

## Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2018

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

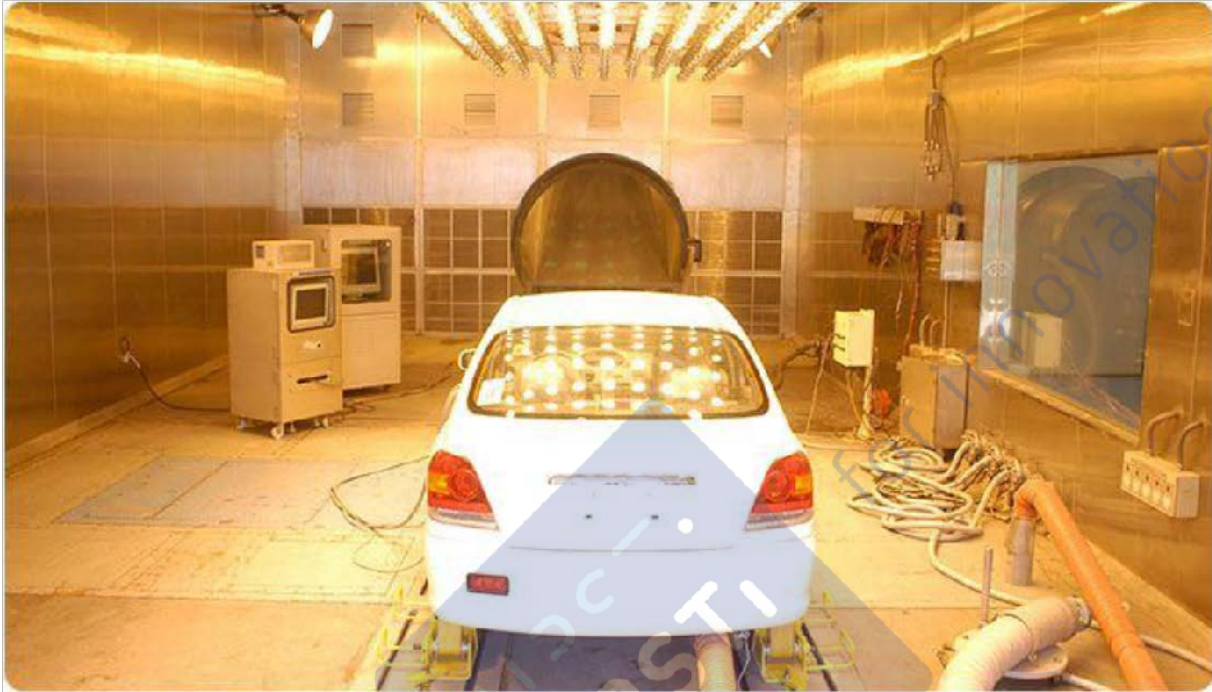
En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

# Etude d'une pompe à chaleur à compresseur Scroll pour simuler des conditions climatiques extrêmes

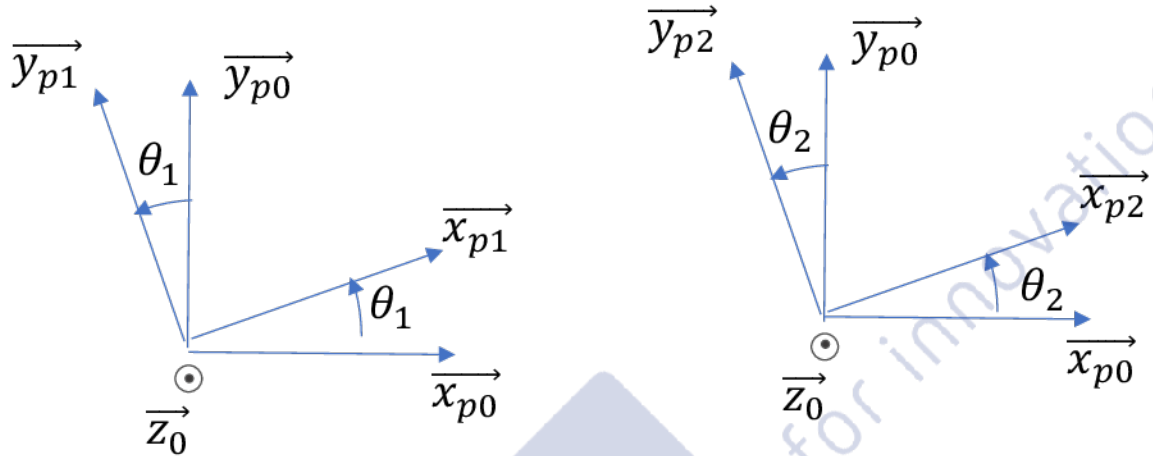


*Essai d'un véhicule en chambre climatique*  
(source : <http://www.testingandsimulation.com/>)



**Question 1.** Représenter la figure plane de calcul reliant la base  $B_1(\overrightarrow{x_{p1}}, \overrightarrow{y_{p1}}, \overrightarrow{z_{p0}})$  à la base  $B_0$  ainsi que celle reliant la base  $B_2(\overrightarrow{x_{p2}}, \overrightarrow{y_{p2}}, \overrightarrow{z_{p0}})$  à la base  $B_0$ .  
Exprimer  $\overrightarrow{y_{p1}}$  et  $\overrightarrow{x_{p2}}$  dans la base  $B_0$  en fonction respectivement de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Les figures planes de calcul peuvent être tracées directement à partir du paramétrage de la figure 13 :



Les projections demandées donnent :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y_{p1}} &= -\sin \theta_1 \overrightarrow{x_{p0}} + \cos \theta_1 \overrightarrow{y_{p0}} \\ \overrightarrow{x_{p2}} &= \cos \theta_2 \overrightarrow{x_{p0}} + \sin \theta_2 \overrightarrow{y_{p0}} \end{aligned}$$

**Question 2 :** Etant donnée l'orthogonalité entre  $\overrightarrow{y_{p1}}$  et  $\overrightarrow{x_{p2}}$ , montrer que  $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$   
Les deux vecteurs orthogonaux, on a :

$$\overrightarrow{y_{p1}} \cdot \overrightarrow{x_{p2}} = 0 \text{ soit } \overrightarrow{y_{p1}} \cdot \overrightarrow{x_{p2}} = -\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 = \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

**Question 3 :** Justifier, à partir du résultat précédent, que l'accouplement en rotation par joint de Oldham soit qualifié de « homocinétique en rotation », c'est-à-dire que le rapport de transmission entre la vitesse de rotation de 1 par rapport à 0,  $\omega_1$ , et celle de 2 par rapport à 0,  $\omega_2$ , est constant dans le temps.

En partant de la relation obtenue précédemment :

$\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$  valable quels que soient les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , on peut écrire que :

$$\frac{d(\sin(\theta_2 - \theta_1))}{dt} = (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Comme  $\cos(\theta_2 - \theta_1) \neq 0$ , on a nécessairement  $\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = 0$  et donc  $\omega_1 = \omega_2$ .

On a ainsi démontré que le joint est homocinétique.

**Question 4 :** Calculer le degré d'hyperstatisme de ce modèle d'accouplement à partir des grandeurs cinématiques.

Le sujet demande ici explicitement d'appliquer la formule de calcul suivante :

$$h = m_c + 6\mu - I_c$$

Avec dans l'exemple :

- $m_c = 1$  (une seule mobilité utile du système)

- $\mu = 1$  (lecture directe du schéma)
- $I_c = 4$  (correspondant à 2 liaisons pivot et 2 liaisons glissières)

**On obtient donc un degré d'hyperstatisme h égal à 3.**

Afin de baisser l'hyperstatisme de l'accouplement, une version alternative est proposée en remplaçant les liaisons  $L_2$  et  $L_3$  par des liaisons pivot-glissant toujours d'axes respectifs  $(O_1, \vec{y}_{p1})$  et  $(O_2, \vec{x}_{p2})$

**Question 5 :** Vérifier, à partir d'une analyse basée sur les grandeurs statiques, que le degré d'hyperstatisme a bien diminué suite à cette modification.

La modification apportée ne rajoute pas de mobilités au système et ne change pas le fonctionnement. Par contre, on a rajouté deux inconnues cinématiques. Le sujet demande d'utiliser la formule de calcul se basant sur les grandeurs statiques :

$$h = m_c - 6(p - 1) + I_S$$

Avec dans l'exemple :

- $m_c = 1$  (une seule mobilité utile du système)
- $p = 4$  (lecture directe du schéma)
- $I_S = 18$  (correspondant à 2 liaisons pivot et 2 liaisons pivot glissant)

**On obtient donc un degré d'hyperstatisme h égal à 1 qui est bien inférieur au h obtenu précédemment.**

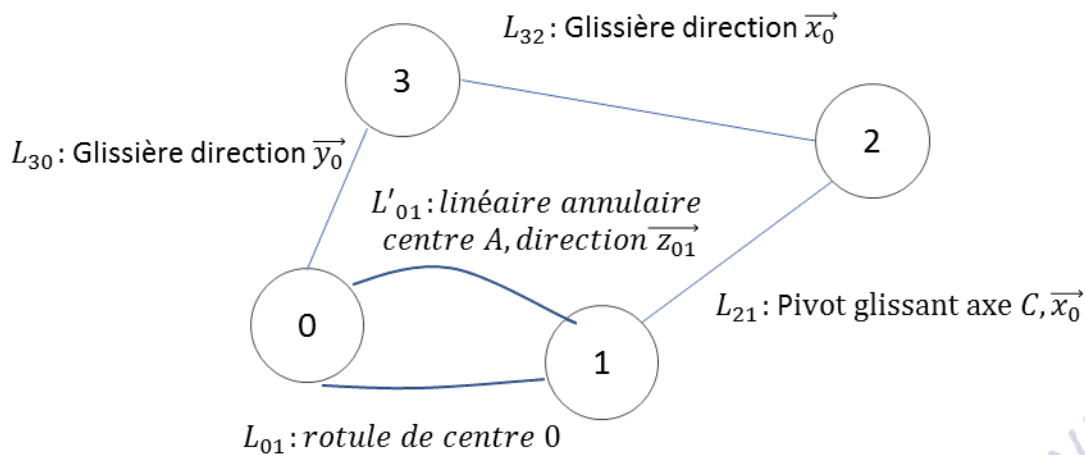
**Question 6 :** Proposer une modification permettant de rendre le système isostatique en conservant sa fonctionnalité.

A partir du mécanisme de départ, on peut observer qu'il faut rajouter 3 mobilités au système de départ, les liaisons pivot ne seront pas modifiées (cela n'est pas réaliste car les contacts sont unilatéraux dans le mécanisme réel mais cinématiquement, un des blocages en translation dans les pivots est inutile) et il faudra donc chercher à introduire 3 degrés de libertés supplémentaires dans les liaisons sans introduire de mobilité supplémentaire.

On peut modifier une des liaisons glissières pour la transformer en liaison linéaire annulaire (par exemple  $L_3$  liaison linéaire annulaire de centre  $A_2$  et de direction  $\vec{x}_{p2}$ )

Selon la lecture de la question, un candidat peut être tenté de repartir du résultat précédent. Auquel cas une solution possible est de transformer une des pivots en pivot glissant (non recommandé !) ou alors de rajouter une pièce intermédiaire (le sujet ne précise pas si c'est permis ou non !) qui pourrait être dans ce cas en rotule.

**Question 7.** Tracer le graphe des liaisons du système tel que modélisé sur la Figure 11 en faisant apparaître chaque liaison avec ses caractéristiques.



