_p(t)$ croissante donc, dans ce cas $t_{5\%}$ se caractérise par $\omega_p(t_{5\%}) = 0.95 \cdot \omega_{fin}$.

C'est à dire : $\frac{C_p(t) - C_{fs}}{\mu_{ff}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t_{5\%}}\right) = 0.95 \cdot \frac{C_p(t) - C_{fs}}{\mu_{ff}}$ soit $1 - e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t_{5\%}} = 0.95$ ou encore : $e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t_{5\%}} = 0.05$

$$-\frac{\mu_{ff}}{J} \cdot t_{5\%} = \ln(0.05) \text{ donc } t_{5\%} = \frac{-\ln(0.05) \cdot J}{\mu_{ff}} \quad \text{A.N. : } t_{5\%} = \frac{-\ln(0.05) \cdot 0.1}{0.02} \text{ soit } t_{5\%} = 15 \text{ s}$$

II.2 – Deuxième solution de pilotage**Q13.**

Par analogie à l'étude précédente, $\omega_p(t) = \frac{C_{dem} - C_{fs}}{\mu_{ff}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t}\right)$.

$$\omega_p(t=2\text{s}) = \frac{0.62 - 0.4}{0.02} \cdot \left(1 - e^{-\frac{0.02}{0.1} \cdot 2}\right) = \frac{22}{2} \cdot (1 - 0.656) = 11 \cdot 0.344 \text{ soit } \omega_p(t=2\text{s}) = 3.784 \text{ rad/s}$$

$$N_p(t=2\text{s}) = \omega_p(t=2\text{s}) \cdot \frac{60}{2\pi} = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{C_{dem} - C_{fs}}{\mu_{ff}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\mu_{ff}}{J}t}\right) \text{ soit } N_p(t=2\text{s}) = 36.1345 \text{ tr/min}$$

Q14.

Le temps de réponse à 5% $t_{5\%}$ est supérieur à 2s. Pour $t \geq 2$, $\omega_p(t) = 3.5 + 0.45 \cdot e^{-\frac{2t}{9.5}}$. Sur cet intervalle, $\omega_p(t)$ est décroissante de limite 3.5 rad/s .

$t_{5\%}$ est donc caractérisé par : $\omega_p(t_{5\%}) = 3.5 \cdot 1.05 = 3.675 \text{ rad/s}$

$$3.5 \cdot 1.05 = 3.5 + 0.45 \cdot e^{-\frac{2t_{5\%}}{9.5}} \text{ soit } e^{-\frac{2t_{5\%}}{9.5}} = \frac{3.5 \cdot 1.05 - 3.5}{0.45} = \frac{3.5 \cdot 0.05}{0.45}. \text{ Alors } -\frac{2 \cdot t_{5\%}}{9.5} = \ln\left(\frac{0.7 \cdot 0.05}{0.09}\right) = \ln\left(\frac{35}{90}\right).$$

$$t_{5\%} = -\frac{9.5}{2} \cdot \ln\left(\frac{35}{90}\right) = -4.75 \cdot (-0.94) \text{ et finalement } \underline{t_{5\%} = 4.465 \text{ s}}.$$

Le résultat correspond au cahier des charges qui préconise que le temps de réponse à 5% $t_{5\%}$ soit inférieur à 8s.

II.3 – Pilotage du moteur de la lecture**Q15.**

Le disque tourne à 33 tr/min pendant 30 minutes. Il effectue donc environ 990 tours.

Q16.

Lorsque $R(\theta_p(t)) = R_{\text{int}}$, $\theta_p(t)$ a parcouru 990 tours soit $1980\pi \text{ rad}$ soit 6620 rad .

Q17.

En 1 tour, la tête de lecture s'est rapprochée de h du centre du disque.

En 990 tours, la tête de lecture s'est rapprochée de 75mm du centre du disque. $h = 75/990$ donc $h \simeq 75 \mu\text{m}$

Q18.

Lorsque $\theta_p(t) = 0$, $R(\theta_p(t)) = R_{\text{ext}}$.

