

Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2019

Filière : PT

Épreuve : Sciences Industrielles A

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Table AZALÉE

Banque PT SI A 2019

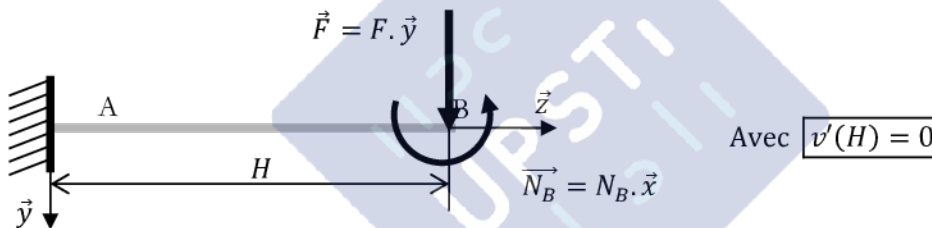
Corrigé

Partie I

Étude de l'exigence « Fournir à la table les mouvements caractéristiques d'un séisme »

Q.1. Calculer $v(H)$ la flèche au point B induite par l'effort \vec{F} (telle que le déplacement en B soit $\vec{u}(B) = v(H)\vec{y}$). On en déduira la raideur en flexion k de cette poutre définie par la relation $F = kv(H)$.

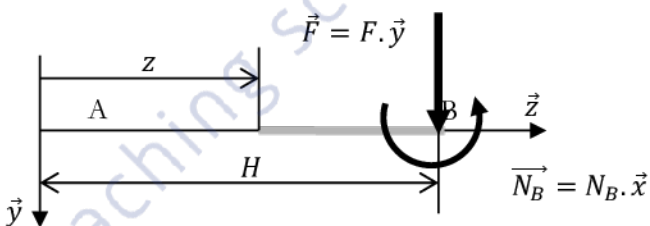
Le problème est hyperstatique, pour le résoudre on utilise le modèle équivalent suivant :



Où N_B est un moment inconnu exercé par le toit en B.

Calcul du moment fléchissant :

La poutre est constituée d'un seul tronçon, on isole la partie de droite pour ne pas avoir à calculer les actions mécaniques en A.



$\forall z \in [0; H],$

on applique le TMS en G/ \vec{x} :

$$-M_{fx}(z) + N_B - F \cdot (H - z) = 0$$

Soit :

$$M_{fx}(z) = F \cdot z + N_B - F \cdot H$$

Calcul de la flèche :

La relation entre le moment fléchissant et la déformée est :

$$\forall z \in [0; H], E \cdot I \cdot v''(z) = -M_{fx}(z)$$

On a donc :

$$\forall z \in [0; H], v''(z) = \frac{-1}{E \cdot I} (F \cdot z + N_B - F \cdot H)$$

$$\forall z \in [0; H], v'(z) = \frac{-1}{E.I} \left(F \cdot \frac{z^2}{2} + (N_B - F.H) \cdot z + c_1 \right)$$

$$\forall z \in [0; H], v(z) = \frac{-1}{E.I} \left(F \cdot \frac{z^3}{6} + (N_B - F.H) \cdot \frac{z^2}{2} + c_1 \cdot z + c_2 \right)$$

Détermination des constantes F, a_1 et a_2 avec les conditions aux limites :

encastrement en A et pente nulle en B donc

$$\begin{cases} v'(0) = 0 & \Rightarrow c_1 = 0 \text{ N.m}^2 \\ v(0) = 0 & \Rightarrow c_2 = 0 \text{ N.m}^3 \\ v'(H) = 0 & \Rightarrow N_B = \frac{F.H}{2} \end{cases}$$

L'équation de la déformée de la poutre est :

$$\forall z \in [0; H], v(z) = \frac{-1}{E.I} \left(F \cdot \frac{z^3}{6} - \frac{F.H}{2} \cdot \frac{z^2}{2} \right) = \frac{-F}{12.E.I} (2.z^3 - 3.H.z^2)$$

On a alors :

$$v(H) = \frac{-F}{12.E.I} (2.H^3 - 3.H.H^2) = \frac{F.H^3}{12.E.I}$$

La raideur k est défini par : $F = k \cdot v(H)$

$$k = \frac{12.E.I}{H^3}$$

Q.2. Donner l'équation du mouvement qui régit la dynamique de la table dans son mouvement par rapport au sol lorsqu'elle n'est soumise à aucune sollicitation extérieure.

On isole la table.

BAME :

- Action des 4 barres sur la table
- Action de pesanteur sur la table

On applique le Théorème de la Résultante Dynamique en projection sur \vec{y} :

$$\vec{F}_{4\text{barres} \rightarrow \text{table}} \cdot \vec{y} + \vec{F}_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{table}} \cdot \vec{y} = m \vec{a}_{\text{table/sol}} \cdot \vec{y}$$

$$-4.F + 0 = m \cdot \ddot{y}$$

$$\boxed{-4.k.y = m \cdot \ddot{y}}$$

Q.3. Donner l'équation du mouvement qui régit maintenant la dynamique de la table dans son mouvement par rapport au sol. On exprimera cette relation sous la forme :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = f(t)$$

et on précisera les expressions de ω et $f(t)$ en fonction des données du problème.

On isole la table.

BAME :

- Action des 4 barres sur la table
- Action de pesanteur sur la table

On applique le Théorème de la Résultante Dynamique en projection sur \vec{y} :

$$\vec{F}_{4barres \rightarrow table} \cdot \vec{y} + \vec{F}_{pesanteur \rightarrow table} \cdot \vec{y} = m \vec{a}_{table/sol} \cdot \vec{y}$$

$$-4.F + 0 = m.(\ddot{Y}_s + \ddot{y})$$

$$-4.k.y + 0 = m.\ddot{y} + m.\ddot{Y}_s$$

$$m.\ddot{y} + 4.k.y = -m.\ddot{Y}_s$$

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{4.k}{m}.y = -\ddot{Y}_s}$$

Avec $Y_s = A_s \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$ on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + \omega^2 \cdot y(t) = f(t) \text{ avec } \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{4.k}{m}} \\ f(t) = A_s \cdot \omega_s^2 \cdot \sin(\omega_s \cdot t) \end{cases}$$

Q.4. Expliquer, à partir de ce modèle simple (on n'a notamment pas pris en compte l'amortissement), comment on peut être amené à modifier la conception d'un bâtiment lorsque l'on dispose d'enregistrement de signaux sismiques probables dans la région.

Une analyse harmonique peut être faite sur l'enregistrement afin de trouver la fréquence propre du signal ω_s .

Pour limiter les déplacements de structure avec les risques d'effondrement liés il faut éviter d'avoir la pulsation propre du bâtiment ω proche de la pulsation de l'onde sismique ω_s .

$$\omega \gg \omega_s \Leftrightarrow \frac{4.k}{m} \gg \omega_s^2 \Leftrightarrow \frac{48.I.E}{m.H^3} \gg \omega_s^2$$

On peut aussi modifier les paramètres de la poutre (hauteur H, module de Young E et moment quadratique I) pour s'éloigner de ω_s et ainsi diminuer l'amplitude de $y(t)$.

Q.5. Compléter le tableau en précisant pour chaque liaison sa désignation, les éléments géométriques caractéristiques (axe, centre, ...), la forme minimale du torseur cinématique $\mathcal{V}_{j/i}$ et la forme minimale du torseur d'actions mécaniques transmissibles $\mathcal{T}_{i \rightarrow j}$.

| Liaison | Désignation | Élém. géom. | Torseur cinématique | Torseur statique |
|------------|------------------|----------------------|--|--|
| L_{03k} | Rotule | centre B_k | $\mathcal{V}_{3k/0} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,3k0} & 0 \\ \omega_{y,3k0} & 0 \\ \omega_{z,3k0} & 0 \end{Bmatrix}_{(B_k, \mathcal{R})}$ | $\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3k} = \begin{Bmatrix} X_{03k} & 0 \\ Y_{03k} & 0 \\ Z_{03k} & 0 \end{Bmatrix}_{(B_k, \mathcal{R})}$ |
| L_{12k} | Rotule | centre A_k | $\mathcal{V}_{2k/0} = \begin{Bmatrix} \omega_{x,2k1} & 0 \\ \omega_{y,2k1} & 0 \\ \omega_{z,2k1} & 0 \end{Bmatrix}_{(A_k, \mathcal{R})}$ | $\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2k} = \begin{Bmatrix} X_{12k} & 0 \\ Y_{12k} & 0 \\ Z_{12k} & 0 \end{Bmatrix}_{(A_k, \mathcal{R})}$ |
| L_{2k3k} | Pivot - glissant | axe (B_k, \vec{z}) | $\mathcal{V}_{3k/2k} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z,3k2k} & V_{z,3k2k} \end{Bmatrix}_{(B_k, \mathcal{R})}$ | $\mathcal{T}_{2k \rightarrow 3k} = \begin{Bmatrix} X_{2k3k} & L_{2k3k} \\ Y_{2k3k} & M_{2k3k} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(B_k, \mathcal{R})}$ |

Q.6. Déterminer le nombre de mobilités m_c du mécanisme, considéré tridimensionnel, modélisé par le schéma cinématique de la Figure 8. Déterminer le degré d'hyperstatisme h du modèle.