**Question 8 :** Démontrer par le calcul que l'association des liaisons en O et en A entre le vilebrequin et le carter forme une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$

Le plus simple est d'utiliser le torseur des actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente :

$$\{F_{eq}\} = \{F_1\} + \{F_2\} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{pmatrix}_{O,R_0} + \begin{pmatrix} X_2 & -a.Y_2 \\ Y_2 & a.X_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{O,R_0} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 & -a.Y_2 \\ Y_1 + Y_2 & a.X_2 \\ Z_1 & 0 \end{pmatrix}_{O,R_0}$$

Soit  $\{F_{eq}\} = \begin{pmatrix} X_{eq} & L_{eq} \\ Y_{eq} & M_{eq} \\ Z_{eq} & 0 \end{pmatrix}_{O,R_0}$  qui est le torseur d'action mécanique d'une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  ou  $(A, \vec{z}_0)$ .

**Question 9 :** Indiquer la valeur de l'indice de mobilité du système dans cette modélisation à partir de l'analyse du schéma cinématique. Proposer une démarche qui, sans utiliser le degré d'hyperstatisme du système, permettrait de retrouver analytiquement cette valeur.

A mon avis, il y a une erreur ici : indice de mobilité =  $I_c - E_c$ .

Le concepteur du sujet a certainement voulu parler de degré de mobilité.

A partir de l'analyse du schéma cinématique, on propose un degré de mobilité de 1. Si on veut vérifier ce degré mobilité sans utiliser le degré d'hyperstatisme du système, il faut analyser le rang du système cinématique :

- écrire les relations de fermeture géométrique dans les différentes boucles indépendantes (3 boucles donc 18 équations ici)
- analyser le rang du système d'équations
- appliquer la formule :  $m_c = I_c - r_c$

**Question 10 :** Justifier alors que la vitesse de rotation de  $S_2$  par rapport à 0 est nulle.

En utilisant la relation de composition des vitesses de rotation :

$$\vec{\Omega}_{20} = \vec{\Omega}_{23} + \vec{\Omega}_{30}$$

Les deux mouvements de 2/3 et de 3/0 sont des mouvements de translation et donc :

$$\vec{\Omega}_{23} = \vec{\Omega}_{30} = \vec{0}$$

Donc,  $\vec{\Omega}_{20} = \vec{0}$  et le mouvement est un mouvement de translation.

**Question 11 :** Exprimer, dans la base  $B_1$ , la vitesse instantanée du point  $C$  appartenant à  $S_2$  dans son mouvement par rapport à 0. Faire l'application numérique.

$$\text{On a } \overrightarrow{V_{C,2/0}} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AC} \right]_0 = R_{orb} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{x_1} \right]_0 + d \cdot \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{z_1} \right]_0 = R_{orb} \dot{\theta} \overrightarrow{y_1}$$

$$\text{AN : } \|\overrightarrow{V_{C,2/0}}\| = R_{orb} \dot{\theta} = 8.10^{-3} \cdot 3600 \cdot \frac{2\pi}{60} \approx 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ou alors par composition des vitesses puis avec Varignon :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{C,2/0}} &= \overrightarrow{V_{C,2/1}} + \overrightarrow{V_{C,1/0}} \\ \overrightarrow{V_{C,2/1}} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{C,1/0}} &= \overrightarrow{V_{A,1/0}} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ &= \vec{0} - R_{orb} \dot{\theta} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{z_1} \\ &= R_{orb} \dot{\theta} \overrightarrow{y_1} \end{aligned}$$

**Question 12 :** Dédurre des questions précédentes le type de mouvement de la spirale mobile  $S_2$  dans son déplacement par rapport à 0 ainsi que ses qualificatifs et caractéristiques.

Le mouvement est un mouvement de translation circulaire. Les trajectoires des points de 2 par rapport au bâti 0 sont des cercles de rayon  $R_{orb}$  et la vitesse de tous les points de 2/0 est égale à  $R_{orb} \dot{\theta} \overrightarrow{y_1}$

$$\{V_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ R_{orb} \dot{\theta} \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_{\forall P}$$

**Dans la suite du problème, il sera admis que tous les points P de la spirale mobile  $S_2$  ont par rapport au bâti la même vitesse  $\overrightarrow{V_{P,2/0}} = V \overrightarrow{y_1}$  (avec  $V = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).**

**Question 13 :** Déterminer l'expression de l'action normale à la surface  $F_{surf}$  à partir des caractéristiques du contact. Faire l'application numérique.

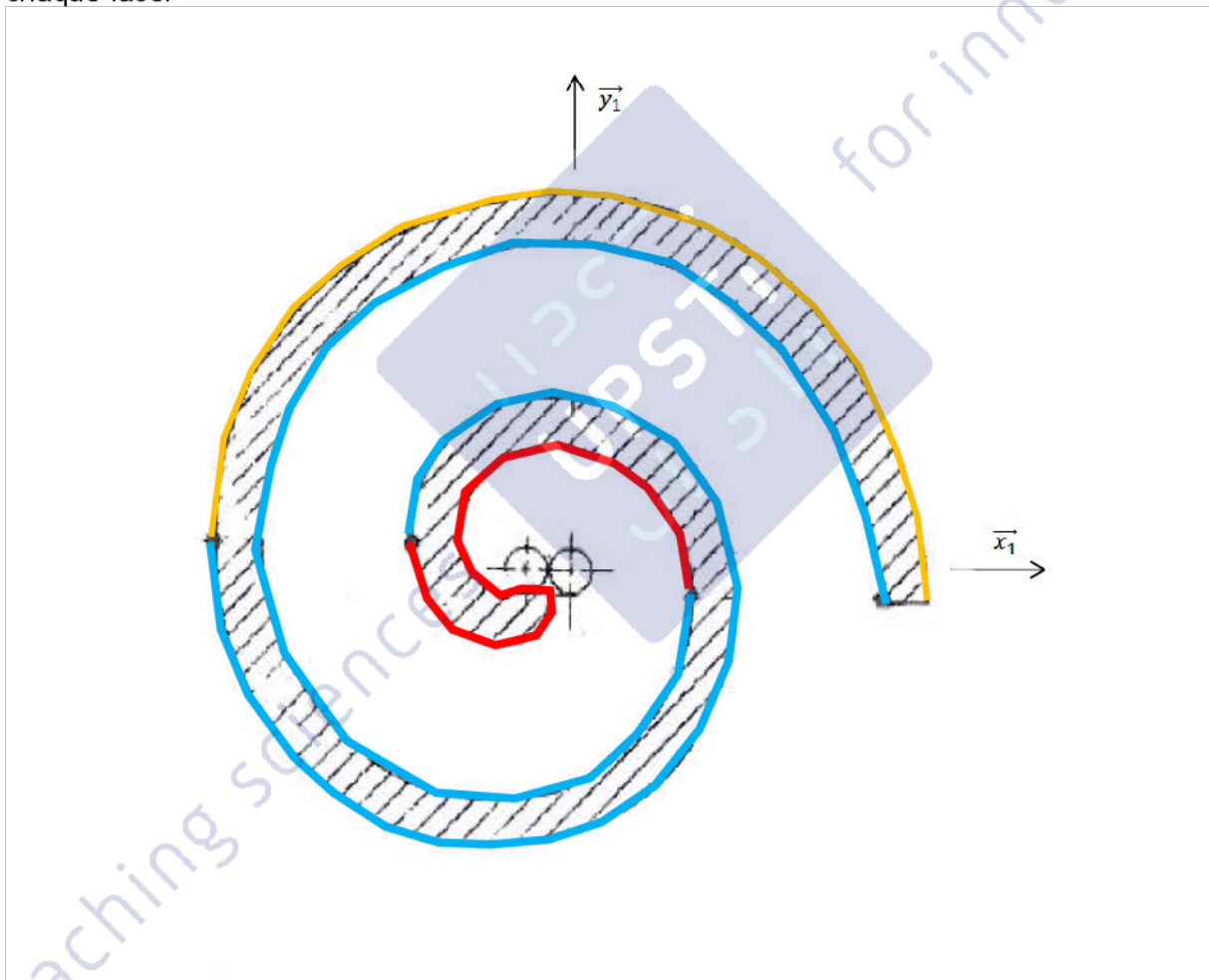
A partir des caractéristiques du contact, on peut déterminer la surface de la couronne de contact :

$$S_{couronne} = \pi(0,11^2 - 0,06^2) \approx 2,7 \times 10^{-2} m^2$$

La pression étant homogène, l'effort normal dans la couronne sera égal à :

$$F_{Surf} = S_{couronne} \cdot p_{Surf} = 2,7 \times 10^{-2} \times 6 \times 10^5 \approx 16,2 \times 10^3 N$$

**Question 14 :** En considérant que dans chaque chambre la pression est homogène, et en vous appuyant sur la Figure 15, compléter le document réponse DR1 en faisant apparaître distinctement l'état de la pression (par des couleurs différentes) tout le long de la spirale et sur chaque face.



Zones de pression :

- :  $P_{ext}$
- :  $P_{inter}$
- :  $P_{cent}$

**Question 15 :** En s'appuyant sur les différentes surfaces identifiées à la question précédente montrer en analysant le comportement selon  $\vec{x}_0$  seulement que l'effort radial  $F_R$  sur la spirale mobile peut s'écrire :

$$F_R = 2 \cdot R_g \cdot H_{spi} \cdot (P_{cent} - P_{ext})$$

où  $H_{spi}$  est la hauteur des spirales. Faire l'application numérique avec



$$R_g = 3\text{mm} \text{ et } H_{spi} = 50\text{mm}$$

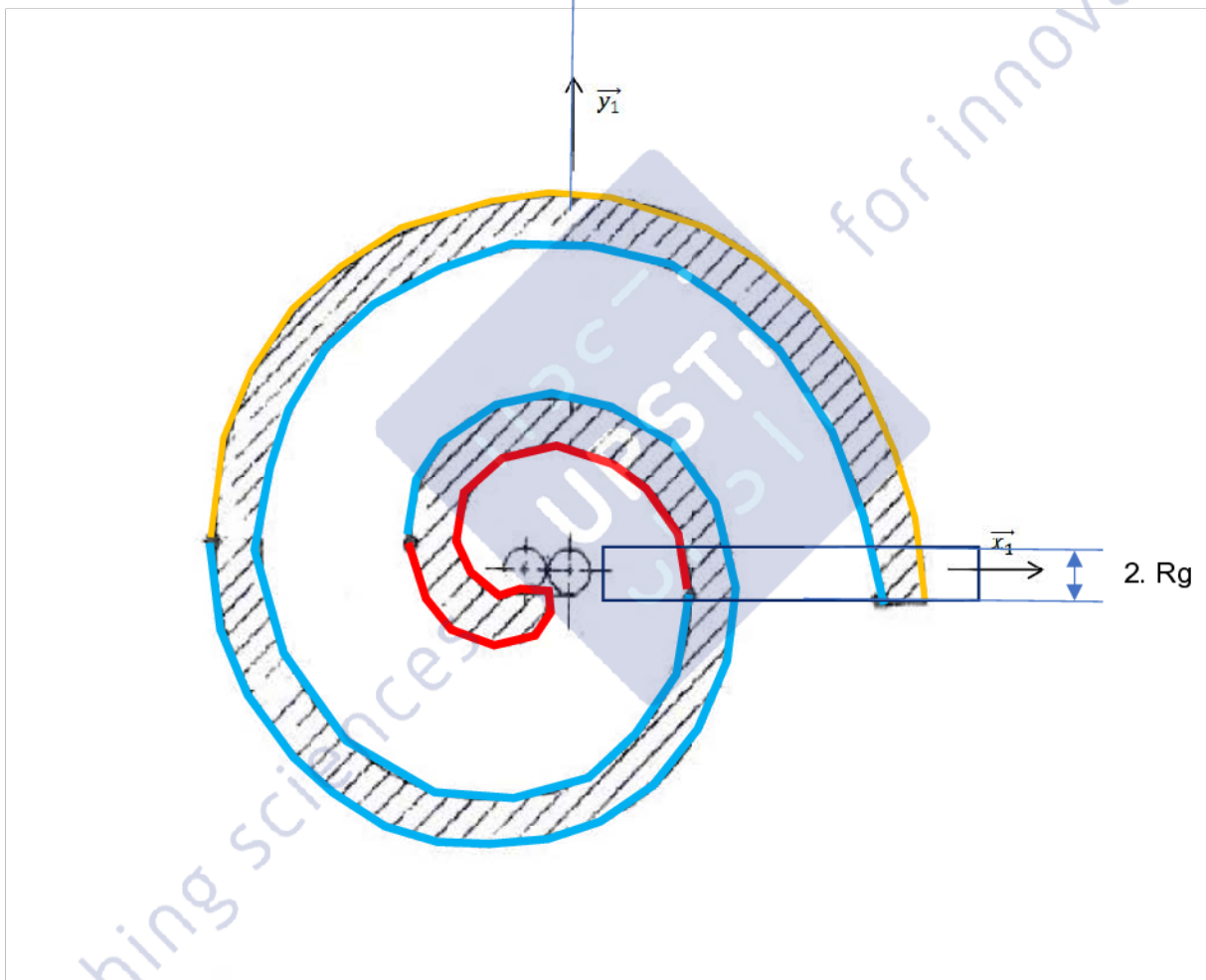
Par analyse des surfaces projetées suivant  $\vec{x}_1$  (efforts qui nous intéressent ici plutôt que suivant  $\vec{x}_0$ ,  $F_R$  est d'ailleurs défini suivant  $\vec{x}_1$ ) :

On observe que la seule zone de la spirale où des surfaces en vis-à-vis ne sont pas soumises à la même pression ou de façon symétrique à une autre zone, est la zone encadrée.