Entre $\theta_p(t)$ et $\theta_p(t) + 2\pi$, $R(\theta_p(t))$ diminue de h donc $R(\theta_p(t)) = R_{\text{ext}} - \frac{h}{2\pi} \cdot \theta_p(t)$

Q19.

Il semble que $\overrightarrow{F_{\text{pointe}}}$ soit définie comme la composante horizontale de l'action entre la pointe et le disque.

La composante verticale est P_{tete} , le coefficient de frottement f_{dv} , donc $\|\overrightarrow{F_{\text{pointe}}}\| = f_{dv} \cdot P_{\text{tete}}$.

Q20.

On reprend l'étude de la question 8 :

On isole l'ensemble {disque + plateau}.

Il est soumis à :

- Les mêmes actions que pour la question 8.
- L'action de la pointe sur le disque $\overrightarrow{F_{\text{pointe}}}$ provoquant en O un couple $\|\overrightarrow{F_{\text{pointe}}}\| \cdot R(\theta_p(t))$

On applique le théorème du moment dynamique (erreur du sujet) au système, dans le référentiel lié au bâti, considéré galiléen en projection sur \vec{k} , au point O :

$$\text{Soit : } J \cdot \frac{d\omega_p(t)}{dt} = C_p(t) - C_{fs} - \mu_{ff} \cdot \omega_p(t) - \|\overrightarrow{F_{\text{pointe}}}\| \cdot \left(R_{\text{ext}} - \frac{h}{2\pi} \cdot \theta_p(t) \right)$$

$$\text{Donc } \underline{J \cdot \frac{d\omega_p(t)}{dt} + \mu_{ff} \cdot \omega_p(t) - \|\overrightarrow{F_{\text{pointe}}}\| \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \theta_p(t) = C_p(t) - C_{fs} - R_{\text{ext}} \cdot \|\overrightarrow{F_{\text{pointe}}}\|}$$

Q21.

L'équation sans second membre est : $J \cdot \frac{d^2\theta_p(t)}{dt^2} + \mu_{ff} \cdot \frac{d\theta_p(t)}{dt} - \|F_{\text{pointe}}\| \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \theta_p(t) = 0$

L'équation caractéristique est : $J \cdot r^2 + \mu_{ff} \cdot r - \|F_{\text{pointe}}\| \cdot \frac{h}{2\pi} = 0$

$$\Delta = \mu_{ff}^2 + 4 \cdot J \cdot \|F_{\text{pointe}}\| \cdot \frac{h}{2\pi} > 0 \text{ Il y a donc deux racines réelles : } r_1 = \frac{-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} \text{ et } r_2 = \frac{-\mu_{ff} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J}$$

Ainsi : $\theta_p(t) = \alpha \cdot e^{\frac{-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} t} + \beta \cdot e^{\frac{-\mu_{ff} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Q22.

Une solution particulière peut être $m = -\frac{C_{\text{nom}} - C_{fs} - R_{\text{ext}} \cdot \|F_{\text{pointe}}\|}{\|F_{\text{pointe}}\| \cdot \frac{h}{2\pi}}$.

Q23.

Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent : $\theta_p(t) = \alpha \cdot e^{\frac{-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} t} + \beta \cdot e^{\frac{-\mu_{ff} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} t} + m$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Or $\theta_p(t=0s) = 0$ donc $\alpha + \beta + m = 0$ et $\omega_p(t=0s) = 0$

avec $\omega_p(t) = \frac{d\theta_p(t)}{dt} = \alpha \cdot \frac{-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} \cdot e^{\frac{-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} t} + \beta \cdot \frac{-\mu_{ff} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} \cdot e^{\frac{-\mu_{ff} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} t}$ donc $\alpha \cdot \frac{-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} + \beta \cdot \frac{-\mu_{ff} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} = 0$