Pour cette question on pouvait raisonner avec la méthode statique ou cinématique :

Méthode Statique

Soit N_P le nombre de pièces (bâti compris) :

$$N_P = 1 + 8 \times 2 + 1 = 18$$

Soit E_S le nombre d'équations statiques :

$$E_S = 6 \cdot (N_P - 1) = 102$$

Soit I_S le nombre d'inconnues statiques :

$$I_S = 8 \times 4 + 16 \times 3 = 80$$

Méthode Cinématique

Soit N_P le nombre de pièces (bâti compris) :

$$N_P = 1 + 8 \times 2 + 1 = 18$$

Soit N_L le nombre de liaisons :

$$N_L = 8 + 8 \times 2 = 24$$

Soit E_C le nombre d'équations cinématiques :

$$E_C = 6 \cdot (N_L - N_P + 1) = 42$$

Soit I_C le nombre d'inconnues cinématiques :

$$I_C = 8 \times 2 + 16 \times 3 = 64$$

Soit m_C la mobilité du mécanisme : $m_C = 6 + 16 = 22$:

- 6 mobilités utiles correspondant aux 6 degrés de libertés de la table par rapport au sol
- 16 mobilités internes correspondant aux rotations propres des 8 corps de vérins et aux 8 tiges de vérins.

$$h = I_S - E_S + m_C$$

$$h = E_C - I_C + m_C$$

Donc :

$$m_C = 22 \text{ et } h = 0$$

Q.7. On s'intéresse à un des 4 vérins verticaux. Calculer F_{max} , la valeur maximale de l'effort axial dans ce vérin dans le cas le plus sollicitant pour celui-ci.

On isole la table

BAME :fc

- Action des 4 vérins verticaux sur la table
- Action des 4 vérins horizontaux sur la table
- Action de pesanteur sur la table

On applique le Théorème de la Résultante Dynamique en projection sur \vec{z} :

$$\vec{F}_{4\text{vérins_verticaux} \rightarrow \text{table}} \cdot \vec{z} + \vec{F}_{4\text{vérins_horizontaux} \rightarrow \text{table}} \cdot \vec{z} + \vec{F}_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{table}} \cdot \vec{z} = \vec{a}_{\text{table/sol}} \cdot \vec{z}$$

$$4 \cdot F + 0 - m \cdot g = m \cdot \ddot{z}$$

$$F = \frac{m}{4} \cdot (\ddot{z} + g)$$

La valeur maximale est obtenue pour m maximale et \ddot{z} maximale :

$$F_{max} = \frac{m_{max}}{4} \cdot (\ddot{z}_{max} + g)$$

D'après le CdCF : $m_{max} = m_t + m_{smax} = 125 \text{ tonnes}$ et $\ddot{z}_{max} = 3g$

Application numérique :

$$F_{max} = \frac{125 \cdot 10^3}{4} \cdot (3 \times 9.81 + 9.81) \approx 125 \cdot 10^3 \times 9.81 \approx 1250 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$F_{max} \approx 1250 \cdot \text{kN}$$

Q.8. Donner l'expression de U_n , le déplacement relatif normal en un point M de la surface de contact, ainsi que l'expression de la pression de contact p en précisant sur quels intervalles des angles θ et φ celle-ci est non nulle.

On a un déplacement relatif vertical entre 1 et 2 (suivant \vec{z}), et chaque « ressort » peut se comprimer selon la normale à la surface au point M considéré, soit suivant \vec{e}_r comme la surface de contact est sphérique. On a donc :

$$U_n = \vec{U}_{(M,2/1)} \cdot \vec{e}_r = U \cdot \vec{z} \cdot \vec{e}_r = U \cdot \cos\theta$$

$$\begin{cases} \forall \phi \in [0, 2\pi] \\ \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}, \quad p(\theta, \phi) = K \cdot U \cdot \cos\theta$$

Q.9. En projetant sur \vec{z} le théorème de la résultante statique appliqué à la tige du vérin 2 sous l'action de cette répartition de pression p et de l'effort vertical F_{max} , déterminer l'expression de F_{max} en fonction de R , K et U .

On applique le Théorème de la Résultante Statique à la tige du vérin 2 :

$$\vec{F} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_S -p \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot dS = \int_S -p \cdot \vec{e}_r \cdot dS$$

En projection sur \vec{z} :

$$\begin{aligned} F_{max} - \int_S p \cdot \cos\theta \cdot dS &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} K \cdot U \cdot \cos^2\theta \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \right) d\phi &= F_{max} \\ \Leftrightarrow K \cdot U \cdot R^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta &= F_{max} \\ \Leftrightarrow K \cdot U \cdot R^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} &= F_{max} \end{aligned}$$

$$F_{max} = \frac{2\pi}{3} \cdot K \cdot U \cdot R^2$$

Q.10. Dédurre de l'équation précédente l'expression du produit KU et la reporter dans l'expression de la pression p . On introduit p_{max} la valeur maximale de la pression au niveau du contact. Donner l'expression de p_{max} et sa valeur numérique en MPa (le rayon de la tête sphérique de la tige du vérin est $R = 0,25m$). Finalement déterminer l'expression de p en fonction de p_{max} et de θ .

D'après la relation précédente :

$$K \cdot U = \frac{3}{2\pi \cdot R^2} F_{max}$$

$$\begin{cases} \forall \phi \in [0, 2\pi] \\ \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}, \quad p(\theta, \phi) = \frac{3}{2\pi \cdot R^2} \cdot F_{max} \cdot \cos\theta$$

$$p_{max} = p(0, \phi) = \frac{3}{2\pi \cdot R^2} \cdot F_{max}$$

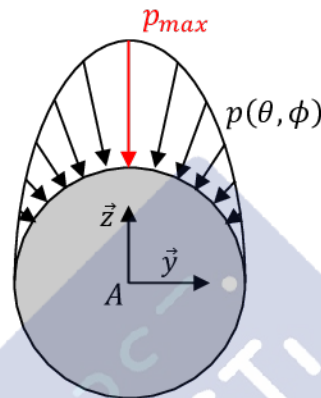
Application numérique :

$$p_{max} = \frac{3 \times 1250 \times 10^3}{2\pi \times 0,25^2} \approx \frac{1250 \times 10^3}{2 \times 0,0625} \approx \frac{1250 \times 10^3}{0,1250} \approx 10^7 Pa$$

$$p_{max} \approx 10. MPa$$

$$\begin{cases} \forall \phi \in [0, 2\pi] \\ \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}, \quad p(\theta, \phi) = p_{max} \cdot \cos\theta$$

Q.11. Représenter sur un croquis l'allure de répartition de pression au niveau du contact 1-2 suivant une coupe dans le plan (A, \vec{y}, \vec{z}) . On fera apparaître sur le croquis la pression maximale p_{max} .



Q.12. Donner l'expression du vecteur \vec{t} , unitaire, tangent à la surface de contact entre 1 et 2 et défini en un point M de cette surface ($\overrightarrow{AM} = R\vec{e}_r$) par :

$$\vec{t} = \frac{\overrightarrow{V}(M, 2/1)}{\|\overrightarrow{V}(M, 2/1)\|}$$

On exprimera le résultat en fonction de \vec{x} et \vec{e}_r .

Relation de Varignon :

$$\vec{V}_{M,2/1} = \vec{V}_{A,2/1} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0} + \omega \cdot \vec{x} \wedge R \cdot \vec{e}_r = R \cdot \omega \cdot (\vec{x} \wedge \vec{e}_r)$$

Donc :

$$\vec{t} = \frac{\vec{V}_{M,2/1}}{\|\vec{V}_{M,2/1}\|} = \frac{R \cdot \omega \cdot (\vec{x} \wedge \vec{e}_r)}{R \cdot \omega \cdot \|\vec{x} \wedge \vec{e}_r\|}$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{x} \wedge \vec{e}_r}{\|\vec{x} \wedge \vec{e}_r\|}$$

Q.13. Donner l'expression de $d\vec{T}$, la force tangentielle de frottement par unité de surface, exercée par la table 1 sur le vérin 2 en un point M de la surface de contact ($\overrightarrow{AM} = R\vec{e}_r$), en fonction de la pression de contact p , du coefficient de frottement μ et du vecteur \vec{t} .

Par définition : $d\vec{T}_{1 \rightarrow 2} = f_t(M) \cdot \vec{t}_{1 \rightarrow 2} = \mu |f_n(M)| \cdot (-\vec{t})$ (homogène ici à une pression)

On obtient alors :

$$d\vec{T} = -p \cdot \mu \cdot \vec{t}$$

Q.14. Déterminer $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ la résultante des actions mécaniques exercées par la table 1 sur le vérin 2, en fonction de p_{max} , μ et R . Exprimer les composantes $Z_{12} = |\vec{z} \cdot \vec{R}_{1 \rightarrow 2}|$ et $Y_{12} = |\vec{y} \cdot \vec{R}_{1 \rightarrow 2}|$ de celle-ci.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} &= \int_S d\vec{R}_{1 \rightarrow 2} dS = \int_S (d\vec{N} + d\vec{T}) dS = \int_S -p \cdot \vec{e}_r \cdot dS + \int_S -p \cdot \mu \cdot \vec{t} \cdot dS \\ &= -p_{max} \cdot \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \vec{e}_r \cdot dS - p_{max} \cdot \mu \cdot \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \frac{\vec{x} \wedge \vec{e}_r}{\|\vec{x} \wedge \vec{e}_r\|} \cdot dS \\ \boxed{\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = -p_{max} \cdot \frac{2\pi}{3} R^2 \cdot \vec{z} + p_{max} \cdot \mu \cdot \pi R^2 \cdot \vec{y}} \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\boxed{Y_{12} = p_{max} \cdot \mu \cdot \pi R^2} \text{ et } \boxed{Z_{12} = p_{max} \cdot \frac{2\pi}{3} R^2}$$