La surface projetée suivant  $\vec{x}_1$  est égale à  $S_{proj} = 2 \cdot R_g \cdot H_{spi}$  et un côté est à la pression  $P_{cent}$  alors que l'autre est à la pression  $P_{ext}$ . Les efforts exercés sur les deux faces encadrées soumises à la pression  $P_{inter}$  se compensent.

Au total, on obtient bien :

$$F_R = S_{proj} \cdot \Delta P = 2 \cdot R_g \cdot H_{spi} \cdot (P_{cent} - P_{ext})$$



**Question 16 :** À partir du bilan des actions mécaniques s'exerçant sur la spirale mobile et des résultats précédents, exprimer l'ensemble des torseurs déplacés au point C dans la base  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  :

$$\begin{array}{ll} \{T_{poids \rightarrow spirale\ mobile}\} & ; \quad \{T_{vibrequin \rightarrow spirale\ mobile}\} ; \\ \{T_{couronne \rightarrow spirale\ mobile}\} & ; \quad \{T_{gaz \rightarrow spirale\ mobile}\}. \end{array}$$

La question demande simplement l'expression des torseurs au point C, il s'agit d'appliquer la formule de Varignon pour chacun des torseurs.

$$\{T_{poids \rightarrow spirale\ mobile}\}_C = \begin{Bmatrix} -m \cdot g \cdot \vec{z}_{01} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -m \cdot g \cdot \vec{z}_{01} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C ;$$

$$\{T_{vilebrequin \rightarrow spirale\ mobile}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} F_V \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\};$$

$$\{T_{couronne \rightarrow spirale\ mobile}\} = \left\{ \begin{array}{c} -f \cdot F_{surf} \cdot \vec{y}_1 + F_{surf} \cdot \vec{z}_1 \\ (Y_H \cdot F_{surf} + f \cdot h_H \cdot F_{surf}) \vec{x}_1 - X_H \cdot F_{surf} \cdot \vec{y}_1 - f \cdot X_H \cdot F_{surf} \cdot \vec{z}_1 \end{array} \right\};$$

$$\{T_{gaz \rightarrow spirale\ mobile}\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_R \cdot \vec{x}_1 - F_T \cdot \vec{y}_1 - F_A \cdot \vec{z}_1 \\ F_T \cdot h_K \cdot \vec{x}_1 + (F_A \cdot x_K - F_R \cdot h_K) \cdot \vec{y}_1 - F_T \cdot x_K \vec{z}_1 \end{array} \right\}$$

On peut s'interroger à ce stade sur le torseur manquant dans l'étude. La spirale fixe n'apparaît jamais (noté sur le Nota Bene du sujet) mais est-ce réaliste, rien que pour des problèmes d'étanchéité ?

Le système n'est pas équilibré quand on fait le bilan, gênant.

**Question 17 :** Calculer le torseur dynamique en C de la spirale mobile  $S_2$  dans son mouvement par rapport au bâti 0.

On rappelle que le mouvement de la spirale mobile est un mouvement de translation circulaire. On peut d'abord calculer le torseur dynamique en G (vitesse de rotation constante) :

$$\{\mathcal{D}_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{\Gamma}_{G,2/0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -m \cdot R_{orb} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

En appliquant ensuite la relation de Varignon, on peut calculer le torseur au point C :

$$\{\mathcal{D}_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} -m \cdot R_{orb} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1 \\ -m \cdot h_G \cdot R_{orb} \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_C$$

**Question 18.** À partir des questions précédentes, choisir la projection qui à l'aide du théorème de la résultante dynamique appliqué à la spirale mobile permet d'obtenir  $F_V$ . Ecrire alors l'expression de  $F_V$  et faire l'application numérique.

Comment gérer à ce niveau la croix (supposée être en liaison glissière avec la spirale mobile) ? Sans la croix, l'équilibre du système est impossible. Je pense donc qu'il faut appliquer le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}_0$  afin de s'affranchir des actions de liaison :

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot \vec{x} + F_V \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 - f F_{surf} \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 - F_R \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 - F_T \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 &= -m R_{orb} \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 \\ -F_V \sin \theta + f F_{surf} \sin \theta - F_R \cos \theta + F_T \sin \theta &= -m R_{orb} \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{aligned}$$

$F_V$  dépendrait donc de  $\theta$ .

Le problème laisse entendre de ne pas prendre en compte cette action de liaison au niveau de la glissière (le torseur correspondant n'est pas noté).

Le Théorème de la Résultante Dynamique en projection sur  $\vec{y}_1$  donne alors

$$F_V - f \cdot F_{surf} - F_T = 0$$

$$F_V = f \cdot F_{surf} + F_T \approx 20 \cdot 10^3 N$$

**Question 19.** Déterminer l'expression de la pression dans le contact en fonction de  $R_{man}$ ,  $h_{man}$ , et  $F_V$ .

A partir du calcul de la surface projetée du cylindre suivant  $\vec{y}_1$  :

$$p = \frac{F_V}{2 \cdot R_{man} \cdot h_{man}}$$

**Question 20.** La valeur de  $p_{mat}$  étant fixée à  $p_{mat} = 30 \text{ MPa}$ , faire l'application numérique afin de vérifier si la pression de matage admissible est respectée et donc si l'exigence correspondante est vérifiée.

$$p = \frac{F_V}{2 \cdot R_{man} \cdot h_{man}} = 5,6 \text{ MPa}$$

L'application numérique ci-dessus donne une pression de  $5,6 \text{ MPa}$  inférieure à  $30 \text{ MPa}$  ce qui permet de vérifier l'exigence.

**Question 21.** A partir du théorème du moment dynamique appliqué à la spirale mobile, déterminer les expressions régissant les coordonnées du point  $H$ .

Il manque toujours une action mécanique ou une composante d'action mécanique.

Avec les actions présentées, les équations de moment nous donnent (Théorème du Moment Dynamique en C) :

$$\text{Sur } \vec{x}_1 : y_H \cdot F_{surf} + f \cdot h_H \cdot F_{surf} + F_T \cdot h_K = 0$$

$$\text{Sur } \vec{y}_1 : -x_H \cdot F_{surf} + (F_A \cdot x_K - F_R \cdot h_K) = -m \cdot h_G \cdot R_{orb} \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\text{Sur } \vec{z}_1 : -f \cdot x_H \cdot F_{surf} - F_T \cdot x_K = 0$$

La résolution du système donne :

$$x_H = \frac{F_T \cdot x_K}{-f \cdot F_{surf}} \text{ OU } x_H = \frac{m \cdot h_G \cdot R_{orb} \cdot \dot{\theta}^2 + F_A \cdot x_K - F_R \cdot h_K}{F_{surf}}$$

$$y_H = \frac{-(f \cdot h_H \cdot F_{surf} + F_T \cdot h_K)}{F_{surf}}$$

$h_H$  était donné et égal à  $50 \text{ mm}$ .

**Question 22.** Calculer numériquement les coordonnées de  $H$ . Conclure quant au respect du critère de non-décollement dans le modèle étudié.

On ne prend pas en compte ni la spirale fixe, ni la croix et on simplifie l'action d'entraînement du vilebrequin...

Deux expressions de  $x_H$  ! Un peu déstabilisant pour le candidat tout de même. Les deux applications numériques pour  $x_H$  donnent le même résultat :

$$x_H \approx 20 \text{ mm}$$

$$y_H \approx -115 \text{ mm}$$

En se plaçant dans le plan à la hauteur  $h_H$ , le point est compris dans un cercle de rayon  $\sqrt{20^2 + 115^2} \approx 117 \text{ mm}$  ce qui est supérieur au rayon extérieur de  $110 \text{ mm}$ . Le critère de non-basculement n'est donc pas vérifié dans cette situation.

**Question 23.** Donner la forme de la matrice d'inertie du vilebrequin associé au bobinage exprimée en  $G_V$ . Seule la forme de la matrice est à donner et justifier, l'expression détaillée de chaque terme de la matrice n'est pas demandée.

Au plus simple, on peut écrire que le système {vilebrequin+bobinage} possède un plan de symétrie matérielle  $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$  et que la matrice en  $G_V$  sera de la forme :

$$I(G_V) = \begin{bmatrix} A_V & 0 & -E_V \\ 0 & B_V & 0 \\ -E_V & 0 & J_V \end{bmatrix}_{(G_V, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Dans la suite de cette partie, il est admis que la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble

exprimée au point  $G_V$  est telle que  $I(G_V) = \begin{bmatrix} A_V & 0 & 0 \\ 0 & B_V & 0 \\ 0 & 0 & J_V \end{bmatrix}_{(G_V, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$  :

**Question 24.** Discuter des simplifications qui ont été faites pour aboutir à cette forme de matrice.

On a considéré ici que le solide considéré possède deux plans de symétrie. Cela revient à négliger l'influence de  $R_{orb}$  sur la répartition des masses (on considère en gros que le centre de gravité est placé sur  $\vec{z}_1$ ).

**Question 25.** Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble des pièces mobiles {vilebrequin + spirale mobile + contrepoids + croix} ramenée sur l'arbre moteur dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_O$  en fonction de  $m, m_c, R_{orb}, J_V$  et  $\omega$ .

L'énergie cinétique du système sera la somme des énergies cinétiques des différentes pièces en mouvement :

$$E_c(\Sigma/O) = E_c(\text{vilebrequin}/O) + E_c(\text{spirale}/O) + E_c(\text{Contrepoids}/O) + E_c(\text{Croix}/O)$$

Les masses et inerties de la croix sont négligés dans ce calcul.

Le vilebrequin est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe :

$$E_c(\text{vilebrequin}/O) = \frac{1}{2} J_V \omega^2$$

La spirale a mouvement de translation circulaire comme défini dans la **question 12**.

$$E_c(\text{spirale}/O) = \frac{1}{2} m R_{orb}^2 \omega^2$$

Le contrepoids a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (éloigné de  $R_{orb}$  de l'axe de rotation).

$$E_c(\text{contrepoids}/O) = \frac{1}{2} m_c R_{orb}^2 \omega^2$$

Au bilan, l'énergie cinétique de l'ensemble est :

$$E_c(\Sigma/O) = \frac{1}{2} (J_V + (m + m_c) R_{orb}^2) \omega^2$$

**Question 26.** Déterminer les expressions de toutes les puissances galiléennes des actions mécaniques intervenant sur l'ensemble mobile {vilebrequin + spirale mobile + contrepoids + croix}.