Il faut donc résoudre le système :
$$\begin{cases} \alpha + \beta + m = 0 \\ \alpha \cdot (-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}) + \beta \cdot (-\mu_{ff} - \sqrt{\Delta}) = 0 \end{cases}$$

soit :
$$\begin{cases} \alpha = -\beta - m \\ (-\beta - m) \cdot (-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}) + \beta \cdot (-\mu_{ff} - \sqrt{\Delta}) = 0 \end{cases} \text{ ou encore : } \begin{cases} \alpha = -\beta - m \\ -\beta \cdot \sqrt{\Delta} - \beta \cdot \sqrt{\Delta} = m \cdot (-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}) \end{cases}$$

soit :
$$\begin{cases} \alpha = -\beta - m \\ \beta = -\frac{m \cdot (-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta})}{2 \cdot \sqrt{\Delta}} \end{cases} \text{ Ainsi : } \begin{cases} \alpha = -\frac{m \cdot (\mu_{ff} + \sqrt{\Delta})}{2 \cdot \sqrt{\Delta}} \\ \beta = \frac{m \cdot (\mu_{ff} - \sqrt{\Delta})}{2 \cdot \sqrt{\Delta}} \end{cases}$$

$$\theta_p(t) = m \cdot \left(1 - \frac{(\mu_{ff} + \sqrt{\Delta})}{2 \cdot \sqrt{\Delta}} \cdot e^{\frac{-\mu_{ff} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} t} + \frac{(\mu_{ff} - \sqrt{\Delta})}{2 \cdot \sqrt{\Delta}} \cdot e^{\frac{-\mu_{ff} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot J} t} \right)$$

Q24.

L'action de la force $\overline{F_{\text{pointe}}}$ sur $\theta_p(t)$ diminue linéairement lorsque le temps passe et la tête de lecture se rapproche du centre. Toutes les autres actions mécaniques sont constantes. Ce frottement diminuant linéairement, la vitesse de rotation de la platine augmente linéairement.

Q25.

D'après le cahier des charges, il faut que la variation de vitesse de rotation doit être comprise entre $\pm 2\%$ autour de $33 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$: $33.66 = 33 \cdot (1 + 2\%) > \omega_p(t) > 32.34 = 33 \cdot (1 - 2\%)$ Par lecture du graphe $33.1 > \omega_p(t) > 32.8$

$\omega_p(t)$ respecte le cahier des charges.

Partie III – Commande du moteur

Q26.

D'après la figure 11, le courant i_b est en retard de $\frac{2\pi}{3}$ par rapport à i_a .

D'après la figure 11, le courant i_c est en retard de $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ par rapport à i_a , ce qui revient à une avance de $\frac{2\pi}{3}$ par rapport à i_a .

$$\text{Donc : } \begin{cases} i_a = I_m \cdot \cos(\theta_c(t)) \\ i_b = I_m \cdot \cos\left(\theta_c(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_c = I_m \cdot \cos\left(\theta_c(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \text{ et } \underline{\psi = \frac{2\pi}{3}}$$

Q27.

Il ne faut pas court-circuiter la source de tension. Lorsque $u(\theta_u(t))$ est nulle, deux solutions sont possibles mais il est préférable de laisser le moteur en phase de roue libre.

t	K_1	K_2	K_3	K_4
$0 \leq \theta_u \leq \delta$	O	F(ou O)	O	F(ou O)
$\delta \leq \theta_u \leq \pi - \delta$	F	O	O	F
$\pi - \delta \leq \theta_u \leq \pi + \delta$	F	O	F	O
$\pi + \delta \leq \theta_u \leq 2\pi - \delta$	O	F	F	O
$2\pi - \delta \leq \theta_u \leq 2\pi$	O	F(ou O)	O	F(ou O)

Q28.

$$\underline{u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}}$$

Q29.

En utilisant les impédances complexes : $U(j\omega) = R \cdot I(j\omega) + L \cdot j\omega \cdot I(j\omega)$

$$U(j\omega) = I(j\omega) \cdot (R + L \cdot j\omega) \text{ soit : } H(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{1}{R + L \cdot j\omega} \text{ Finalement : } \underline{H(j\omega) = \frac{1}{R + L \cdot j\omega}}$$

Q30.