Q.15. Déterminer $\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}$ le moment en A des actions mécaniques exercées par la table 1 sur le vérin 2, en fonction de p_{max} , μ et R . Exprimer la norme $M_{12} = |\vec{x} \cdot \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}|$ de celui-ci.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{(A,1 \rightarrow 2)} &= \int_S d\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} \cdot dS = \int_S (\vec{AM} \wedge d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}) dS = \int_S (R \cdot \vec{e}_r \wedge (-p \cdot \vec{e}_r - p \cdot \mu \cdot \vec{t})) \cdot dS \\ &= - \int_S R \cdot \vec{e}_r \wedge (p_{max} \cdot \cos\theta \cdot \mu \cdot \vec{t} \cdot dS) = -p_{max} \cdot \mu \cdot R \int_S \cos\theta \vec{e}_r \wedge \frac{\vec{x} \wedge \vec{e}_r}{\|\vec{x} \wedge \vec{e}_r\|} dS \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} &= -2\pi \cdot \mu \cdot R^3 \cdot p_{max} \cdot \vec{x} \\ \boxed{M_{12} = 2\pi \cdot \mu \cdot R^3 \cdot p_{max}} \end{aligned}$$

Q.16. Expliciter les ratios suivants en fonction de μ , R et y_{max} :

$$\alpha = \frac{Y_{12}}{Z_{12}} \text{ et } \beta = \frac{M_{12}}{y_{max} Z_{12}}$$

On rappelle que $R = 0.25$ m et que $y_{max} = 125$ mm. Déterminer la valeur du coefficient de frottement qui assurerait de pouvoir modéliser la liaison par une rotule parfaite. Commentez cette valeur.

$$\alpha = \frac{Y_{12}}{Z_{12}} = \frac{p_{max} \cdot \mu \cdot \pi R^2}{p_{max} \cdot \frac{2\pi}{3} R^2} = \boxed{\frac{3}{2} \mu} \quad \beta = \frac{M_{12}}{y_{max} \cdot Z_{12}} = \frac{2\pi \cdot \mu \cdot R^3 \cdot p_{max}}{y_{max} \cdot p_{max} \cdot \frac{2\pi}{3} R^2} = \boxed{\frac{3 \cdot R}{y_{max}} \mu}$$

Le modèle rotule parfaite est justifié si : $\begin{cases} \alpha < 0.1 \\ \beta < 0.1 \end{cases}$

$$\alpha < 0.1 \Rightarrow \frac{3}{2} \mu < 0.1 \Rightarrow \mu < \frac{2}{30}$$

$$\beta < 0.1 \Rightarrow \frac{3 \cdot R}{y_{max}} \mu < 0.1 \Rightarrow \mu < \frac{y_{max}}{30 \cdot R} \Rightarrow \mu < \frac{0,5}{30}$$

On doit alors avoir $\boxed{\mu < 0,016}$

Facteur de frottement acier / bronze lubrifié : 0,08

Le modèle « rotule parfaite » ne semble pas pertinent.

Partie II

Modélisation du comportement temporel des éléments de la chaîne de transmission de puissance

Q.17. Proposer un modèle pour le comportement souhaité de l'ensemble du système (comprenant l'ensemble de la partie hydraulique, des pièces mécaniques et des contrôleurs électroniques). Préciser si c'est un filtre « passe bas », « passe haut » ou « passe bande » et donner les caractéristiques de ce filtre.

Le système doit laisser passer les fréquences entre 1 et 50 Hz, il faut donc que l'ensemble se comporte comme un filtre « passe bas » avec une fréquence de coupure située à 50 Hz au minimum, soit $\omega_c \geq 2\pi f = 314 \text{ Hz}$.

On peut alors proposer le comportement suivant pour l'ensemble :

$$H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \cdot p}$$

Avec $\tau_{BF} = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{314} \text{ s}^{-1}$

Q.18. A partir des caractéristiques du filtre proposé, donner, en la justifiant, la valeur de la pulsation à 0dB de la FTBO (telle que $M(p) = FTBO(p)\varepsilon(p)$) de l'asservissement proposé.

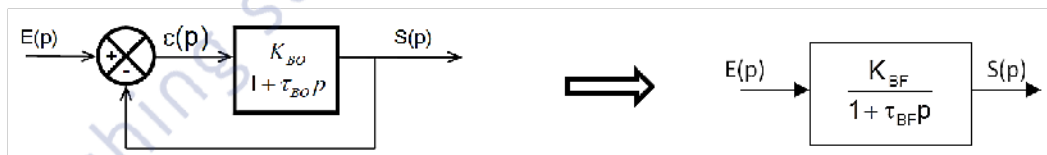
Un résultat de cours peut être utilisé : on sait que la pulsation de cassure de la FTBF est souvent proche de la pulsation à 0dB de la FTBO. Ainsi on propose :

$$\omega_{0dB} \approx 314 \text{ rad.s}^{-1}$$

Remarque : question experte, qui n'a pas dû être réussie par beaucoup.

Éléments de démonstration :

Considérons un premier ordre et une boucle de rétroaction unitaire (difficile d'y penser à ce stade du sujet):



$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO} \cdot p}$$

$$FTBF(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \cdot p} = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}} \cdot p}$$

Bande passante à -3dB de la FTBF :

Elle se situera à $\frac{1}{\tau_{BF}} = \frac{K_{BO} + 1}{\tau_{BO}}$ car on est en présence d'un 1er ordre classique. Si $K_{BO} \gg 1$ on obtient donc $\omega_{-3dB}^{BF} = K_{BO} / \tau_{BO}$

Pulsation de coupure à 0dB (ou celle correspondant à un module de 1) :

$$|FTBO(j\omega)| = 1 \Rightarrow \left| \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO} \cdot j\omega_{0dB}^{BO}} \right| = 1 \Rightarrow \omega_{0dB}^{BO} = \frac{\sqrt{K_{BO}^2 - 1}}{\tau_{BO}} \underset{\text{Si } K_{BO} \gg 1}{\approx} \frac{K_{BO}}{\tau_{BO}}$$

Si le gain K_{BO} est important on peut obtenir une bonne approximation de la bande passante à -3dB en Boucle Fermée en relevant la pulsation de coupure à 0dB en Boucle Ouverte. Cette approximation peut aussi être utilisée pour les seconds ordres même si elle est beaucoup moins bonne dans ce cas.

Q.19. En considérant les débits maximums des vérins verticaux et des servo-valves précisés en Annexe B, déterminer le nombre de servo-valves n nécessaires pour alimenter chaque vérin puis préciser l'expression de la fonction de transfert $H_{sv1}(p)$ en fonction de K_{sv} .

Le débit maximal d'un vérin est de 2000l/min, le débit maximal d'une servo-valve est de 700l/min : ii
faudra 3 servo-valves pour alimenter chaque vérin.

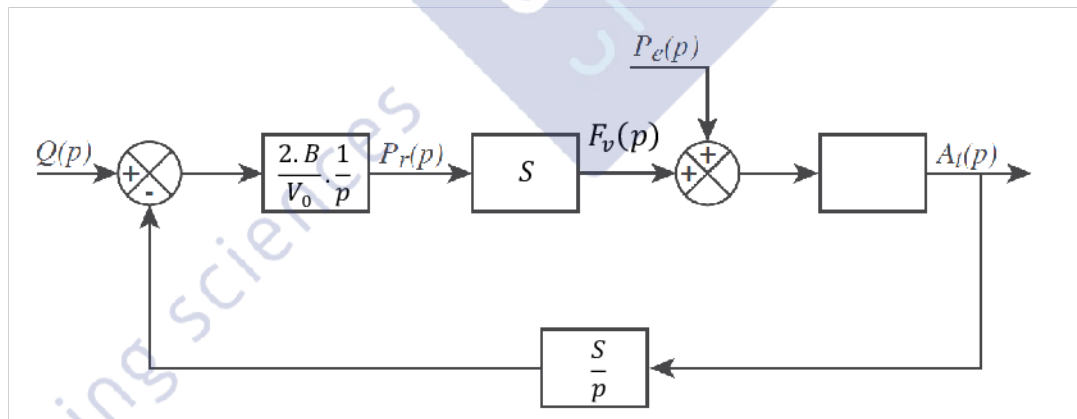
$$\boxed{H_{sv1}(p) = 3 \cdot K_{sv}}$$

Q.20. Appliquer la transformation de Laplace aux équations précédentes et compléter les parties grisées du schéma-bloc.

(1): $Q(p) = S \cdot p \cdot \lambda(p) + \frac{V_0}{2 \cdot B} \cdot p \cdot P_r(p)$

(2): $F_v(p) = S \cdot P_r(p)$

$$P_r(p) = \frac{2 \cdot B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot [Q(p) - S \cdot p \cdot \lambda(p)] = \frac{2 \cdot B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left[Q(p) - \frac{S}{p} \cdot A_t(p) \right]$$



Q.21. Déterminer l'expression de l'équation de mouvement de la table et la mettre sous la forme $M\ddot{a}_t(t) = F_v(t) + P_e(t)$. Compléter la partie grisée du schéma-bloc du Cahier Réponses caractérisant le comportement d'un vérin hydraulique en mentionnant les expressions de la masse M et de la perturbation $P_e(p)$ en fonction des masses de la table M_t et du spécimen M_s .