Les différentes puissances seront calculées à partir de la formule suivante :

$$\mathcal{P}_{ext \rightarrow \Sigma/O} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \\ \vec{M}_{C \Sigma \rightarrow \Sigma} \end{array} \right\}_c \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{\Sigma/O} \\ \vec{V}_{C, \Sigma/O} \end{array} \right\}_c$$

On fait le bilan des actions suivantes :



- couple moteur appliqué sur le vilebrequin

$$\mathcal{P}_{mot \rightarrow vilebrequin/0} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_1 \end{array} \right\}_c \otimes \left\{ \begin{array}{c} \omega \vec{z}_1 \\ V_{C,\Sigma/0} \end{array} \right\} = C_m \omega$$

- actions de pesanteur appliquées sur les différentes pièces (puissance développée nulle ici, la vitesse restant orthogonale au déplacement du centre de gravité)
- action de frottement sur la spirale :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{couronne \rightarrow spirale/0} &= \\ & \left\{ \begin{array}{c} -f \cdot F_{surf} \cdot \vec{y}_1 + F_{surf} \cdot \vec{z}_1 \\ (Y_H \cdot F_{surf} + f \cdot h_H \cdot F_{surf}) \vec{x}_1 - X_H \cdot F_{surf} \cdot \vec{y}_1 - f \cdot X_H \cdot F_{surf} \cdot \vec{z}_1 \end{array} \right\}_c \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ R_{orb} \dot{\theta} \vec{y}_1 \end{array} \right\} \\ &= -R_{orb} \dot{\theta} f F_{surf} \end{aligned}$$

- actions du gaz

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{gaz \rightarrow spirale/0} &= \\ & \left\{ \begin{array}{c} -F_R \cdot \vec{x}_1 - F_T \cdot \vec{y}_1 - F_A \cdot \vec{z}_1 \\ F_T \cdot h_K \cdot \vec{x}_1 + (F_A \cdot x_K - F_R \cdot h_K) \cdot \vec{y}_1 - F_T \cdot x_K \vec{z}_1 \end{array} \right\}_c \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ R_{orb} \dot{\theta} \vec{y}_1 \end{array} \right\} = -R_{orb} \dot{\theta} F_T \end{aligned}$$

- glissière parfaite:

$$\mathcal{P}_{0 \rightarrow croix/0} = 0$$

Soit :

$$\mathcal{P}_{ext \rightarrow \Sigma/0} = C_m \omega - R_{orb} \omega f F_{surf} - R_{orb} \omega F_T$$

**Question 27.** À partir des résultats des questions précédentes et en appliquant les théorèmes adéquats, déterminer l'expression et la valeur numérique du couple moteur nécessaire pour assurer une accélération au démarrage du vilebrequin de  $10 \text{ tr/s}^2$ .

On applique le Théorème de l'Energie Cinétique à l'ensemble {vilebrequin + spirale mobile + contrepoids + croix} :

$$\frac{dE_{c(\Sigma/0)}}{dt} = \sum \mathcal{P}_{ext \rightarrow \Sigma/0} + \sum \mathcal{P}_{int}$$

A partir des résultats des questions précédentes, on obtient :

$$(J_V + (m + m_c) R_{orb}^2) \omega \dot{\omega} = C_m \omega - R_{orb} \omega f F_{surf} - R_{orb} \omega F_T$$

En simplifiant par  $\omega$  :

$$\begin{aligned} (J_V + (m + m_c) R_{orb}^2) \dot{\omega} &= C_m - R_{orb} f F_{surf} - R_{orb} F_T \\ C_m &= R_{orb} f F_{surf} + R_{orb} F_T + (J_V + (m + m_c) R_{orb}^2) \dot{\omega} \end{aligned}$$

L'application numérique est demandée. Sans calculatrice, même en faisant des estimations pour simplifier le calcul, c'est très fastidieux.

$J_V$  est fourni dans les tableaux de valeurs en fin de sujet.

La valeur de  $\dot{\omega}$  souhaitée est de  $10 \text{ tr/s}^2 \approx 1,59 \text{ rad/s}^2$

$$C_m = 8 \cdot 10^{-3} (0,2 \times 16200 + 17000) + (500 \cdot 10^{-4} + 13 \times 64 \cdot 10^{-6}) \times 1,59 \approx 162 \text{ Nm}$$

**Question 28.** Choisir alors en fonction des questions précédentes la référence la plus adaptée dans l'extrait de catalogue joint en annexe 1.



Les deux conditions à vérifier sur le moteur portent sur la vitesse de rotation ( $3600 \text{ tr}/\text{mn}$ ) et le couple à délivrer ( $162 \text{ Nm}$ ).

A partir de ces deux valeurs, aucune référence ne correspond dans le tableau proposé et on peut choisir de prendre la référence la plus proche :

- dernière référence, moteur de  $56.7 \text{ kW}$ ,  $3520 \text{ tr}/\text{mn}$  et  $170 \text{ Nm}$

**Question 29.** Déterminer la résultante dynamique  $\overrightarrow{R_{S/R_0}^{dyn}}$  du système  $S = \{S_1 + S_2\}$ . Le résultat sera mis sous la forme :

$$\overrightarrow{R_{S/R_0}^{dyn}} = X_{1bis} \overrightarrow{x_{1bis}} + X_1 \overrightarrow{x_1}.$$

$$\overrightarrow{R_{S_2/R_0}^{dyn}} = m_2 \overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/0}} = -m_2 R_{orb} \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{R_{S_1/R_0}^{dyn}} = m_1 \overrightarrow{\Gamma_{G_1,1/0}} = -m_1 \rho \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_{1bis}}$$

$$\overrightarrow{R_{S/R_0}^{dyn}} = \overrightarrow{R_{S_1/R_0}^{dyn}} + \overrightarrow{R_{S_2/R_0}^{dyn}} = -m_1 \rho \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_{1bis}} - m_2 R_{orb} \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1}$$

Et donc :

$$X_{1bis} = -m_1 \rho \dot{\theta}^2$$

$$X_1 = -m_2 R_{orb} \dot{\theta}^2$$

**Question 30.** Déterminer le moment dynamique  $\delta_{O,S/R_0}^{dyn}$  en  $O$  du système  $S = \{S_1 + S_2\}$ . Le résultat sera mis sous la forme :

$$\delta_{O,S/R_0}^{dyn} = L_1 \overrightarrow{x_1} + M_1 \overrightarrow{y_1} + M_{1bis} \overrightarrow{y_{1bis}}.$$

Les caractéristiques cinétiques des solides sont fournies en leur centre de gravité et les moments dynamiques sont à calculer en  $O$ .

On commence par calculer le moment cinétique aux centres de gravité des solides :

$$\overrightarrow{\sigma_{G_1, S_1/R_0}^{cm}} = I_1(G_1) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} = -E_1 \dot{\theta} \overrightarrow{x_1} - F_1 \dot{\theta} \overrightarrow{y_1} + C_1 \dot{\theta} \overrightarrow{z_1}$$

et

$$\overrightarrow{\sigma_{G_2, S_2/R_0}^{cm}} = I_2(G_2) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} = \vec{0}$$

On calcule ensuite les moments dynamiques en (respectivement)  $G_1$  et  $G_2$  :

$$\overrightarrow{\delta_{G_1, S_1/R_0}^{dyn}} = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{G_1, S_1/R_0}^{cm}} \right|_O = -E_1 \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} + F_1 \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{G_2, S_2/R_0}^{dyn}} = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{G_2, S_2/R_0}^{cm}} \right|_O = \vec{0}$$

Il reste ensuite à calculer les moments dynamiques en  $O$  grâce à la relation de Varignon :

$$\overrightarrow{\delta_{O, S_1/R_0}^{dyn}} = \overrightarrow{\delta_{G_1, S_1/R_0}^{dyn}} + \overrightarrow{OG_1} \wedge \overrightarrow{R_{S_1/R_0}^{dyn}} = -E_1 \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} + F_1 \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1} + (h \cdot \overrightarrow{z_0} + \rho \cdot \overrightarrow{x_{1bis}}) \wedge -m_1 \rho \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_{1bis}}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{\delta_{O, S_1/R_0}^{dyn}} = -E_1 \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} + F_1 \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1} - m_1 h \rho \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_{1bis}}$$

$$\overrightarrow{\delta_{O, S_2/R_0}^{dyn}} = \overrightarrow{\delta_{G_2, S_2/R_0}^{dyn}} + \overrightarrow{OG_2} \wedge \overrightarrow{R_{S_2/R_0}^{dyn}} = [(a + d) \cdot \overrightarrow{z_0} + R_{orb} \cdot \overrightarrow{x_1}] \wedge -m_2 R_{orb} \dot{\theta}^2 \overrightarrow{x_1}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{\delta_{O, S_2/R_0}^{dyn}} = -m_2(a+d)R_{orb}\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1}$$

$$\text{Au bilan, } \overrightarrow{\delta_{O, S/R_0}^{dyn}} = L_1\overrightarrow{x_1} + M_1\overrightarrow{y_1} + M_{1bis}\overrightarrow{y_{1bis}} \text{ avec :}$$

- $L_1 = F_1\dot{\theta}^2$
- $M_1 = -E_1\dot{\theta}^2 - m_2(a+d)R_{orb}\dot{\theta}^2$
- $M_{1bis} = -m_1h\rho\dot{\theta}^2$

**Question 31.** Déterminer les moments au point O des efforts dans les paliers situés en O et A. Ils seront exprimés dans la base  $R_0$ .

Il s'agit ici de calculer les éléments de réduction des torseurs fournis au point O :

$$\{T_{palierO \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_0\overrightarrow{x_0} + Y_0\overrightarrow{y_0} + Z_0\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{palierA \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_A\overrightarrow{x_0} + Y_A\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_A\overrightarrow{x_0} + Y_A\overrightarrow{y_0} \\ -aY_A\overrightarrow{x_0} + aX_A\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}$$

**Question 32.** Les mesures d'effort étant faites selon la direction  $\overrightarrow{x_0}$  écrire en justifiant votre choix les 2 équations scalaires issues du principe fondamental de la dynamique utiles au dépouillement des essais. On précisera le système isolé.

En isolant le système {1 + 2}, on va chercher les équations faisant intervenir les valeurs d'efforts dans les paliers sur  $\overrightarrow{x_0}$ .

Ici, les deux équations intéressantes (écrites en projection sur les axes respectifs) sont :

- résultante dynamique suivant  $\overrightarrow{x_0}$  :  $X_0 + X_A = (-m_1\rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_{1bis}} - m_2R_{orb}\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1}) \cdot \overrightarrow{x_0}$
- moment dynamique en O suivant  $\overrightarrow{y_0}$  :  $aX_A = (L_1\overrightarrow{x_1} + M_1\overrightarrow{y_1} + M_{1bis}\overrightarrow{y_{1bis}}) \cdot \overrightarrow{y_0}$

**Question 33.** A partir des résultats d'essais, proposer une méthode d'identification des paramètres  $\rho$  et  $\alpha$  du centre d'inertie  $G_1$  du rotor  $S_1$ , ainsi que des produits d'inertie  $E_1$  et  $F_1$ .

Dans la première équation :

$$X_0 + X_A = (-m_1\rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_{1bis}} - m_2R_{orb}\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1}) \cdot \overrightarrow{x_0} = -m_2R_{orb}\dot{\theta}^2 \cos \theta - m_1\rho\dot{\theta}^2 \cos \alpha$$

On réécrit l'équation sous la forme :

$$\rho \cos \alpha = \frac{-X_0 - X_A - m_2R_{orb}\dot{\theta}^2 \cos \theta}{m_1\dot{\theta}^2}$$

$\rho \cos \alpha$  sera une fonction sinusoïdale. On pourra obtenir  $\rho$  par son amplitude et  $\alpha$  à partir d'une valeur particulière.