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{R + L \cdot j\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2}}$$

$$\underline{G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2}}}$$

$$\Phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{R + L \cdot j\omega}\right) = -\arg(R + L \cdot j\omega) = -\arctan\left(\frac{L \cdot \omega}{R}\right)$$

$$\underline{\Phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{L \cdot \omega}{R}\right)}$$

Q31.

Si $\omega = 0$ alors $G(\omega = 0) = \frac{1}{R}$ et $\varphi = -\arctan(0) = 0 \text{ rad}$

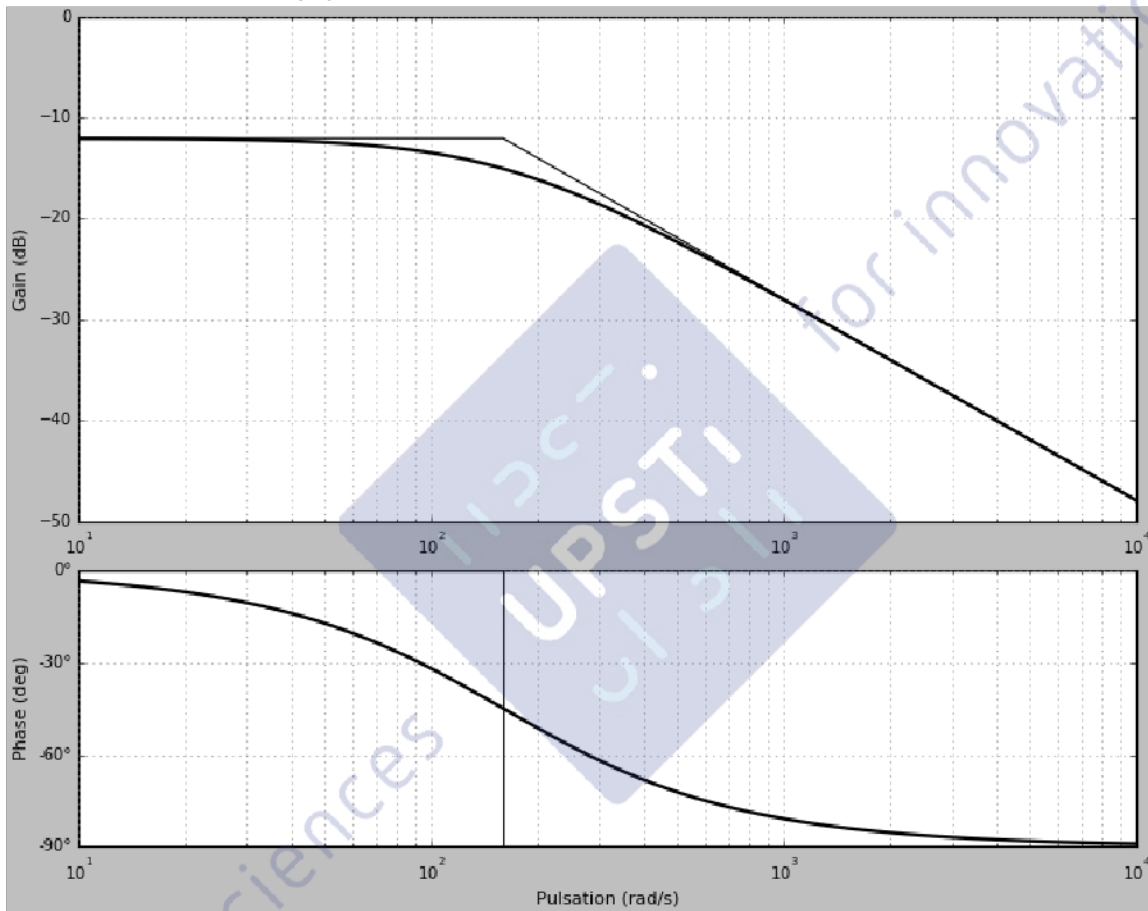
A.N. = $G(\omega = 0) = \frac{1}{4} = 0.25$