On isole la table

BAME :

- Action du vérin vertical sur la table
- Action de pesanteur sur la table

On applique le Théorème de la Résultante Dynamique en projection sur \vec{z} :

$$\vec{F}_{(\text{vérin} \rightarrow \text{table})} \cdot \vec{z} + \vec{F}_{(\text{pesanteur} \rightarrow \text{table})} \cdot \vec{z} = \vec{R}_{d(\text{table}/\text{sol})} \cdot \vec{z}$$

$$F_v(t) - (m_t + m_s) \cdot g = (m_t + m_s) \cdot \ddot{z}(t)$$

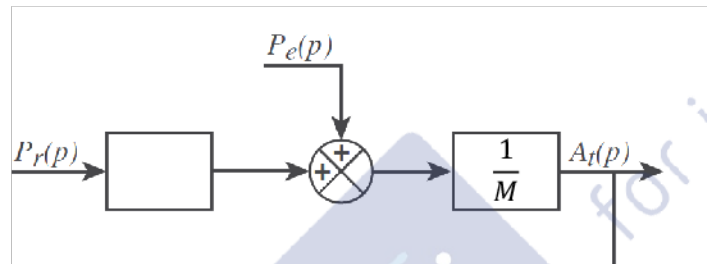
On a donc :

$$(m_t + m_s) \cdot a_t(t) = F_v(t) - (m_t + m_s) \cdot g$$

Soit :

$$M \cdot a_t(t) = F_v(t) + P_e(t)$$

Avec : $\begin{cases} M = m_t + m_s \\ P_e(t) = -(m_t + m_s) \cdot g \end{cases}$ d'où $P_e(p) = -\frac{(m_t + m_s) \cdot g}{p}$



Q.22. Déterminer les expressions des fonctions de transfert en boucle fermée du vérin H_{vq} et H_{vp} (telles que $A_t(p) = H_{vq}(p) Q(p) + H_{vp}(p) P_e(p)$) et préciser les expressions des coefficients K_v , K_p et ω_v de leurs formes canoniques.

$$H_{vq}(p) = \frac{K_v p}{1 + \frac{p^2}{\omega_v^2}} \text{ et } H_{vp}(p) = \frac{K_p p^2}{1 + \frac{p^2}{\omega_v^2}}$$

$$H_{vq}(p) = \frac{A_t(p)}{Q(p)} = \frac{\frac{2 \cdot B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot S \cdot \frac{1}{M}}{1 + \frac{2 \cdot B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot S \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{S}{p}} = \frac{2 \cdot B \cdot S \cdot p}{M \cdot V_0 \cdot p^2 + 2 \cdot B \cdot S^2} = \frac{\frac{1}{S} \cdot p}{1 + \frac{M \cdot V_0}{2 \cdot B \cdot S^2} \cdot p^2}$$

$$H_{vq}(p) = \frac{K_v \cdot p}{1 + \frac{p^2}{\omega_v^2}} \text{ avec } K_v = \frac{1}{S} \text{ et } \omega_v = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot S^2}{M \cdot V_0}}$$

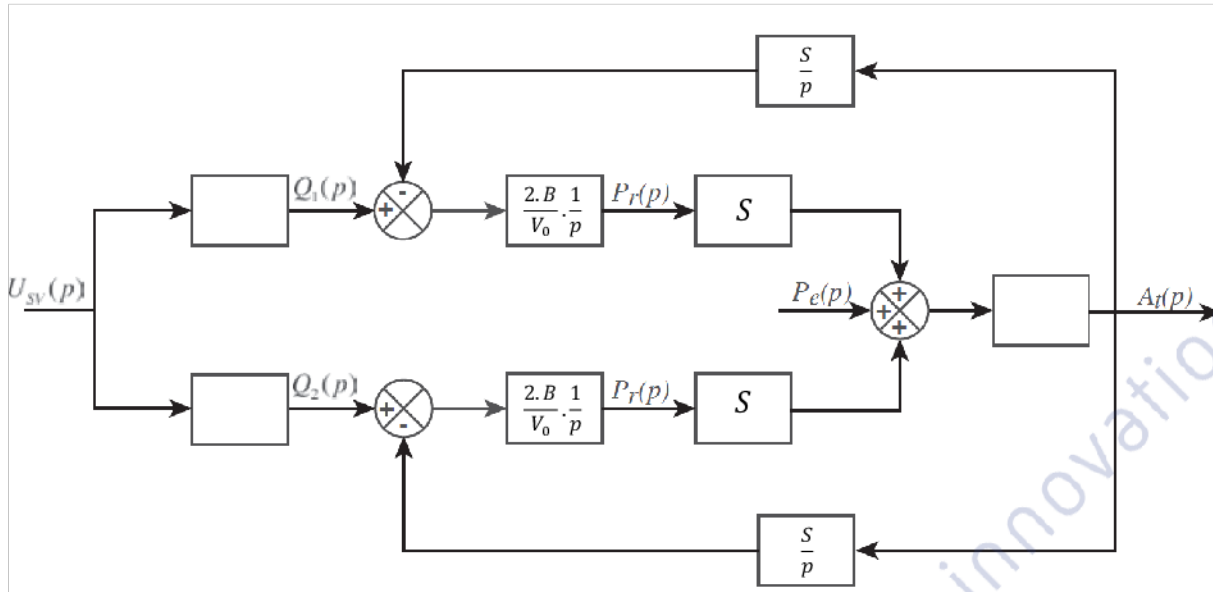
$$H_{vp}(p) = \frac{A_t(p)}{P_e(p)} = \frac{\frac{1}{M}}{1 + \frac{2 \cdot B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot S \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{S}{p}} = \frac{V_0 \cdot p^2}{M \cdot V_0 \cdot p^2 + 2 \cdot B \cdot S^2} = \frac{\frac{V_0}{2 \cdot B \cdot S^2} \cdot p^2}{1 + \frac{M \cdot V_0}{2 \cdot B \cdot S^2} \cdot p^2}$$

$$H_{vp}(p) = \frac{K_p \cdot p^2}{1 + \frac{p^2}{\omega_v^2}} \text{ avec } K_p = \frac{V_0}{2 \cdot B \cdot S^2} \text{ et } \omega_v = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot S^2}{M \cdot V_0}}$$

Q.23. En utilisant les équations précédentes, compléter les parties grisées du schéma-bloc.

$$P_{ri}(p) = \frac{2 \cdot B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot [Q_i(p) - S \cdot p \cdot \lambda(p)] = \frac{2 \cdot B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left[Q_i(p) - \frac{S}{p} \cdot A_t(p) \right]$$

$$F_{vi}(p) = S \cdot P_{ri}(p)$$



Q.24. Déterminer l'expression de l'équation de mouvement de la table. Compléter la partie grisée du schéma-bloc caractérisant le comportement de deux vérins hydrauliques en mentionnant les expressions de la masse M et de la perturbation $P_e(p)$ en fonction des masses de la table M_t et du spécimen M_s .

On isole la table

BAME :

- Action des 2 vérins verticaux sur la table
- Action de pesanteur sur la table

On applique le Théorème de la Résultante Dynamique en projection sur \vec{z} :

$$\vec{F}_{(\text{vérin1} \rightarrow \text{table})} \cdot \vec{z} + \vec{F}_{(\text{vérin2} \rightarrow \text{table})} \cdot \vec{z} + \vec{F}_{(\text{pesanteur} \rightarrow \text{table})} \cdot \vec{z} = \vec{R}_{d(\text{table/sol})} \cdot \vec{z}$$

$$F_{v1}(t) + F_{v2}(t) - (m_t + m_s) \cdot g = (m_t + m_s) \cdot \ddot{z}(t)$$

On a donc :

$$\boxed{(m_t + m_s) \cdot a_t(t) = F_{v1}(t) + F_{v2}(t) - (m_t + m_s) \cdot g}$$

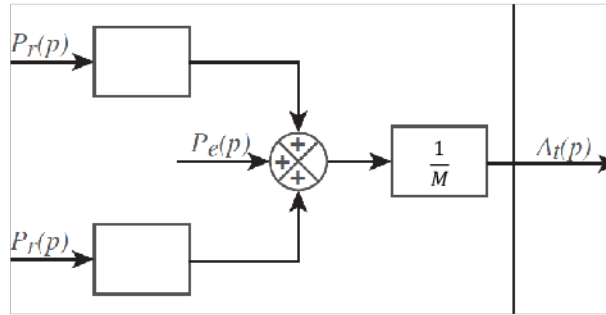
Soit :

$$M \cdot a_t(t) = F_{v1}(t) + F_{v2}(t) + P_e(t)$$

Avec : $\begin{cases} \boxed{M = m_t + m_s} \\ \boxed{P_e(t) = -(m_t + m_s) \cdot g} \end{cases}$ d'ou $P_e(p) = -\frac{(m_t + m_s) \cdot g}{p}$

On obtient par transformation de Laplace de la relation précédente :

$$\boxed{A_t(p) = \frac{1}{M} [F_{v1}(p) + F_{v2}(p) + P_e(p)]}$$



Q.25. Déterminer les expressions des fonctions de transfert en boucle fermée du vérin H_{vq_1} , H_{vq_2} et H_{vp} telles que $A_t(p) = H_{vq_1}(p) Q_1(p) + H_{vq_2}(p) Q_2(p) + H_{vp}(p) P_e(p)$.

$$H_{vq_1}(p) = \frac{A_t(p)}{Q_1(p)} = \frac{\frac{2.B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot S \cdot \frac{1}{M}}{1 + \frac{2.B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot S \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{S}{p}} = \frac{2.B.S.p}{M.V_0.p^2 + 2.B.S^2} = \frac{\frac{1}{S} \cdot p}{1 + \frac{M.V_0}{2.B.S^2} \cdot p^2}$$