Dans la deuxième équation (on considère maintenant que  $\rho$  et  $\alpha$  sont connus) :

$$aX_A = F_1\dot{\theta}^2 \sin \theta + [-E_1\dot{\theta}^2 - m_2(a+d)R_{orb}\dot{\theta}^2] \cos \theta - m_1h\rho\dot{\theta}^2 \cos \alpha$$

Avec  $\theta = 0$  :

$$E_1 = \frac{-m_2(a+d)R_{orb}\dot{\theta}^2 - aX_A - m_1h\rho\dot{\theta}^2 \cos \alpha}{\dot{\theta}^2}$$

Avec  $\theta = \frac{\pi}{2}$  :

$$F_1 = \frac{aX_A + m_1h\rho\dot{\theta}^2 \cos \alpha}{\dot{\theta}^2}$$

**Question 34.** Donner un ordre de grandeur numérique du coefficient  $G_{bal}$  d'équilibrage du système (produit de la vitesse de rotation en  $rad/s$  par la distance du centre de gravité à l'axe de rotation en  $mm$ ) de l'ensemble tournant à vitesse nominale. Cette valeur dépasse-t-elle la valeur  $G_{bal}$  préconisée par la norme ISO1940 pour les rotors de moteurs électriques ? Conclure.

$$G_{bal} = 3600 \times \frac{2\pi}{60} \times 1,5 \times 10^{-3} \approx 0,57 m \cdot s^{-1}$$

La valeur préconisée est de  $40 mm \cdot s^{-1}$  au lieu des  $570 mm \cdot s^{-1}$  atteints dans notre cas. Elle dépasse donc très largement la valeur maximale préconisée, d'où l'intérêt de placer des masselottes d'équilibrage par la suite.

**Question 35.** Exprimer la condition vectorielle à satisfaire pour que le système composé des solides  $\{S_1 + S_2\}$  et des deux masselottes d'équilibrage ait son centre de gravité sur l'axe de rotation (équilibrage statique). Projeter sur  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$ .

Pour que le système ait son centre de gravité sur l'axe de rotation, il faut que :

$$m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2 + m_3 \vec{OM}_3 + m_4 \vec{OM}_4 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot z_G \vec{z}_0$$

Soit, en projection sur  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$

$$\begin{aligned} m_1 R_{orb} + m_2 \rho \cos(\alpha - \theta) + m_3 r \cos(\beta_3 - \theta) + m_4 r \cos(\beta_4 - \theta) &= 0 \\ m_2 \rho \sin(\alpha - \theta) + m_3 r \sin(\beta_3 - \theta) + m_4 r \sin(\beta_4 - \theta) &= 0 \end{aligned}$$

**Question 36.** Ecrire la condition de nullité des moments dynamiques chargeant les paliers du système ((équilibrage dynamique). Projeter sur  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$ .

Il faut rajouter les moments dynamiques dus aux masselottes :

$$\vec{\delta}_{O, m_3/R_0}^{dyn} = \vec{\delta}_{G, m_3/R_0}^{dyn} + \vec{OM}_3 \wedge R_{m_3/R_0}^{dyn} = \vec{0} + (b\vec{z}_0 + r\vec{u}_3) \wedge (-m_3 r \dot{\theta}^2 \vec{u}_3) = -bm_3 r \dot{\theta}^2 \vec{v}_3$$

$$\vec{\delta}_{O, m_4/R_0}^{dyn} = \vec{\delta}_{G, m_4/R_0}^{dyn} + \vec{OM}_4 \wedge R_{m_4/R_0}^{dyn} = \vec{0} + (c\vec{z}_0 + r\vec{u}_4) \wedge (-m_4 r \dot{\theta}^2 \vec{u}_4) = -cm_4 r \dot{\theta}^2 \vec{v}_4$$

La condition de nullité des moments dynamiques va se traduire par :

$$L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + M_{1bis} \vec{y}_{1bis} - bm_3 r \dot{\theta}^2 \vec{v}_3 - cm_4 r \dot{\theta}^2 \vec{v}_4 = \vec{0}$$

Soit pour un moment dynamique nul suivant  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$

$$-F_1 \dot{\theta}^2 + m_1 h \rho \dot{\theta}^2 \sin \alpha + bm_3 r \dot{\theta}^2 \sin(\beta_3 - \theta) + cm_4 r \dot{\theta}^2 \sin(\beta_4 - \theta) = 0$$

$$\begin{aligned} -E_1 \dot{\theta}^2 - m_2 (a + d) R_{orb} \dot{\theta}^2 - m_1 h \rho \dot{\theta}^2 \cos \alpha - bm_3 r \dot{\theta}^2 \cos(\beta_3 - \theta) \\ - cm_4 r \dot{\theta}^2 \cos(\beta_4 - \theta) = 0 \end{aligned}$$

**Question 37.** Commenter ces résultats, à l'aide de la figure 21, du point de vue de la faisabilité du montage des masselottes de part et d'autre du bobinage du rotor (problématique d'encombrement).

A partir des équations de la question 35, on peut calculer le rayon r de montage des masselottes :

$$r = \frac{-m_2 \rho \sin \alpha}{m_3 \sin \beta_3 + m_4 \sin \beta_4} \approx 11 mm$$

Le rayon ne semble pas cohérent avec un montage des masselottes sur la figure (trop proche de l'axe et complètement dans la matière d'après le schéma).

Pour équilibrer dynamiquement un rotor, on pourrait plutôt penser à enlever de la matière, ce qui semble plus cohérent avec la géométrie proposée.

**Question 38.** Compléter le schéma-bloc représentatif du comportement thermique de la chambre sur le document réponse DR2.

Les transformées de Laplace des différentes équations nous donnent :

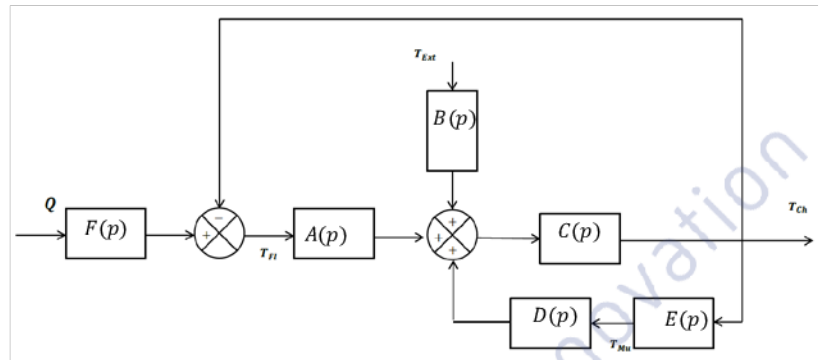
$$(1) C_{ch} \cdot p T_{ch}(p) = Q_1(p) + Q_2(p) + Q(p)$$

$$(2) C_{Mu} p T_{Mu}(p) = -Q_2(p)$$

$$(3) Q_1(p) = \frac{T_{Ext}(p) - T_{Ch}(p)}{R_{ChExt}}$$

$$(4) Q_2(p) = \frac{T_{Mu}(p) - T_{Ch}(p)}{R_{ChMu}}$$

$$(5) Q(p) = \frac{T_{Fl}(p) - T_{Ch}(p)}{R_{ChFl}}$$



A la lecture du schéma bloc, on voit que l'on recherche les fonctions de transferts (notées ci-dessus de A(p) à F(p) ) telles que :

$$T_{Ch}(p) = C(p)[A(p)T_{Fl}(p) + B(p)T_{Ext}(p) + D(p)T_{Mu}(p)]$$

En réinjectant (3), (4), (5) dans (1), on obtient :

$$C_{ch} \cdot p T_{ch}(p) = \frac{T_{Ext}(p) - T_{Ch}(p)}{R_{ChExt}} + \frac{T_{Mu}(p) - T_{Ch}(p)}{R_{ChMu}} + \frac{T_{Fl}(p) - T_{Ch}(p)}{R_{ChFl}}$$

$$T_{ch}(p) \left[ C_{ch} \cdot p + \frac{1}{R_{ChEq}} T_{Ch}(p) \right] = \frac{T_{Ext}(p)}{R_{ChExt}} + \frac{T_{Mu}(p)}{R_{ChMu}} + \frac{T_{Fl}(p)}{R_{ChFl}}$$

$$T_{ch}(p) = \frac{R_{ChEq.}}{1 + R_{ChEq.} C_{ch} \cdot p} \left( \frac{T_{Ext}(p)}{R_{ChExt}} + \frac{T_{Mu}(p)}{R_{ChMu}} + \frac{T_{Fl}(p)}{R_{ChFl}} \right)$$

Et donc  $A(p) = \frac{1}{R_{ChFl}}$ ;  $B(p) = \frac{1}{R_{ChMu}}$ ;  $D(p) = \frac{1}{R_{ChExt}}$ ;  $C(p) = \frac{R_{ChEq.}}{1 + \tau_{ChEq} p}$

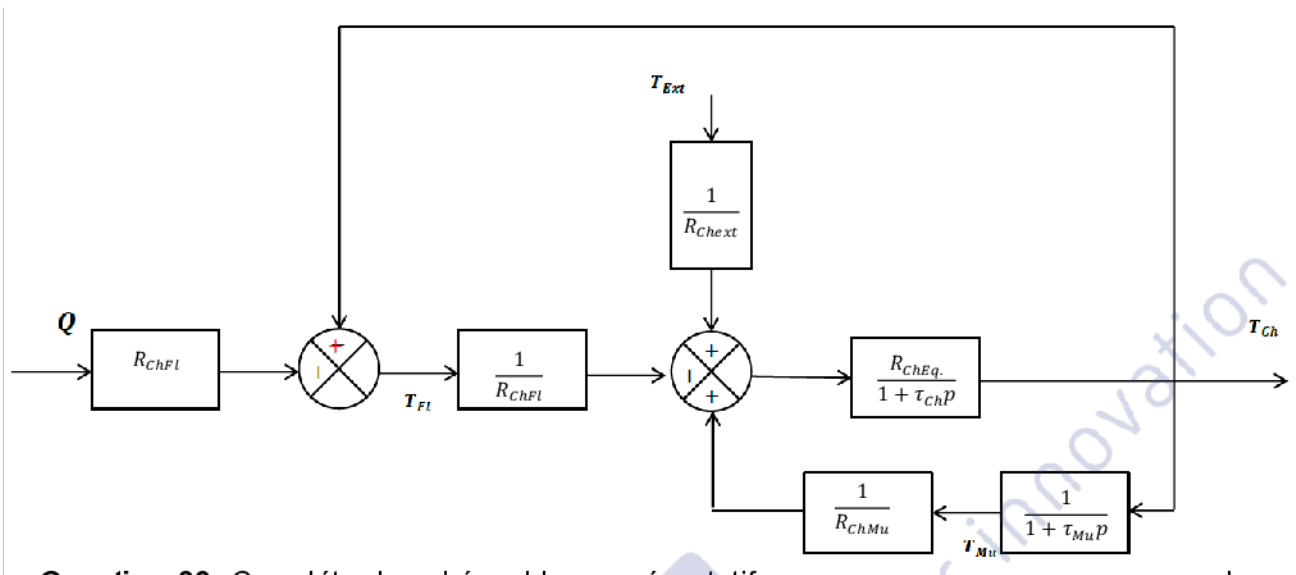
Ensuite, à partir de (2) et de (4)

$$C_{Mu} p T_{Mu}(p) = - \frac{T_{Mu}(p) - T_{Ch}(p)}{R_{ChMu}}$$

$$T_{Mu}(p) = \frac{1}{1 + R_{ChMu} C_{Mu} p} T_{Ch}(p) = \frac{1}{1 + \tau_{ChMu} p} T_{Ch}(p)$$

Enfin, à partir de (5) :  $Q(p) = \frac{T_{Fl}(p) - T_{Ch}(p)}{R_{ChFl}}$  soit  $T_{Fl}(p) = R_{ChFl} Q(p) + T_{Ch}(p)$

Il y a visiblement une erreur de signe dans le schéma bloc proposé dans le DR (signe modifié en rouge).



