



Proposition de corrigé

Concours : ICNA

Année : 2011

Filière : -

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

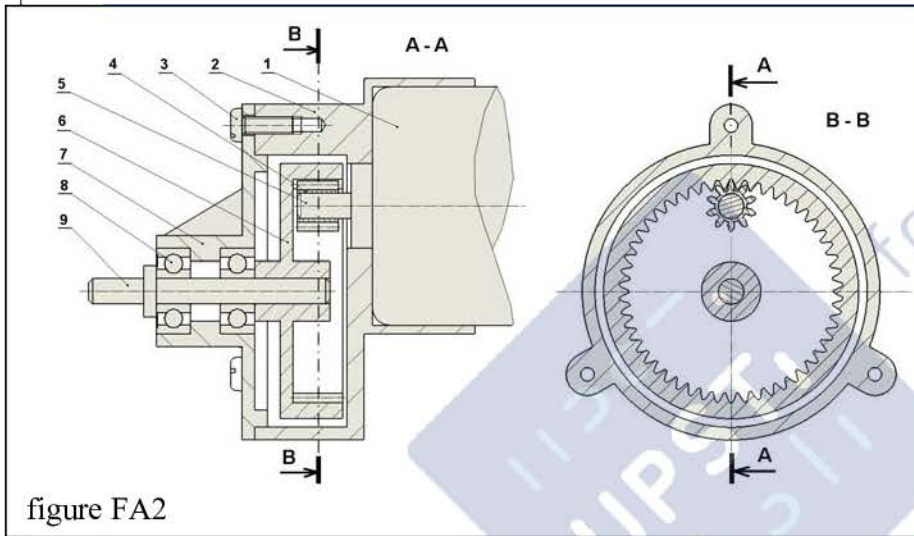
Eléments de corrigé

Etude d'un DRONE QUADRIROTOR

Partie A : Etude préliminaire, choix de la motorisation

A.1 Etude de la solution 1 : réducteur MPJET

La figure FA1 présente une vue 3D du réducteur MPJET ;
la figure FA2 présente une vue en coupe A-A et une vue en section B-B.



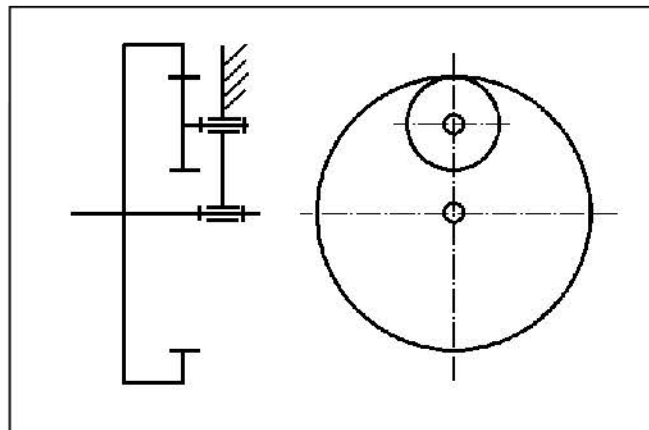
Données :

- trois groupes cinématiques sont identifiés : {Carter}, {Rotor Moteur}, {Arbre de sortie} ;
- certaines liaisons « encastrement » sont réalisées par ajustement « serré ».

Question A1 : Utiliser la numérotation de la figure FA2 pour indiquer les numéros des pièces qui constituent chaque groupe cinématique. Répondre en reproduisant le tableau ci-dessous sur la copie.

	Numéros des pièces
{Carter}	1, 2, 3, 7
{Rotor Moteur}	4, 5
{Arbre de sortie}	6, 9

Question A2 : Tracer en deux vues planes correspondant aux coupes A-A et B-B, le schéma cinématique minimal normalisé de l'ensemble moto-réducteur.



Le tableau TA2 ci-dessous récapitule les caractéristiques des composants.

	Rotor Moteur	Arbre de sortie (avec l'hélice)
Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation (kg.m ²)	$I_m = 1.10^{-6}$	$I_s = 10. 10^{-6}$
Nombre de dents du pignon associé	$Z_m = 10$	$Z_s = 50$
Vitesse de rotation	ω_m	ω_s

Question A3 : Déterminer le rapport de transmission $K1 = \omega_s/\omega_m$ du réducteur MPJET.

$$K1 = \frac{\omega_s}{\omega_m} = \frac{Z_M}{Z_S} = \frac{10}{50} = 0,2$$

Question A4 : Exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble en fonction de la vitesse de rotation ω_m du moteur et de $K1$; en déduire l'expression littérale de l'inertie équivalente I_{eq1} de l'ensemble, ramenée à l'arbre moteur (le carter est considéré fixe).

On exprime l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} I_m.(\omega_m)^2 + \frac{1}{2} I_s.(\omega_s)^2 = \frac{1}{2} (I_m + K1^2.I_s).(\omega_m)^2$

on déduit : $I_{eq1} = I_m + K1^2.I_s$

Question A5 : effectuer l'application numérique pour donner la valeur de I_{eq1} .

$$I_{eq1} = 10^{-6} + (0,2)^2.10^{-5} = 1,4.10^{-6} \text{ kg.m}^2$$

A.2 Etude de la solution 2 : réducteur MULTIPLEX

La figure FA3 montre le réducteur épicycloïdal Multiplex observé axialement ;

La figure FA4 présente le schéma cinématique de ce réducteur, dont un seul satellite est modélisé.