Si $\omega \rightarrow +\infty$ alors $G(\omega) \rightarrow 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

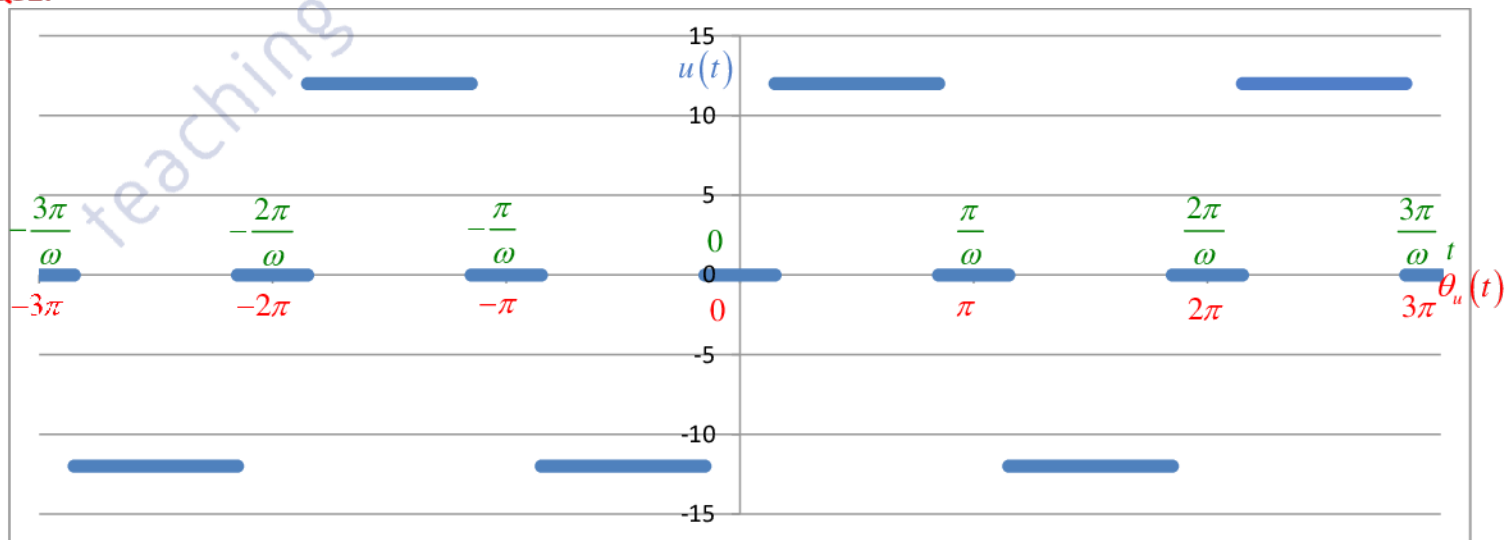
Il s'agit d'un premier ordre de gain $K = \frac{1}{R} = 0.25 \Omega^{-1}$ et de constante de temps $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.025}{4} = 0.00625 \text{ s}$.

Il agit comme un filtre passe bas de gain 0.25 et de pulsation de cassure $\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{4}{0.025} = \frac{4000}{25} = 160 \text{ rad/s}$.

Si $\omega = 0$ alors $G_{dB}(\omega = 0) = 20 \log\left(\frac{1}{4}\right) = -20 \log(4) = -20 \log(2^2) = -40 \log(2) = -40 \cdot 0.3 = -12 \text{ dB}$



Q32.



Ci-dessus la courbe u en fonction de θ_u (en rouge) et de t (en vert). ($\theta_u(t) = \omega \cdot t$)

La fonction u est impaire.