**Question 39.** Compléter le schéma-bloc représentatif du comportement électromécanique du moteur sur le document réponse DR3

A partir de la transformée de Laplace des équations précédentes :

$$C_m(p) - C_r(p) = J_{eq}p\Omega_m(p);$$

$$C_m(p) = K_T I_m(p);$$

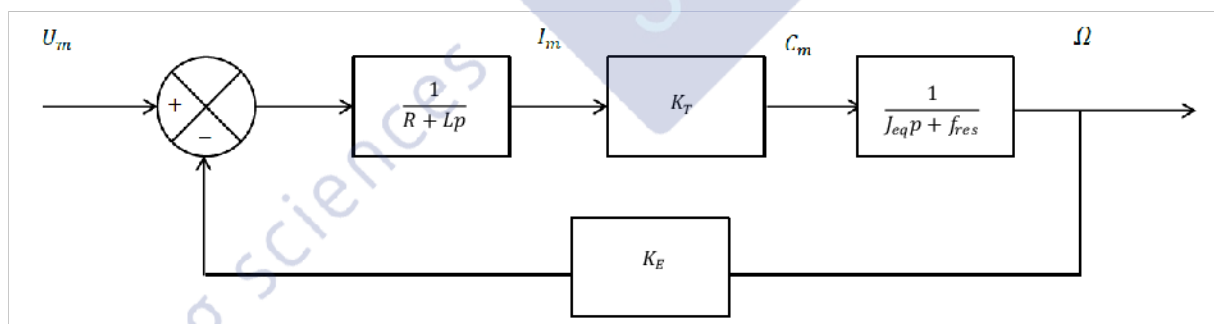
$$E(p) = K_E \Omega_m(p);$$

$$U_m(p) = E(p) + R + Lp I_m(p).$$

En récrivant sous la forme :

$$I_m(p) = \frac{U(p) - E(p)}{R + Lp}$$

$$C_m(p) = (J_{eq}p + f_{res})\Omega_m(p)$$



**Question 40.** Exprimer la fonction de transfert  $H_m$  dans le domaine de Laplace sous la forme canonique :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{k_m}{1 + (\tau_m + \alpha\tau_e)p + \tau_e\tau_m p^2}$$

avec  $\tau_e = \frac{L}{R}$  et  $\tau_m = \frac{LJ_{eq}}{K_E K_T + Rf}$ .

Donner les expressions de  $k_m$  et  $\alpha$ .

On peut exprimer directement (par manipulation des équations ou par utilisation de la formule de Black) la fonction de transfert de la motorisation :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_T}{K_T K_E + (R + Lp)(J_{eq}p + f_{res})}$$

Cette expression mise sous forme canonique nous donne :



$$H_m(p) = \frac{\frac{K_T / K_T K_E + R f_{res}}{1 + \frac{R J_{eq} + L f_{res}}{K_T K_E + R f_{res}} p + \frac{L J_{eq}}{K_T K_E + R f_{res}} p^2}}{k_m} \text{ qui est bien de la forme souhaitée :}$$

$$\frac{k_m}{1 + (\tau_m + \alpha \tau_e) p + \tau_e \tau_m p^2}$$

avec, par identification :

$$k_m = \frac{K_T}{K_T K_E + R f_{res}} ; \tau_m = \frac{R J_{eq}}{K_T K_E + R f_{res}} ; \tau_e = \frac{L}{R} ; \alpha = \frac{R f_{res}}{K_T K_E + R f_{res}}$$

**Question 41.** Montrer que si l'on considère  $R \cdot i_m$  négligeable devant  $e$ ,  $\alpha$  peut être considéré comme petit devant 1 (on se placera en régime permanent).

En reprenant les équations temporelles dans le cas du régime permanent (dérivées nulles) :

$$c_m = f_{res} \omega = K_T \cdot i_m$$

$$u_m = e + R \cdot i_m \text{ et } e = K_E \cdot \omega$$

On obtient en manipulant ces équations les deux relations :

$$i_m = \frac{f_{res} \omega}{K_T} \text{ et } u_m = (K_E + R \frac{f_{res}}{K_T}) \omega$$

Comme  $e \gg R \cdot i_m$ ,  $K_E \gg R \frac{f_{res}}{K_T}$  et donc  $K_E K_T \gg R f_{res}$

On peut en déduire que  $\frac{R f_{res}}{K_T K_E + R f_{res}} \ll 1$

**Question 42.** Donner une approximation des valeurs numériques de  $k_m$ ,  $\alpha$ ,  $\tau_m$  et  $\tau_e$ .

Comparer  $(\tau_m + \alpha \tau_e)$  et  $(\tau_m + \tau_e)$ .

Les valeurs numériques des différents coefficients sont :

$$k_m = 0,6 \text{ rad. (V. s)}^{-1}$$

$$\alpha = 0,1$$

$$\tau_m = 0,02 \text{ s}$$

$$\tau_e = 0,001 \text{ s}$$

$$\tau_m + \alpha \tau_e = 20,1 \cdot 10^{-3} \text{ s et } \tau_m + \tau_e = 21 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

L'écart relatif entre les deux valeurs est inférieur à 5%

**Question 43.** Dédurre des trois questions précédentes que  $H_m$  peut être approchée par :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{k_m}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_e p)}$$

Comme

$$\frac{k_m}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_e p)} = \frac{k_m}{1 + (\tau_e + \tau_m) p + \tau_m \tau_e p^2}$$

On a vu question 42 que  $\tau_e + \tau_m \approx \tau_m + \alpha \tau_e$  et on peut donc considérer que la fonction de transfert proposée est une bonne approximation de la fonction, de transfert réelle  $H_m(p)$

### Modélisation électro-mécano-thermique de l'ensemble {chambre+moteur+compresseur}

Les blocs représentant les comportements individuels de la chambre et de l'ensemble {moteur + compresseur} étant connus, l'objectif est maintenant de caractériser la réponse de l'ensemble complet à un signal de commande ou à une perturbation associée à des variations de la température extérieure.

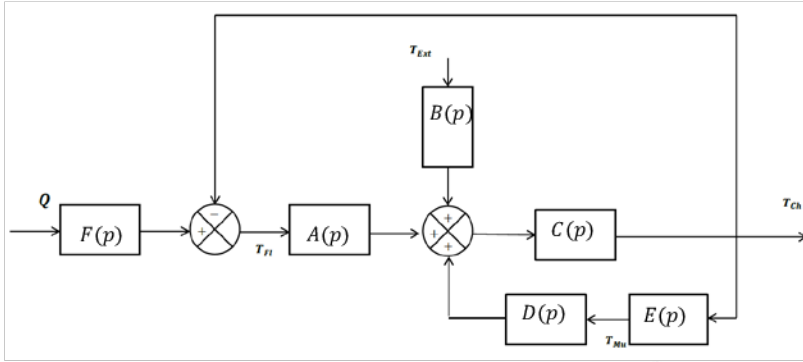
**Question 44.** Établir, dans le domaine de Laplace, les fonctions de transfert liant les deux entrées  $U_m(p)$  et  $T_{Ext}(p)$  à  $T_{Ch}(p)$ . Le résultat sera mis sous la forme suivante :

$$T_{Ch}(p) = H_1(p) \cdot U_m(p) + H_2(p) \cdot T_{Ext}(p),$$

Où  $H_1(p)$  correspond à la fonction de transfert de réglage et  $H_2(p)$  la fonction de transfert de perturbation. Simplifier le résultat en considérant  $\frac{\rho_{Mu}}{\rho_{Ext}} \ll 1$ .

On utilise le fait que :  $Q(p) = P_{th} \cdot \Omega_m(p)$

Par lecture du schéma simplifié ci-dessous (le signe dans le premier sommateur est modifié afin de coller aux équations fournies. Il est à noter qu'un candidat utilisant le schéma fourni obtiendra un résultat faux).



$$T_{Ch}(p) = P_{th} H_m F \cdot \frac{AC}{1 - AC - CDE} U_m(p) + \frac{BC}{1 - AC - CDE} T_{Ext}$$

En remplaçant par les valeurs :

$$T_{Ch}(p) = P_{th} \frac{k_m}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_e p)} \frac{\frac{R_{ChEq}}{R_{ChFl}} (1 + \tau_{Mu} p)}{(1 + \tau_{Ch} p)(1 + \tau_{Mu} p) - \frac{R_{ChEq} \cdot (1 + \tau_{Mu} p)}{R_{ChFl}} - \frac{R_{ChEq}}{R_{ChMu}}} U_m(p) + \frac{\frac{R_{ChEq}}{R_{ChExt}} (1 + \tau_{Mu} p)}{(1 + \tau_{Ch} p)(1 + \tau_{Mu} p) - \frac{R_{ChEq} (1 + \tau_{Mu} p)}{R_{ChFl}} - \frac{R_{ChEq}}{R_{ChMu}}} T_{Ext}(p)$$

Pour calculer par la suite la valeur des temps caractéristiques associés à  $H_1(p)$  il faut remettre l'ensemble sous forme canonique. On utilisera le fait que

$$\rho_{Ext} = \frac{R_{ChEq}}{R_{ChExt}}, \rho_{Mu} = \frac{R_{ChEq}}{R_{ChMu}} \text{ et } \rho_{Fl} = \frac{R_{ChEq}}{R_{ChFl}} \text{ avec } \rho_{Ext} + \rho_{Mu} + \rho_{Fl} = 1;$$

$$\text{Soit } 1 - \frac{R_{ChEq}}{R_{ChFl}} - \frac{R_{ChMu}}{R_{ChFl}} = \rho_{Ext} = \frac{R_{ChEq}}{R_{ChExt}}$$

On obtient alors  $H_1(p)$ :

$$H_1(p) = P_{th} \frac{k_m}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_e p)} \cdot \frac{R_{ChEq} (1 + \tau_{Mu} p)}{1 + \frac{\tau_{Ch} + \tau_{Mu} - \rho_{Fl} \tau_{Mu}}{\rho_{Ext}} p + \frac{\tau_{Ch} \tau_{Mu}}{\rho_{Ext}} p^2}$$

$$H_2(p) = \frac{(1 + \tau_{Mu} p)}{1 + \frac{\tau_{Ch} + \tau_{Mu} - \rho_{Fl} \tau_{Mu}}{\rho_{Ext}} p + \frac{\tau_{Ch} \tau_{Mu}}{\rho_{Ext}} p^2}$$

On peut étudier le dénominateur et voir s'il peut se mettre sous la forme d'un produit de premiers ordres.

Numériquement, on obtient :

$$1 + \frac{\tau_{Ch} + \tau_{Mu} - \frac{R_{ChEq} \tau_{Mu}}{R_{ChFl}}}{\rho_{Ext}} p + \frac{\tau_{Ch} \tau_{Mu}}{\rho_{Ext}} p^2 \approx (1 + 1151p)(1 + 338p)$$

Il n'y a pas de pôle dominant évident comme ça et la mise sous la forme d'un produit de premiers ordres demandait beaucoup de calculs. Je ne pense pas que c'était attendu dans le sujet.

Après, on peut prendre l'hypothèse que le pôle dominant ( $\tau=1151$ ) est compensé par le zéro du dénominateur mais bon...