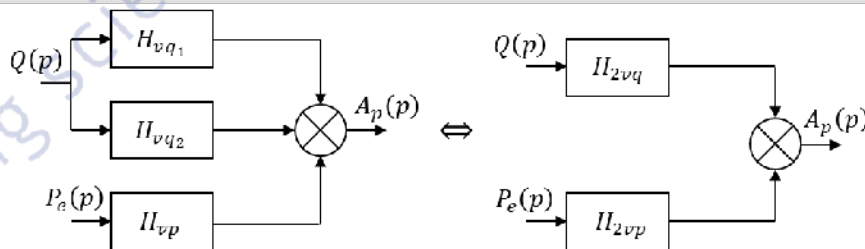
$$H_{vq_2}(p) = \frac{A_t(p)}{Q_2(p)} = \frac{\frac{2.B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot S \cdot \frac{1}{M}}{1 + \frac{2.B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot S \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{S}{p}} = \frac{2.B.S.p}{M.V_0.p^2 + 2.B.S^2} = \frac{\frac{1}{S} \cdot p}{1 + \frac{M.V_0}{2.B.S^2} \cdot p^2}$$

$$H_{vp}(p) = \frac{A_t(p)}{P_e(p)} = \frac{\frac{1}{M}}{1 + \frac{2.B}{V_0} \cdot \frac{1}{p} \cdot S \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{S}{p}} = \frac{V_0.p^2}{M.V_0.p^2 + 2.B.S^2} = \frac{\frac{V_0}{2.B.S^2} \cdot p^2}{1 + \frac{M.V_0}{2.B.S^2} \cdot p^2}$$

Q.26. En supposant que les débits $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont identiques ($q_1(t) = q_2(t) = q(t)$), déterminer la fonction de transfert H_{2vq} telle que $A_t(p) = H_{2vq}(p) Q(p) + H_{2vp}(p) P_e(p)$. Préciser les expressions des coefficients K_{2v} , K_{2p} et ω_{2v} de leurs formes canoniques :

$$H_{2vq}(p) = \frac{K_{2v}p}{1 + \frac{p^2}{\omega_{2v}^2}} \text{ et } H_{2vp}(p) = \frac{K_{2p}p^2}{1 + \frac{p^2}{\omega_{2v}^2}}$$

Donner les expressions de $S_{eq_{2v}}$ et de $M_{eq_{2v}}$ de telle sorte que les expressions de K_{2v} et ω_{2v} en fonction $S_{eq_{2v}}$ et $M_{eq_{2v}}$ correspondent à celles de K_v et ω_v en fonction de S et M.



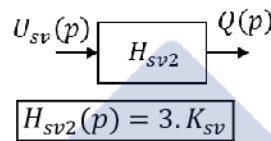
Donc $\begin{cases} H_{2vq} = H_{vq_1} + H_{vq_2} \\ H_{2vp} = H_{vp} \end{cases}$ soit $\begin{cases} K_{2v} = \frac{2}{S} \\ \omega_{2v} = \sqrt{\frac{2.B.S^2}{M.V_0}} \\ K_{2p} = \frac{V_0}{2.B.S^2} \end{cases}$

On pose S_{eq_2} et M_{eq_2} tels que : $K_{2v} = \frac{1}{S_{eq_2}}$ et $\omega_{2v} = \sqrt{\frac{2.B.S_{eq_2}^2}{M_{eq_2}.V_0}}$

$$\left. \begin{aligned} K_{2v} &= \frac{2}{S} \\ K_{2v} &= \frac{1}{S_{eq2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{S_{eq2} = \frac{S}{2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{2v} &= \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot S^2}{M \cdot V_0}} \\ \omega_{2v} &= \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot S_{eq2}^2}{M_{eq2} \cdot V_0}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S^2}{M} = \frac{S_{eq2}^2}{M_{eq2}} \text{ or } S_{eq2} = \frac{S}{2} \text{ donc } \boxed{M_{eq2} = \frac{M}{4}}$$

Q.27. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $H_{sv2}(p)$ en fonction de K_{sv} , $H_{sv2}(p)$ représentant la fonction de transfert modélisant le comportement des servo-valves nécessaires à l'alimentation en fluide des 2 vérins.



Q.28. Par extension, donner les expressions de S_{eq4v} , de M_{eq4v} et de $H_{sv4}(p)$.

Par extension :

$$\boxed{S_{eq4} = \frac{S}{4}} \quad \boxed{M_{eq4} = \frac{M}{16}} \quad \text{et} \quad \boxed{H_{sv4}(p) = 3 \cdot K_{sv}}$$

Q.29. A l'aide de la Figure 17, donner l'expression de K_{ae} pour qu'une erreur nulle en régime permanent conduise à un écart nul en régime permanent.

$$\varepsilon(p) = H_{ae}(p)A_c(p) - H_{ac}(p)A_t(p)$$

On veut $\varepsilon(p) = 0$ si $A_c(p) = A_t(p)$

Il faut donc que $H_{ae}(p) = H_{ac}(p)$ soit $\boxed{C = K_{ae}}$

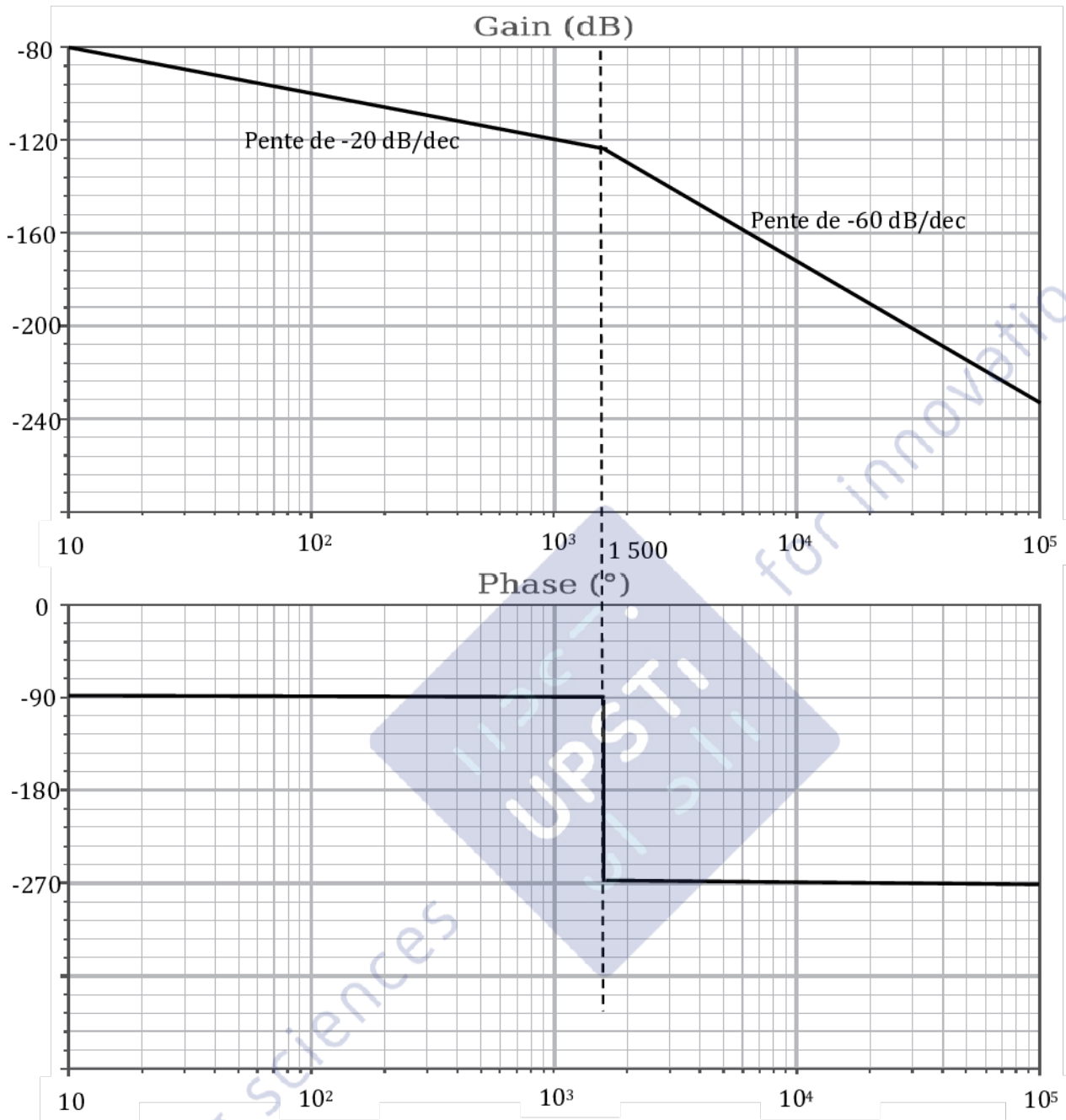
Q.30. Préciser, en la justifiant, la valeur minimale de α qui permet de vérifier les critères d'erreur en poursuite et d'erreur vis à vis de la perturbation.

Pour avoir une erreur statique nulle pour une entrée en échelon, il faut que la FTBO soit de classe 1 (avant la perturbation)

Sans prendre en compte le correcteur, la FTBO est de classe -1, il faut donc choisir $\boxed{\alpha = 2}$

Q.31. En prenant $K_{co} = 1$, donner l'expression de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte de l'asservissement proposé, puis représenter son diagramme de Bode asymptotique.

$$FTBO(p) = \frac{C}{p^2} K_s \frac{K_{kv} p}{1 + \frac{p^2}{\omega_{4v}^2}} = \frac{0,001}{p \left(1 + \frac{p^2}{1500^2} \right)}$$



Q.32. Déterminer la valeur minimale de K_{co} qui permet de vérifier le critère sur la pulsation à 0dB de la FTBO.