Q33.

$$\int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u = E \cdot \left[-\frac{\cos(n \cdot \theta_u)}{n} \right]_{\delta}^{\pi-\delta} = \frac{E}{n} \cdot (-\cos(n \cdot (\pi - \delta)) + \cos(n \cdot \delta))$$

Si n est pair, $n = 2k$ et :

$$\int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u = \frac{E}{n} \cdot (-\cos(2k(\pi - \delta)) + \cos(2k\delta)) = \frac{E}{n} \cdot (-\cos(2k\pi - 2k\delta) + \cos(2k\delta))$$

$$\int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u = \frac{E}{n} \cdot (-\cos(2k\delta) + \cos(2k\delta))$$

$$\text{Si } n \text{ est pair : } \int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u = 0$$

Si n est impair, $n = 2k + 1$ et :

$$\int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u = \frac{E}{n} \cdot (-\cos((2k+1) \cdot (\pi - \delta)) + \cos((2k+1) \cdot \delta))$$

$$\int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u = \frac{E}{n} \cdot (-\cos(2k\pi + \pi - (2k+1) \cdot \delta) + \cos((2k+1) \cdot \delta))$$

$$\int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u = \frac{E}{n} \cdot (-\cos(\pi - (2k+1) \cdot \delta) + \cos((2k+1) \cdot \delta)) = \frac{E}{n} \cdot (\cos(n \cdot \delta) + \cos(n \cdot \delta))$$

$$\text{Si } n \text{ est impair : } \int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u = \frac{2 \cdot E}{n} \cdot \cos(n \cdot \delta)$$

Q34.

La série de Fourier est définie par la forme générale suivante : $u(\theta_u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot \theta_u) + b_n \cdot \sin(n \cdot \theta_u))$ avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(\theta_u) \cdot \cos(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(\theta_u) \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u$$

Puisque $u(\theta_u)$ est impaire, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} u(\theta_u) \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u$. Il suffit de calculer les coefficients b_n .

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} u(\theta_u) \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\delta} u(\theta_u) \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u + \int_{\delta}^{\pi-\delta} u(\theta_u) \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u + \int_{\pi-\delta}^{\pi} u(\theta_u) \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\delta} 0 \cdot d\theta_u + \int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u + \int_{\pi-\delta}^{\pi} 0 \cdot d\theta_u \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi-\delta} E \cdot \sin(n \cdot \theta_u) \cdot d\theta_u \text{ si } n \text{ est impair}$$

$$b_n = \frac{4 \cdot E}{n \cdot \pi} \cdot \cos(n \cdot \delta) \text{ si } n \text{ est impair et } b_n = 0 \text{ si } n \text{ est pair } n = 2k + 1$$

Q35.

Pour la première harmonique, le fondamental, la pulsation est ω . En effet, d'après la courbe de la question 32, la période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\omega(t) = p \cdot r \cdot \omega_p(t) = p \cdot r \cdot N_p(t) \cdot \frac{2\pi}{60} \text{ et } G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2}}$$

$$\text{A.N. : } \omega(t) = 8 \cdot 6 \cdot 33 \cdot \frac{2\pi}{60} = 8 \cdot 33 \cdot \frac{\pi}{5} = 264 \cdot \frac{\pi}{5} \approx 264 \cdot \frac{3}{5} \text{ soit } \omega = 158.4 \text{ rad/s}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (0.025 \cdot 158.4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{16 + \left(\frac{158.4}{40}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3.96^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 4^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{4} \cdot 0.7 \text{ soit } G(\omega) \approx 0.175$$

Q36.

Pour l'harmonique de rang k , la pulsation est $k \cdot \omega$.

$$G(k \cdot \omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L \cdot k \cdot \omega)^2}} \text{ et } G((k+1) \cdot \omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L \cdot (k+1) \cdot \omega)^2}}.$$

$k < k+1$ donc $L \cdot k \cdot \omega < L \cdot (k+1) \cdot \omega$ car L et ω sont positifs. Les deux termes sont positifs, donc :

$$(L \cdot k \cdot \omega)^2 < (L \cdot (k+1) \cdot \omega)^2 \text{ et } R^2 + (L \cdot k \cdot \omega)^2 < R^2 + (L \cdot (k+1) \cdot \omega)^2 \text{ donc } \sqrt{R^2 + (L \cdot k \cdot \omega)^2} < \sqrt{R^2 + (L \cdot (k+1) \cdot \omega)^2}$$

$$\text{Enfin : } \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L \cdot (k+1) \cdot \omega)^2}} < \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L \cdot k \cdot \omega)^2}} \text{ donc } \underline{G((k+1) \cdot \omega) < G(k \cdot \omega)}$$