Erreur possible du sujet (ou initiative à prendre par le candidat) : l'expression se simplifie si on considère  $\frac{\rho_{FL}}{\rho_{Ext}} \ll 1$  hors ce n'est pas le cas avec les valeurs numériques du sujet ( $\frac{\rho_{FL}}{\rho_{Ext}} \approx 0,2$ ). On obtient :

$$H_1(p) = P_{th} \frac{k_m}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_e p)} \frac{\frac{\rho_{FL}}{\rho_{Ext}} (1 + \tau_{Mu} p)}{(1 + \tau_{Mu} p)(1 + \tau_{Ch} p)} = P_{th} \frac{k_m}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_e p)} \frac{\frac{\rho_{FL}}{\rho_{Ext}}}{(1 + \tau_{Ch} p)}$$

$$H_2(p) = \frac{1}{(1 + \tau_{Ch} p)}$$

**Question 45.** Calculer les valeurs numériques des temps caractéristiques associés à  $H_1(p)$

Les applications numériques nécessaires donnent :

$$\tau_{Ch} = 300s ; \tau_m \approx 0,67s ; \tau_e = 10^{-3}s$$

Sans la simplification opérée :

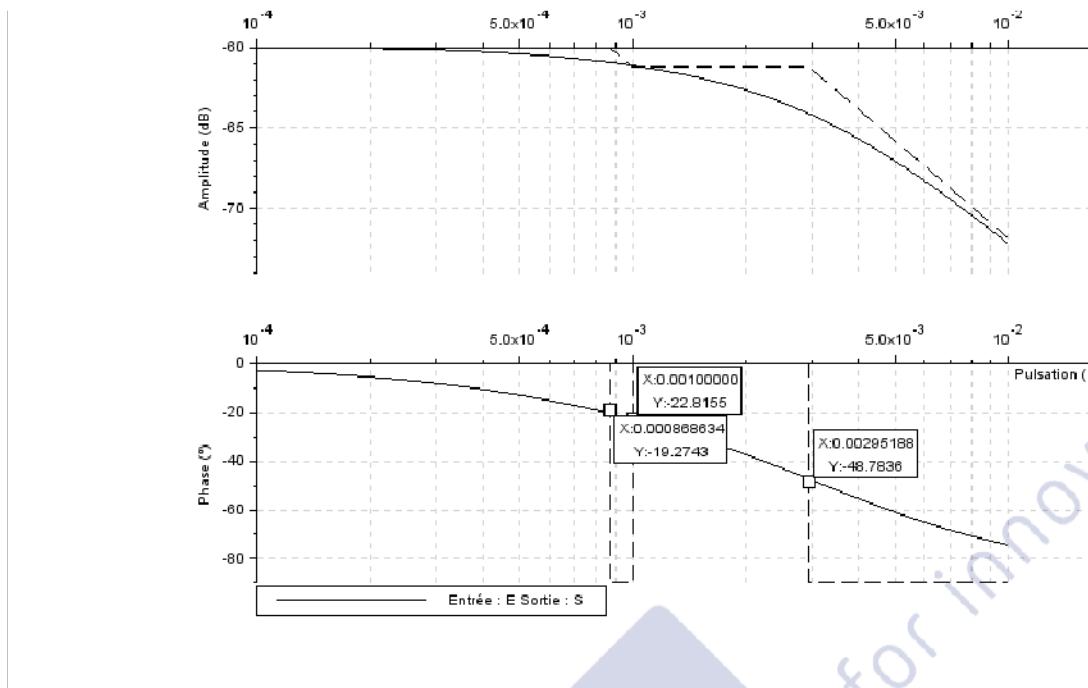
$$\tau_1 = 338s ; \tau_2 = 1151s ; \tau_m \approx 0,67s ; \tau_e = 10^{-3}s$$

**Question 46.** En déduire que  $H_1(p)$  peut être réduite à la fonction de transfert du pôle dominant pour des applications sur des durées de quelques dizaines à quelques milliers de secondes.

En prenant la fonction de transfert simplifiée, on peut répondre directement. Le temps de réponse du moteur est beaucoup plus faible que les temps de réponse des phénomènes thermiques. On peut donc négliger le régime transitoire du moteur sur des études de quelques dizaines à quelques milliers de secondes.

Dans le cas de la fonction de transfert non simplifiée, on peut remarquer la proximité entre la valeur d'un des pôles et le zéro du numérateur.

Visiblement, le sujet attendait une simplification avec le numérateur pour ne conserver que le premier ordre. Si on part sur une analyse fréquentielle, on remarquera que la proximité entre le zéro et le pôle du dénominateur (voir tracé ci-dessous) fait que le comportement est très proche de celui d'un premier ordre sur la gamme de périodes précisées. On peut donc faire l'approximation avec la fonction de transfert du pôle dominant sur la gamme de périodes considérées.



**Question 47.** Le schéma-bloc du système simplifié non-asservi est représenté sur la figure 23. Donner les expressions de  $\tau_1$  et  $K_1$ .

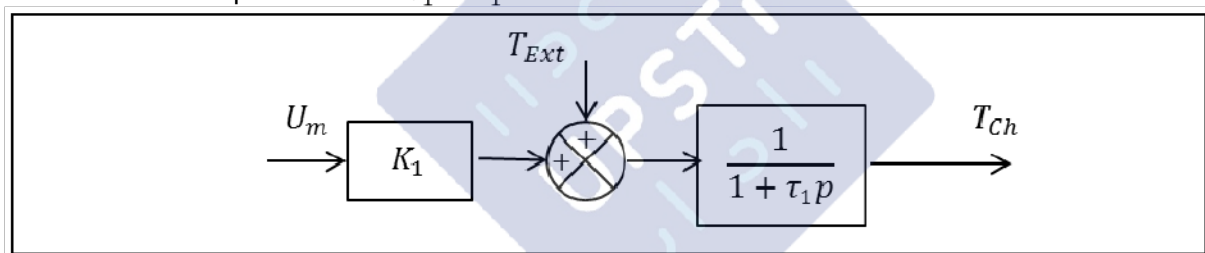


Figure 23 : Schéma-bloc du système simplifié non-asservi

D'après les résultats précédents :

$$K_1 = P_{th} k_M \frac{R_{ChEq}}{\rho_{Ext}} = 36000 \times \frac{2}{3} \times 10^{-3} = 24^\circ/V$$

$$\tau_1 = \tau_{Ch} = 300s$$

ou

$$\tau_1 = 338s \text{ avec le calcul non simplifié.}$$

**Question 48.** Établir la fonction de transfert dans le domaine de Laplace entre la température  $T_{Ch}(p)$  de la chambre climatique, la consigne  $T_{C_0}(p)$  et la température extérieure  $T_{Ext}(p)$ . Le résultat sera mis sous la forme suivante :

$$T_{Ch}(p) = H_{pour}(p) \cdot T_{C_0}(p) + H_{reg}(p) \cdot T_{Ext}(p)$$

où  $H_{pour}(p)$  et  $H_{reg}(p)$  désignent respectivement les fonctions de transfert en poursuite et en régulation du système. Chacune sera exprimée en fonction des paramètres du correcteur et du système tels que définis sur la Figure 24.

Le correcteur mis sous forme canonique est :

$$C(p) = \left( \frac{1 + K_i T_i p}{T_i p} \right)$$

En appliquant directement la formule de Black après simplification de la boucle en mettant un retour unitaire ou par lecture du schéma bloc :

$$H_{pour}(p) = \frac{K_{mes} \frac{1 + K_i T_i p}{T_i p} K_1 \frac{1}{1 + \tau_1 p}}{1 + K_{mes} \frac{1 + K_i T_i p}{T_i p} K_1 \frac{1}{1 + \tau_1 p}}$$

Soit après simplification

$$H_{pour}(p) = \frac{K_{mes} K_1 (1 + K_i T_i p)}{(1 + \tau_1 p) T_i p + K_{mes} K_1 (1 + K_i T_i p)}$$

Mis sous forme canonique :

$$H_{pour}(p) = \frac{(1 + K_i T_i p)}{1 + \frac{K_{mes} K_1 K_i T_i + T_i}{K_{mes} K_1} p + \frac{\tau_1 T_i}{K_{mes} K_1} p^2}$$

Pour obtenir  $H_{reg}(p)$ , il suffit de calculer :

$$H_{reg}(p) = \frac{H_{pour}(p)}{K_{mes} K_1 C(p)} = \frac{\frac{T_i}{K_{mes} K_1} p}{1 + \frac{K_{mes} K_1 K_i T_i + T_i}{K_{mes} K_1} p + \frac{\tau_1 T_i}{K_{mes} K_1} p^2}$$

**Question 49.** Préciser l'intérêt d'avoir des gains identiques pour convertir en tensions  $t_{ch}$  et  $t_{co}$

Dans le but d'avoir un asservissement correct du système, on souhaite comparer une image de la température de commande  $t_{co}$  et de la température obtenue  $t_{ch}$  jusqu'à obtenir une erreur nulle ( $t_{co} = t_{ch\infty}$ ). On souhaite donc obtenir un écart  $\varepsilon$  nul ( $U_{co} = U_{ch\infty}$ ), ce qui entraîne ici l'égalité entre le gain de la chaîne de mesure et le gain d'adaptation.

$$t_{co} = t_{ch}$$

**Question 50.** Quelle serait la conséquence d'une absence de correcteur (c'est-à-dire avec  $C(p) = 1$ ) ?

Une absence de correcteur entraînerait ici principalement :

- une erreur dans le suivi de la consigne de température ( $t_{ch\infty} = \frac{K_{mes} K_1}{1 + K_{mes} K_1} t_{co}$ )
- une erreur en régulation (température non maintenue sous l'effet de perturbations extérieures).

De plus, la constante de temps du système serait alors égale à  $\frac{\tau_1}{1 + K_{mes} K_1}$  sans possibilité de réglage.

Le cahier des charges ne peut être respecté sans correction.

**Question 51.** Afin de faciliter le réglage de l'asservissement, on cherche à rendre son comportement aussi proche que possible de celui de systèmes connus. Choisir le temps caractéristique du correcteur  $\tau_i$  pour que le système soit du 1er ordre.

Pour que le système (en boucle fermée) soit du premier ordre, il faut que la boucle ouverte soit du premier ordre.

En récrivant la boucle ouverte (retour unitaire) avec le système présenté figure 24 :

$$FTBO = \frac{1 + K_i T_i p}{T_i p} \cdot \frac{K_1 \cdot K_{mes}}{1 + \tau_1 p}$$

On doit donc vérifier l'égalité  $\tau_1 = K_i T_i$  pour obtenir un système du premier ordre, soit  $T_i = \frac{\tau_1}{K_i}$

$$FTBO = \frac{K_1 \cdot K_{mes}}{\frac{\tau_1}{K_i} p}$$

On peut recalculer alors la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée :



$$FTBF = \frac{1}{1 + \frac{\tau_1}{K_1 \cdot K_{mes} \cdot K_i} p}$$

**Question 52.** Calculer  $K_i$  pour que le temps de réponse à 5% à une consigne de type échelon de température soit égal à  $\tau_{ind} = 130s$ .

$$T_i = \frac{\tau_1}{K_i} \text{ et } \tau_i = K_i T_i = \tau_1$$

En utilisant le fait que le temps de réponse à 5% est égal à  $3\tau$  pour un système du premier ordre :

$$\tau_{ind} = T_{R5\%} = 3 \frac{\tau_i}{K_1 \cdot K_{mes} \cdot K_i}$$

$$K_i = 3 \frac{\tau_1}{K_1 \cdot K_{mes} \cdot \tau_{ind}}$$

AN :  $K_i = 4,5$

**Question 53.** Exprimer la fonction de transfert donnant la tension de commande du moteur  $U_m(p)$  en fonction de la consigne en température  $T_{Co}(p)$ .