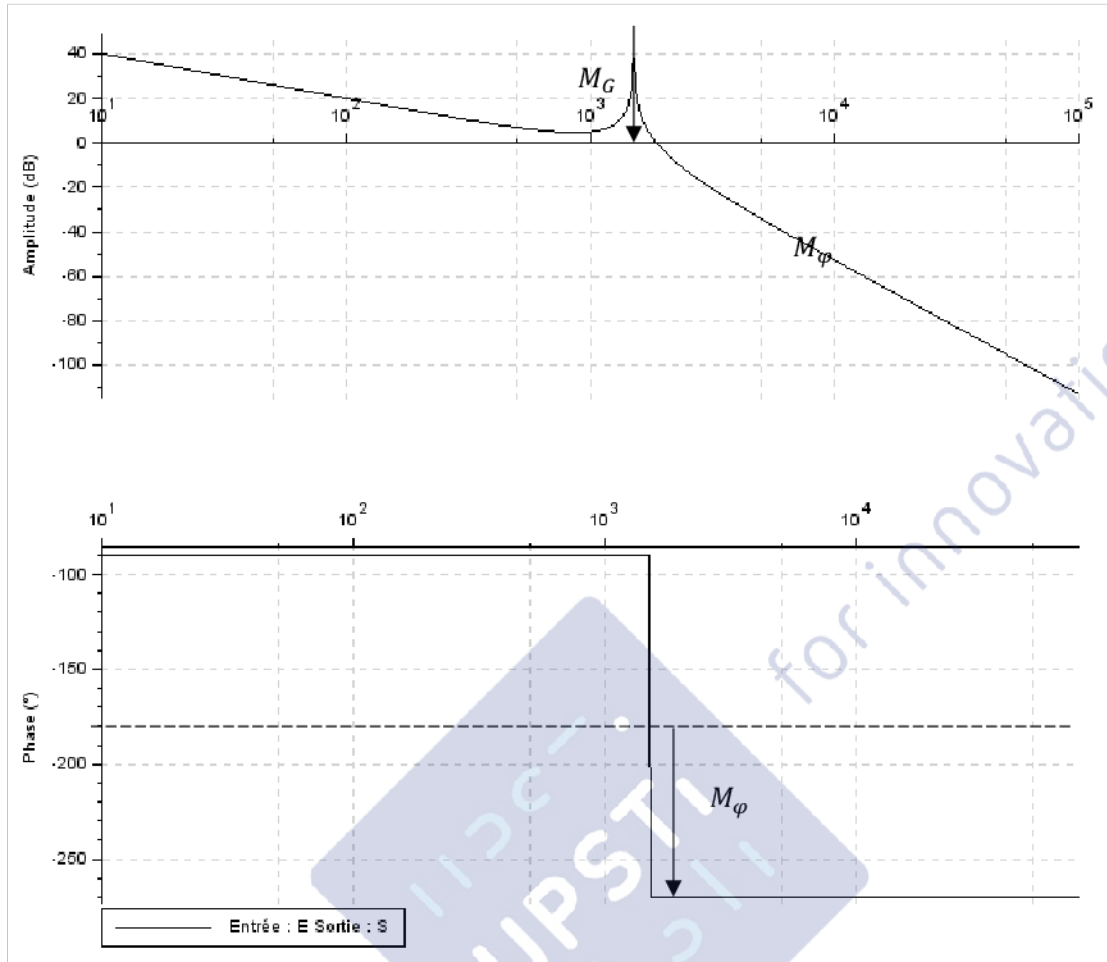
Avec $K_{co} = 1$, on observe un gain de -120dB pour une fréquence de 1000 rad/s.

Pour compenser, il faut donc que :

$$20 \log(K_{co}) = 120 \Rightarrow \boxed{K_{co} = 10^6}$$

Q.33. Sur le diagramme de Bode du Cahier Réponses de la question 31, représenter l'allure du diagramme de Bode réel de la FTBO. Préciser, en le justifiant, si le comportement est stable.

La marge de phase et de gain sont négatives. Le comportement n'est pas stable.



Sans amortissement, le gain est infini à la résonance.

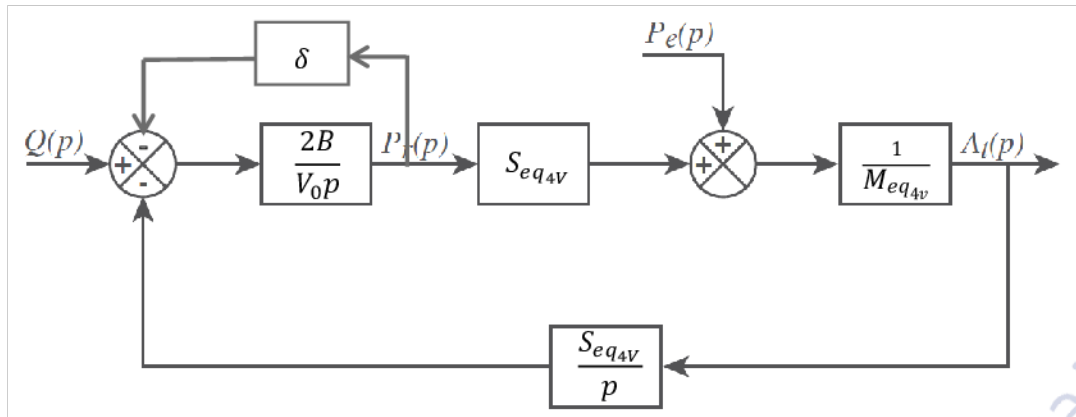
Q.34. Proposer une modification du schéma-bloc donné sur le Cahier Réponses afin de prendre en compte le débit de fuite. Déterminer l'expression de la fonction de transfert H_{4v2} (telle que $A_t(p) = H_{4v2}(p) Q(p)$) associée au comportement dynamique du vérin équivalent ainsi modélisé. On donnera le résultat sous la forme suivante :

$$H_{4v2}(p) = \frac{K_{4v}p}{1 + a_1p + \frac{p^2}{\omega_{4v}^2}}$$

Donner l'expression de a_1 en fonction de M_{eq4v} , δ et S_{eq4v} , et déterminer l'expression du coefficient d'amortissement ξ_v ($a_1 = \frac{2\xi_v}{\omega_{4v}}$) du second ordre du dénominateur de $H_{4v2}(p)$ en fonction de M_{eq4v} , δ et S_{eq4v} , B et V_0 .

$$q(t) = S_{eq4v} \frac{d\lambda(t)}{dt} + \frac{V_0}{2B} \frac{dp_r(t)}{dt} + \delta p_r(t) \Rightarrow P_r(p) = \frac{2B}{V_0 p} \left(Q(p) - \frac{S_{eq4v}}{p} A_t(p) - \delta P_r(p) \right)$$

On peut alors modifier le schéma bloc :



$$H_{4v2}(p) = \frac{\frac{Seq_{4v}}{Meq_{4v} \left(\delta + \frac{V_0}{2B} p \right)}}{1 + \frac{Seq_{4v}^2}{Meq_{4v} p \left(\delta + \frac{V_0}{2B} p \right)}} = \frac{\frac{p}{Seq_{4v}}}{\frac{Meq_{4v} p \left(\delta + \frac{V_0}{2B} p \right)}{Seq_{4v}^2} + 1} = \frac{\frac{p}{Seq_{4v}}}{1 + \frac{Meq_{4v} \delta}{Seq_{4v}^2} p + \frac{Meq_{4v} V_0}{2B Seq_{4v}^2} p^2}$$

$$\begin{cases} K_{4v} = \frac{1}{Seq_{4v}} \\ a_1 = \frac{Meq_{4v} \delta}{Seq_{4v}^2} \\ \omega_{4v} = Seq_{4v} \sqrt{\frac{2B}{Meq_{4v} V_0}} \end{cases}$$

Et enfin :

$$a_1 = \frac{2\xi_v}{\omega_{4v}} \Rightarrow \xi_v = \frac{a_1 \omega_{4v}}{2} = \frac{Meq_{4v} \delta}{2Seq_{4v}} \sqrt{\frac{2B}{Meq_{4v} V_0}}$$

$$\xi_v = \frac{\delta}{Seq_{4v}} \sqrt{\frac{B Meq_{4v}}{2V_0}}$$

Q.35. Déterminer la valeur limite de ξ_v , assurant le critère de stabilité imposé dans le cahier des charges. En déduire la valeur numérique limite du coefficient de débit de fuite δ puis celle du débit de fuite à pression maximale. Conclure quant à la capacité des servo-valves à permettre le débit total lors d'un déplacement à vitesse maximale de la tige du vérin.