L'amplitude de l'harmonique de rang $k+1$ est inférieure à l'amplitude de l'harmonique de rang k donc l'influence de l'harmonique de rang $k+1$ sur le signal final est inférieure à celle de l'harmonique de rang k .

Q37.

L'harmonique 1 est non nulle, c'est le fondamental. L'harmonique 2 est nulle, car 2 est pair.

$$\text{L'harmonique 3 est non nulle. Son gain vaut } G(3\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (3 \cdot L \cdot \omega)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2 \cdot 4^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1}} \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot G(3\omega) \approx \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

Q38.

Avec $\delta = \frac{\pi}{6}$ et n impaire et multiple de 3, soit $n = 3 \cdot (2k+1)$, il vient :

$$b_{3(2k+1)} = \frac{4 \cdot E}{3 \cdot (2k+1) \cdot \pi} \cdot \cos\left(3 \cdot (2k+1) \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4 \cdot E}{3 \cdot (2k+1) \cdot \pi} \cdot \cos\left((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \underline{\underline{b_{3(2k+1)} = 0}}$$

Q39.

L'harmonique 1 est non nulle, c'est le fondamental.

L'harmonique 2 est nulle, car 2 est pair.

L'harmonique 3 est nulle (cf question précédente)

L'harmonique 4 est nulle, car 4 est pair.

$$\text{L'harmonique 5 est non nulle, son gain vaut } G(5\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (5 \cdot L \cdot \omega)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{4^2 + 5^2 \cdot 4^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{5^2 + 1}} \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot G(5\omega) \approx \underline{\underline{\frac{1}{20}}}$$

L'onduleur permet de piloter le moteur avec un courant proche d'un courant sinusoïdal. Les harmoniques de rang 2, 3 et 4 sont nulles.

La première harmonique non nul, de rang 5, dont l'amplitude est déjà faible ($b_n = \frac{4 \cdot E}{5 \cdot \pi} \cdot \cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$) est en plus atténuée par le caractère « passe bas » du moteur.

Q40.

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4 \cdot E}{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi} \cos((2 \cdot n + 1) \cdot \delta) \cdot \sin((2 \cdot n + 1) \cdot \omega \cdot t).$$

$$\text{Avec la seule première harmonique : } u(t) = \frac{4 \cdot E}{\pi} \cos(\delta) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\text{Pour } \omega, G(\omega) \approx 0.175 \text{ et } \varphi = -\arctan\left(\frac{3.96}{4}\right) \approx -\arctan(1) \approx -\frac{\pi}{4}. \text{ Ainsi, } \underline{\underline{i(t) = 0.175 \cdot \frac{4 \cdot E}{\pi} \cos(\delta) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)}}.$$

Q41.

On désire obtenir une vitesse de rotation constante, soit une commande du moteur sinusoïdale. La présence d'harmoniques de rangs supérieurs à 1 fait moduler la vitesse du plateau autour de cette vitesse constante. Plus le rang de la première harmonique non nulle (en dehors du fondamental) est grand, plus l'influence de ce terme sera faible (faible coefficient b_n et filtrage par le caractère passe bas du moteur). Choisir cette valeur de δ permet donc d'annuler l'harmonique de rang 3, plus influente que celle de rang 5.

La modulation de vitesse peut également être atténuée par la caractéristique mécanique du système, et notamment son inertie, qui va s'opposer à toute modification de vitesse angulaire. On a ici aussi un filtre passe bas, à constante de temps grande (bien plus que la constante de temps électrique) donc à pulsation de cassure plus basse, qui va atténuer grandement l'effet des harmoniques du signal de commande du moteur.