Si la consigne en température est trop importante, la tension de commande va saturer, ce que l'on cherche à éviter. Pour étudier ce mécanisme de saturation, on impose ici une consigne  $t_{Co}(t)$  constante.

En reprenant le résultat de la question 48, c'est-à-dire :

$$H_{pour}(p) = \frac{1}{1 + \tau_2 p}$$

On utilise le fait que (lecture du schéma bloc figure 24) :

$$\left. \frac{U_m(p)}{T_{Co}(p)} \right|_{T_{ext}(p)=0} = \frac{H_{pour}(p)(1 + \tau_1 p)}{K_1} = \frac{1/K_1 (1 + \tau_1 p)}{1 + \tau_2 p}$$

**Question 54.** Démontrer que la tension  $u_m(t)$  est maximale pour  $t = 0^+$ .

L'entrée appliquée est un échelon de température de transformée de Laplace  $\frac{t_{Co}}{p}$

$$U_m(p) = \frac{1/K_1 (1 + \tau_1 p) t_{Co}}{1 + \tau_2 p} \frac{1}{p}$$

La transformée inverse de cette expression aura la forme :

$u_m(t) = (A + B e^{-1/\tau_2 t}) u(t)$  avec  $A = \frac{t_{Co}}{K_1}$  et B constante positive (égale à  $\frac{t_{Co}}{K_1} (\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2})$ ) et  $u(t)$  échelon de Heaviside. Cette fonction admet un maximum en  $t = 0^+$ .

La valeur de ce maximum est  $\frac{t_{Co} \tau_1}{K_1 \tau_2}$

**Question 55.** Déterminer la valeur maximale de température de consigne à la limite de saturation de la tension de commande sachant que la saturation intervient pour  $u_m(0^+) = 4,5V$ .

Si la transformée inverse a été calculée pour répondre à la question précédente, un candidat peut poser directement :

$$u_m(0^+) = \frac{t_{Co} \tau_1}{K_1 \tau_2} \text{ soit une valeur maximale de } t_{Co} = u_m(0^+) \times \frac{K_1 \tau_2}{\tau_1} = 10^\circ C$$

Sinon, on applique le théorème de la valeur initiale

$$u_m(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{1/K_1 (1 + \tau_1 p) t_{Co}}{1 + \tau_2 p} \frac{1}{p} = \frac{t_{Co} \tau_1}{K_1 \tau_2}$$

On a travaillé ici (Q54 et Q55) dans les conditions de Heaviside, ce qui revient à dire que la température initiale de la chambre est de  $0^\circ C$ . On peut proposer comme hypothèse que la saturation interviendra si l'écart de température est de  $10^\circ C$  (entre consigne et température initiale de la chambre). Dans d'autres cas (consigne inférieure à la température initiale), cela ne fonctionne plus (si  $u_m(0^+)$  négative par exemple).

**Question 56.** Que se passe-t-il si on impose une consigne de température supérieure à cette valeur ?

Si on impose une consigne de température supérieure à cette valeur :

La tension de commande restera saturée à 4,5V tant que l'écart entre la commande et la température de la chambre restera supérieur à 10°C. Le temps de réponse du système sera donc augmenté.

La consigne de température et la température extérieure sont, pour la question suivante, supposées constantes avec  $t_{Co} = 20^\circ C$  et  $t_{Ext} = -4^\circ C$ .

**Question 57.** Déterminer les valeurs de  $u_m(t)$  et  $t_{ch}(t)$  à l'issue du régime transitoire. A l'issue du régime transitoire (en régime permanent ?) on obtient (en appliquant le théorème de la valeur finale ou directement en utilisant le gain des fonctions de transfert précédentes :

$$u_{m\infty}|_{t_{Ext}=0} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1/K_1 (1 + \tau_1 p) t_{Co}}{1 + \tau_2 p} = \frac{t_{Co}}{K_1}$$

Pour ce qui est de la perturbation, on sait qu'elle sera corrigée par la présence d'un correcteur proportionnel intégral en amont donc sans calcul :

$$u_{m\infty}|_{t_{ch}=0} = 0$$

Donc, au final, on obtient :

$$u_{m\infty} = \frac{t_{Co}}{K_1}$$

$$t_{ch\infty} = t_{Co}$$

**Question 58.** Montrer que, à l'issue du choix des paramètres du correcteur, la fonction de transfert en régulation du système s'écrit sous la forme :

$$H_{reg}(p) = \frac{\tau_2 p}{(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_1 p)}$$

Le correcteur a pour forme :

$$C(p) = \frac{1 + K_i T_i p}{T_i p} \text{ avec la valeur de } K_i = 3 \frac{\tau_1}{K_1 K_{mes} \tau_{ind}} \text{ et } T_i = \frac{\tau_1}{K_i}$$

Soit une forme simplifiée :

$$C(p) = \frac{1 + \tau_1 p}{\frac{\tau_1}{K_i} p}$$

$$\text{On a } \frac{H_{pour}(p)}{K_{mes} K_1 C(p)} = H_{reg}(p)$$

Soit en remplaçant par les valeurs obtenues :

$$H_{reg}(p) = \frac{K_{mes} K_1 K_i / \tau_1}{(1 + \tau_2 p)} \frac{p}{(1 + \tau_2 p)} = \frac{\tau_2 p}{(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_1 p)}$$

**Question 59.** L'évolution temporelle de la température de la chambre climatique est mise sous la forme suivante :

$$t_{ch}(t) = \overline{t_{ch}} + \Delta t_{ch} \sin(\omega t + \varphi)$$

Donner l'expression de  $\overline{T_{Ch}}$ ,  $\Delta T_{Ch}$  et  $\varphi$  en fonction de  $T_{Co}$ ,  $\overline{T_{Ext}}$ ,  $\Delta T_{Ext}$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_1$  et  $\omega$

On demande ici l'étude fréquentielle du système.

L'entrée est une fonction sinusoïdale d'amplitude  $\Delta T_{Ext}$  et on cherche l'amplitude des variations de la sortie.

$\overline{T_{Ch}} = T_{Co}$  d'après les résultats précédents (le système est précis en réponse à un échelon de température et insensible à un échelon de perturbation).

Le module de la fonction de transfert  $H_{reg}$  vaut (en dB) :

$$|H_{reg}(\omega)|_{dB} = 20 \log \tau_2 + 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2} - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2}$$

Où alors calculé directement

$$|H_{reg}(\omega)| = \frac{\tau_2 \omega}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2} \sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2}}$$

Et donc, l'amplitude  $\Delta T_{Ch}$  vaut :

$$\Delta T_{Ch} = \Delta T_{Ext} \frac{\tau_2 \omega}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2} \sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2}}$$

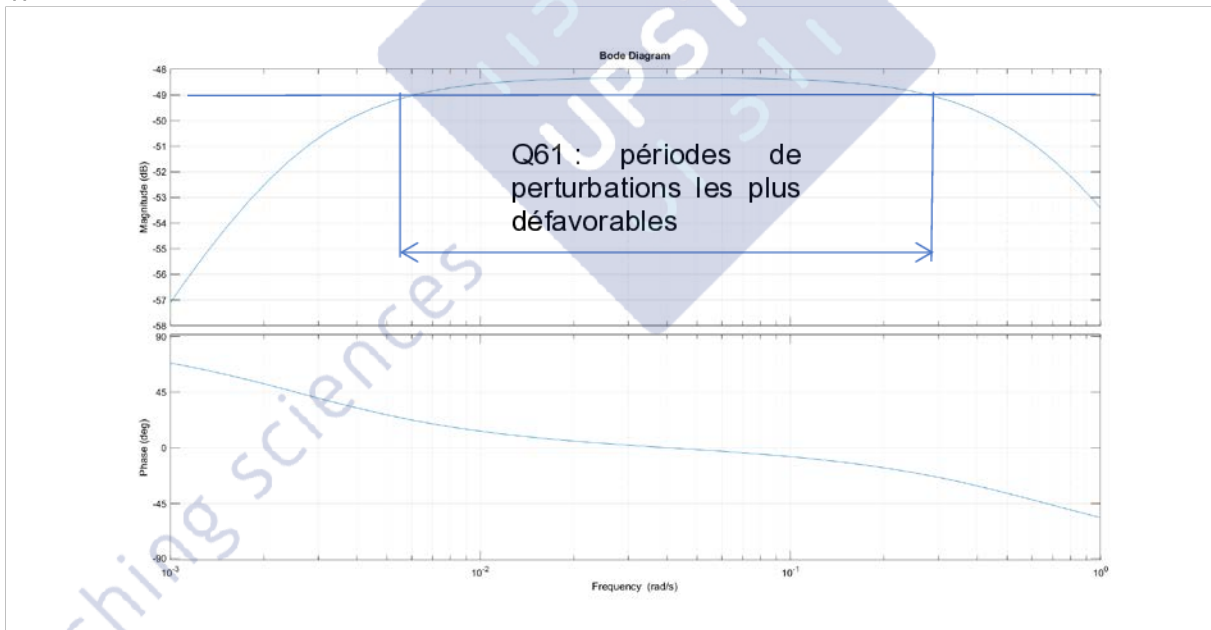
Même raisonnement pour  $\varphi$  :

$$\varphi = \arg(H_{reg}(\omega)) = 90^\circ - \tan^{-1}(\omega \tau_2) - \tan^{-1}(\omega \tau_1)$$

**Question 60.** Construire sur le document réponse DR4 le diagramme asymptotique de Bode en boucle fermée, en gain et en phase, correspondant à l'asservissement en régulation. Diagramme tracé sur le DR :

$$\tau_1 = 390s ; \tau_2 = \frac{\tau_1}{K_1 \cdot K_{mes} \cdot \tau_{ind}} = \frac{390}{20 \times 0,1 \times 130} = 1,5s$$

Le document réponse ne présente que 3 décades, on travaillera donc pour  $\omega$  entre  $10^{-3}$  et 1.



**Question 61.** Représenter sur le diagramme de Bode la gamme des périodes de perturbations qui conduirait aux gains de  $\Delta T_{Ch}$  les plus défavorables pour la régulation. Donner un ordre de grandeur numérique de  $\Delta T_{Ch}$  (en pourcentage de  $\Delta T_{Ext}$ ).

Plage assez large entre  $1/\tau_1$  et  $1/\tau_2$  environ.

L'atténuation est de -48dB sur cette plage environ (-48.2 par calcul mais sujet sans calculatrice). On sait que l'on est en-dessous de 1% de  $\Delta T_{Ext}$  (atténuation plus grande que 40dB), on peut proposer 0,5% (0.39% par calcul).

**Question 62.** Pour une périodicité des variations de la température extérieure correspondant aux cycles nuit-jour, donner un ordre de grandeur numérique de  $\Delta T_{Ch}$  (en pourcentage de  $\Delta T_{Ext}$ ).

Avec des cycles nuit/jour, la période en  $rad.s^{-1}$  et de  $\frac{2\pi}{24.3600} \approx 7.10^{-5}rad.s^{-1}$

On a une atténuation de 49dB environ pour une période de  $7.10^{-3}rad.s^{-1}$  soit une atténuation de 89dB pour une période de  $7.10^{-3}rad.s^{-1}$ . L'ordre de grandeur de  $\Delta T_{Ch}$  sera de 0,005% de  $\Delta T_{Ext}$  (on a rajouté une atténuation de 40dB au résultat précédent).

**Question 63.** Conclure sur l'amplitude  $\Delta T_{Ch}$  des variations de température dans la chambre et sur l'efficacité de la régulation effectuée par le système.

L'amplitude des variations dans la chambre est négligeable (ordre de grandeur du milli-Kelvin pour des variations de température extérieure de 20 degrés).

**Question 64.** Estimer la marge de phase. Conclure sur la stabilité du système régulé.

La FTBO du système (dans le cas du correcteur choisi précédemment) est un intégrateur: la marge de phase est de  $90^\circ$ , le système est stable.