La FTBO de l'asservissement est maintenant :

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{p \cdot \left(1 + a_1 p + \frac{p^2}{\omega_{4v}^2} \right)}$$

Avec $K_{BO} = 10^3 \text{ s}^{-1}$ et $\omega_{4v} = 1500 \text{ rd.s}^{-1}$

Le diagramme de Bode est le même que celui tracé à Q33, mais le pic de résonance est réduit (il doit même disparaître) à cause de l'amortissement. La marge de gain doit valoir 12 dB, elle se mesure pour $\varphi = -180^\circ$, soit pour la pulsation ω_{4v} .

$$20 \log |FTBO(j\omega_{4v})| = -12 \text{ dB}$$

Avec :

$$FTBO(j\omega_{4v}) = \frac{K_{BO}}{a_1(j\omega_{4v})^2} = -\frac{K_{BO}}{a_1\omega_{4v}^2}$$

$$\frac{K_{BO}}{a_1\omega_{4v}^2} = 10^{-\frac{12}{20}}$$

$$a_1 = \frac{K_{BO} 10^{\frac{12}{20}}}{\omega_{4v}^2} \approx \frac{1000.4}{1500^2} = 0.0018$$

Puisque $a_1 = \frac{2\xi_v}{\omega_{4v}}$, on en déduit :

$$\xi_v = 1.33$$

Il n'y a plus de résonance puisque $\xi_v > 0.7$

On calcule alors δ :

$$\delta = \frac{a_1 \cdot S_{eq_{4v}}^2}{M_{eq_{4v}}} = \frac{a_1 \cdot \left(\frac{S}{4}\right)^2}{\frac{M}{16}} = \frac{0.0018 \left(\frac{500 \cdot 10^{-4}}{4}\right)^2}{\frac{125 \cdot 10^3}{16}} = 3.6 \cdot 10^{-11}$$

Et le débit de fuite à pression maximale (120 bar) :

$$q = \delta \cdot P_{max} = 3.6 \cdot 10^{-11} \cdot 120 \cdot 10^5 = 4.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Le débit total lors d'un déplacement à vitesse maximale du vérin (0.7 m/s) à pression maximale, est :

$$q = S_{eq_{4v}} \left(\frac{d\lambda(t)}{dt}\right)_{max} + \delta \cdot P_{max} = \frac{500 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 0.7 + 4.3 \cdot 10^{-4} = 129.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Q.36. Quelle valeur de diamètre du vérin permet de vérifier la condition précédente. Cette valeur est-elle réaliste ?

On veut $\omega_{4v} = 10\,000 \text{ rad/s}$

$$\omega_{4v} = 10^4 \Rightarrow S_{eq_{4v}} \sqrt{\frac{2B}{M_{eq_{4v}} V_0}} = 10^4$$

$$\Rightarrow S_{eq_{4v}} = \sqrt{\frac{M_{eq_{4v}} V_0}{2B}} 10^4$$

$$\Rightarrow S = 4 \sqrt{\frac{\frac{125}{4} \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3}}{2 \times 0.5 \times 10^9}} 10^4 = 15.8 \text{ m}^2$$

Pour atteindre cette surface il faudrait un vérin avec un diamètre $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 4.5 \text{ m}$. Ce n'est pas une valeur réaliste.

Partie III

Validation des critères principaux de l'exigence « Contrôler les mouvements de la table »

Q.37. Compléter la fonction `IntTrap(T,Val)` qui réalise l'intégration numérique par la méthode des trapèzes de la grandeur représentée par les valeurs de la liste `Uacc`. Cette fonction renverra une liste correspondant au résultat de l'intégration.

2 propositions de codes:

```
Def IntTrap(T,Val) :
    result = [0 for i in range(len(T))]
    for i in range(len(T)-1) :
        result[i+1] = result[i]+(T[i+1]-T[i])*(Val[i+1]+Val[i])/2
    return result
```

ou

```
Def IntTrap(T,Val) :
    result = [0]
    n=len(T)
    for i in range(n-1) :
        trapeze=(T[i+1]-T[i])*(Val[i+1]+Val[i])/2
        result.append(result[i]+trapeze)
    return result
```

Q.38. Quels sont les inconvénients de l'utilisation d'un accéléromètre lors d'un essai pour obtenir après intégration numérique la vitesse d'un point ?

A cause de l'intégration des données et du bruit de mesure et d'un possible décalage constant (offset), un phénomène de dérive peut apparaître. La valeur de la position ainsi obtenue sera de moins en moins fiable au cours de temps.

Q.39. A l'aide du graphe de la Figure 19 et de l'annexe A, déterminer les valeurs numériques expérimentales de ω_{4v} et ξ_v . Vous effectuerez les tracés utiles, avec le plus grand soin, sur les graphes du Cahier Réponses.

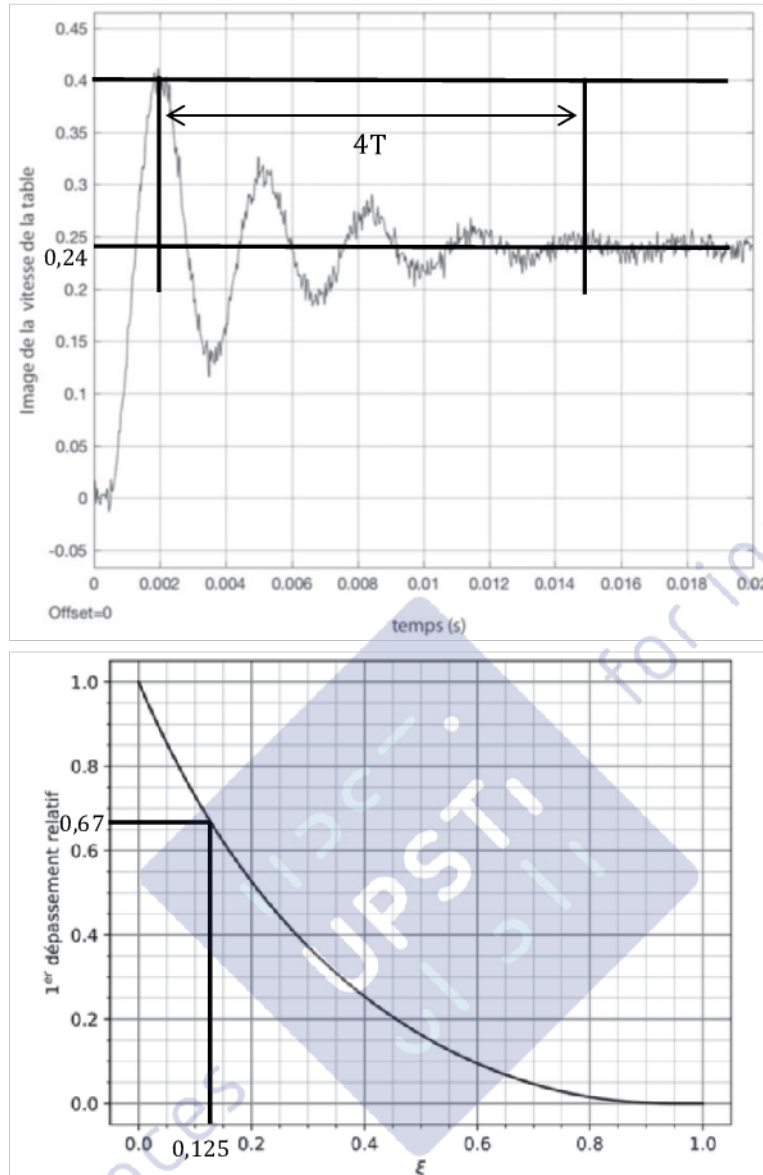
$$D_{1\%} = \frac{0,4 - 0,24}{0,24} = \frac{0,16}{0,24} = 0,67$$

Donc d'après l'abaque $\xi_v = 0,125$

$$4T = 0,013 \Rightarrow T \approx 0,003s \Rightarrow \omega_{pseudo-période} = 2100 \text{ rad/s}$$

ξ_v est faible, on peut donc faire l'approximation $\omega_{pseudo-période} = \omega_{4v}$

$$\omega_{4v} = 2100 \text{ rad/s}$$



Q.40. Quels inconvénients sur le comportement réel du système peuvent découler de cette méthode consistant à vouloir compenser le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin par ce type de filtre électronique ? Que cela implique-t-il sur la méthodologie de réalisation des essais sur différentes structures ?

Pour que cette méthode soit efficace, il faut bien compenser le mode de second ordre de la fonction de transfert du vérin, ce qui implique de connaître les pôles de la FTBO avec une grande précision. Un léger décalage entre les deux pourrait rendre le système encore plus instable (ajout d'un pôle et d'un zéro de plus).

Cela implique donc, lors des essais, de vérifier que la valeur des paramètres (et en particulier la température) n'a pas changé pour régler correctement le correcteur.

Cela implique donc, lors des essais, de vérifier que la valeur des paramètres n'a pas changé pour régler correctement le correcteur.

Q.41. Donner la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte de l'asservissement et préciser son mode dominant.

$$H_{BO}(p) = C \cdot \frac{K_{i2}}{p^2} K_s \frac{K_{4v} p}{1 + \frac{2\xi_d}{\omega_d} p + \frac{p^2}{\omega_d^2}} = \frac{CK_{i2}K_sK_{4v}}{p \left(1 + \frac{2\xi_d}{\omega_d} p + \frac{p^2}{\omega_d^2} \right)}$$

Son mode dominant est $\frac{CK_{i2}K_sK_{4v}}{p}$ qui est valable jusqu'à $\omega_d = 10^5$ rad/s.

Q.42. Quels sont les critères du cahier des charges validés actuellement ?

La marge de gain ($M_G = +\infty$), la marge de phase ($M_G = +90^\circ$) et la bande passante ($\omega_{0dB} = 1000$ rd/s) vérifient les critères demandés, mais l'erreur de traînage est trop grande.

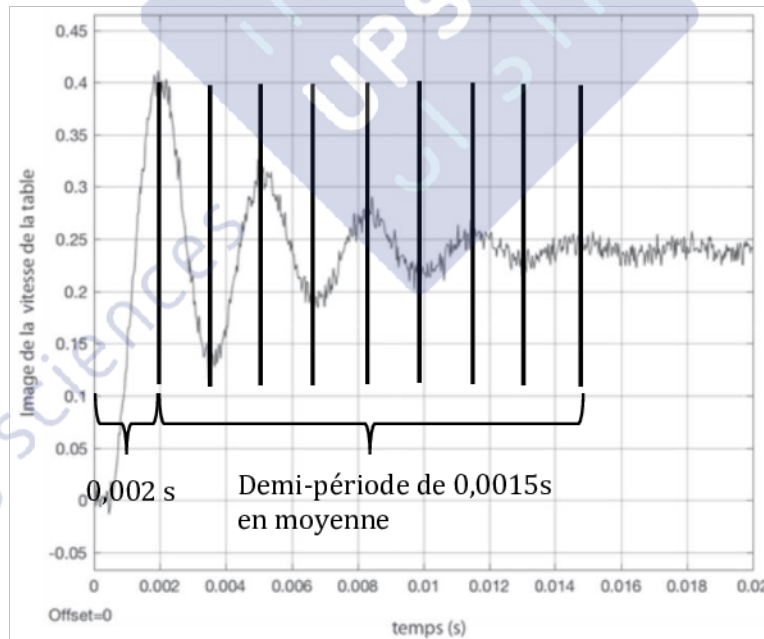
En effet :

$$e_T = \frac{1}{CK_{i2}K_sK_{4v}} = 10^{-3} > 5 \cdot 10^{-4}$$

Q.43. Quel critère n'est pas vérifié sur le système réel ? En regardant attentivement le début de la courbe de la Figure 19, identifier le phénomène en cause et préciser la valeur de son coefficient caractéristique. Préciser quels peuvent être les sous-systèmes pouvant provoquer l'apparition de ce phénomène. Quel terme doit-on ajouter à la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte du système afin de prendre en compte ce phénomène.

On retrouve bien l'erreur de traînage de 10^{-3} déterminée à la question précédente.

En regardant la figure 19, on observe que la première demi-période n'est pas de la même longueur que les suivantes :



On observe donc un phénomène de retard $\tau_r = 0,0005$ s.

On peut ajouter le terme $e^{-\tau_r p}$ dans la FTBO afin de prendre en compte ce retard.

Ce retard est très probablement dû à l'échantillonnage du signal (les valeurs de sorties ne sont réactualisées qu'à chaque pas de temps, et la mise à jour d'une nouvelle valeur ne peut se faire qu'au début de la période de découpage T_{dec}). Le retard est statistiquement égal à $\frac{T_{dec}}{2}$

Q.44. Préciser la valeur de K_{i3} qui permet de retrouver la bande passante à 1 000 rad.s⁻¹.

Avec $H_{co}(p) = \frac{K_{i3}}{p^2}$ on a une pulsation à 0dB pour $\omega = 1000$ rad.s⁻¹.

Il faut donc que $\left| \frac{K_{i3}}{p} \right| = 1$ soit $K_{i3} = |\omega| = 10^3 \text{ s}^{-1}$

Q.45. Déterminer la valeur de la phase pour les pulsations 10, 100, 1 000 et 10 000 rad.s⁻¹ et tracer à main levée, mais avec soin, le diagramme de la phase.

Pour ces pulsations, on peut considérer uniquement le mode dominant : $H_{BO}(p) = \frac{CK_{i3}K_S K_{4w}}{p^2} e^{-\tau_r p}$

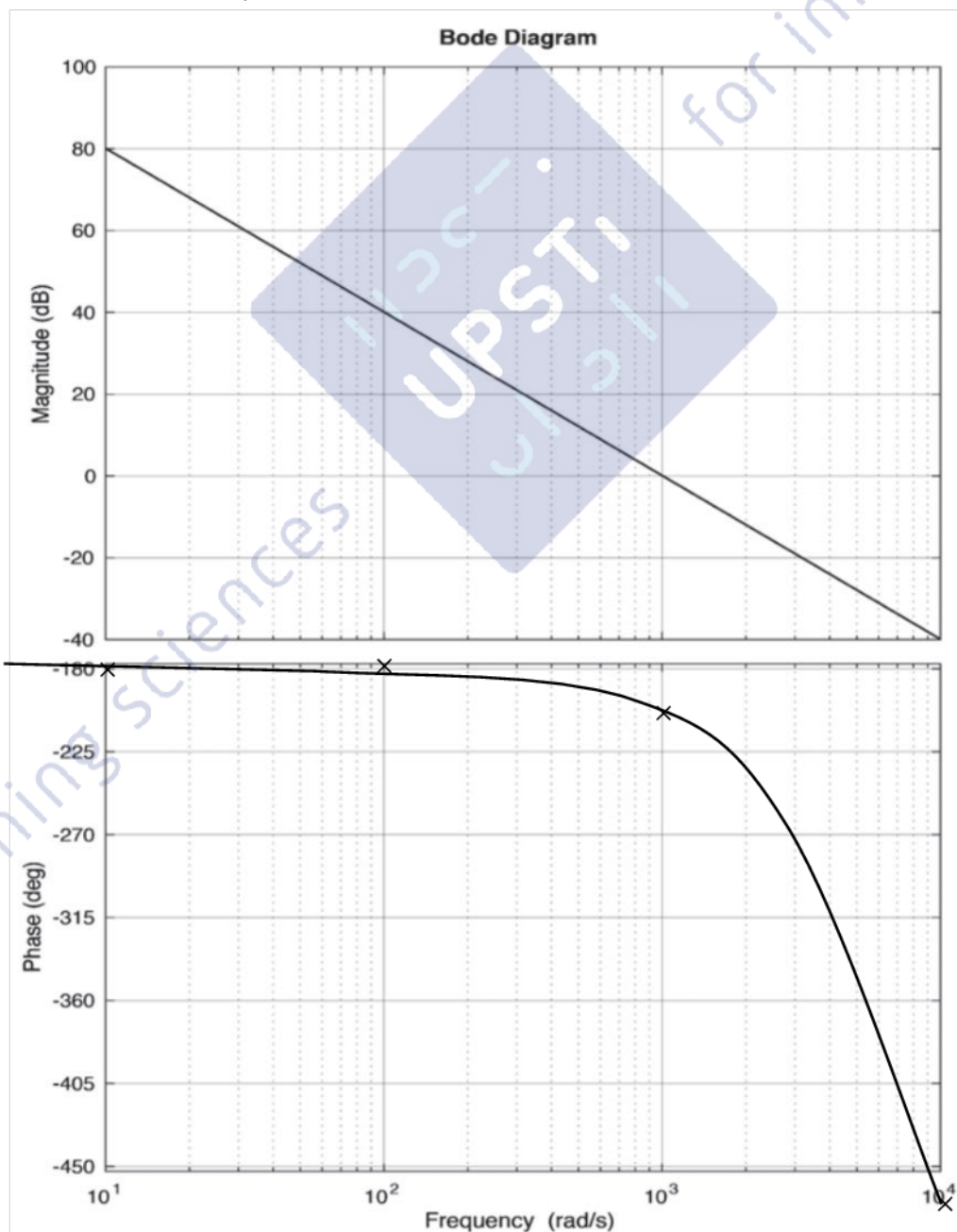
D'où : $\varphi(\omega) = -\pi - 0,0005 \times \omega$

$$\varphi(10) = -\pi - 0,005 \approx -\pi \approx -180^\circ$$

$$\varphi(100) = -\pi - 0,05 \approx -\pi \approx -180^\circ$$

$$\varphi(1000) = -\pi - 0,5 \approx -3,64 \approx -208^\circ$$

$$\varphi(10000) = -\pi - 5 \approx -8,14 \approx -466^\circ$$



Q.46. A partir des documents donnés en annexes, déterminer les valeurs approximatives des paramètres a_{ap} , τ_{ap} et K_{ap} qui permettent de satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges tout en conservant une pulsation à 0 dB de 1 000 rad.s⁻¹.

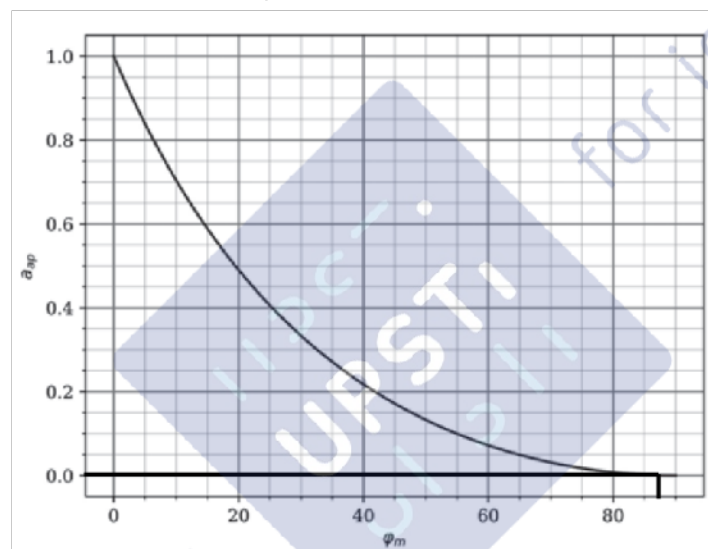
Avec les paramètres actuels, on a une marge de phase de $180 - 208 = -28^\circ$, et on veut avoir $M_\varphi = 55^\circ$ pour $\frac{1}{\tau_{ap}\sqrt{a_{ap}}} = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$.

On a donc :

$$\varphi_m = 55 + 28 = 83^\circ \Rightarrow \boxed{a_{ap} = 0,01}$$

$$\frac{1}{\tau_{ap}\sqrt{a_{ap}}} = 1000 \Rightarrow \boxed{\tau_{ap} = \frac{1}{1000\sqrt{0,01}} = 0.01 \text{ s}}$$

$$G_{dB}(1000) = 0 \Rightarrow \frac{K_{ap}}{\sqrt{a_{ap}}} = 1 \Rightarrow \boxed{K_{ap} = \sqrt{0,01} = 0,1}$$



Q.47. Conclure quant au comportement observé.

L'erreur de traînage est maintenant nulle comme attendu, tous les critères sont donc respectés : stabilité, précision. On constate une bonne rapidité (temps de réponse de l'ordre de 0.01s), malgré le retard de 0.005s toujours visible.