Le planétaire P1 est lié à l'arbre moteur ; le porte-satellites PS est lié à l'hélice ; le planétaire P2 est lié au corps du quadrirotor considéré fixe dans ce paragraphe.

Le tableau TA3 ci-dessous récapitule les caractéristiques des composants.



Figure FA3

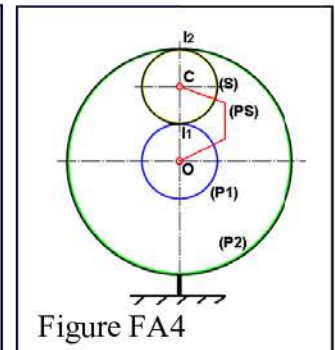


Figure FA4

	Rotor Moteur (P1)	Satellite (S)	Planétaire (P2)	Arbre de sortie avec l'hélice : (PS)
Moment d'inertie Par rapport à l'axe de rotation (kg.m ²)	$I_{P1} = 1.10^{-6}$	$I_s = 7. 10^{-8}$ (au point C)	(fixe)	$I_{PS} = 10. 10^{-6}$
Masse (kg)		$M_s = 4.10^{-3}$		
Nombre de dents	$Z_{P1} = 19$	$Z_s = 12$	$Z_{P2} = 43$	(pas de pignon)
Vitesse de rotation	ω_{P1}	? (questionnaire)	$\omega_{P2} = 0$	ω_{PS}

On pourra utiliser les désignations suivantes pour les démarches de calcul, mais pas dans l'expression finale des résultats.

- RP1 le rayon primitif de la roue (P1) ;
- RP2 le rayon primitif de la roue (P2) ;
- Rs le rayon primitif du satellite.

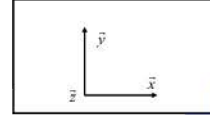
On rappelle que les nombres de dents Z des pignons sont en relation avec leurs rayons primitifs R respectifs par la relation : $2.R = m.Z$; m étant le module de la denture : $m = 0,45$ (en millimètres).

Pour alléger les notations, les vitesses de rotation $\omega_{P1/P2}$ et $\omega_{PS/P2}$ sont notées respectivement ω_{P1} et ω_{PS} .

On s'intéresse tout d'abord à un satellite et à son mouvement

Question A6 : Ecrire la relation de roulement sans glissement en I2 et en déduire l'expression de la vitesse de rotation $\omega_{S/P2}$ en fonction de ω_{PS} et des nombres de dents.

$\vec{V}_{I2,S/P2} = \vec{0}$; développons en utilisant la vitesse du point C :



Utilisons une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur la figure FA4 :

$\vec{V}_{C,S/P2} + I_2 \vec{C} \wedge \vec{\omega}_{S/P2} = \vec{0}$; en utilisant : $\vec{V}_{C,S/P2} = \vec{V}_{C,PS/P2} = \vec{CO} \wedge \vec{\omega}_{PS} = -(Rs + Rp_1) \cdot \omega_{PS} \cdot \vec{x}$
on obtient : $-(Rs + Rp_1) \cdot \omega_{PS} \cdot \vec{x} + (-Rs \cdot \vec{y}) \wedge \omega_{S/P2} \cdot \vec{z} = \vec{0}$

et on déduit : $\omega_{S/P2} = -\frac{Rs + Rp_1}{Rs} \omega_{PS}$ ou encore : $\omega_{S/P2} = -\frac{Zs + Zp_1}{Zs} \omega_{PS}$

Question A7 : Donner l'expression de l'énergie cinétique $Ec(S/p2)$, du satellite S, dans son mouvement par rapport à P2, en fonction de ω_{PS} , des nombres de dents, et des autres données utiles du problème.

Utilisons le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique au point I2 :

$$Ec(S/p2) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{V}_{(S/P2)} \}_{I2} \otimes \{ \mathbf{C}_{(S/P2)} \}_{I2} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \omega_{S/P2} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I2} \otimes \left\{ \begin{matrix} M_2 \cdot \vec{V}_{C,S/P2} \\ \vec{\sigma}_{I2(S/P2)} \end{matrix} \right\}_{I2} = \frac{1}{2} \omega_{S/P2} \cdot \vec{z} \cdot \vec{\sigma}_{I2(S/P2)}$$

$$\text{or : } \vec{\sigma}_{I2(S/P2)} = \vec{\sigma}_{C(S/P2)} + I_2 \vec{C} \wedge M_S \cdot \vec{V}_{C,S/P2} = I_S \cdot \omega_{S/P2} \cdot \vec{z} - R_S \vec{y} \wedge M_S \cdot Rs \cdot \omega_{S/P2} \cdot \vec{x} \\ = (I_S + M_S \cdot Rs^2) \cdot \omega_{S/P2} \cdot \vec{z}$$

$$\text{on obtient : } Ec(S/p2) = \frac{1}{2} (I_S + M_S \cdot Rs^2) \cdot (\omega_{S/P2})^2$$

$$\text{et donc : } Ec(S/p2) = \frac{1}{2} \left[I_S + M_S \cdot \left(\frac{m \cdot Zs}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{Zs + Zp_1}{Zs} \omega_{PS} \right]^2$$

Nota : on pouvait aussi calculer le comoment au point C :

$$Ec(S/p2) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{V}_{(S/P2)} \}_C \otimes \{ \mathbf{C}_{(S/P2)} \}_C = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \omega_{S/P2} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_{C,S/P2} \end{matrix} \right\}_C \otimes \left\{ \begin{matrix} M_S \cdot \vec{V}_{C,S/P2} \\ \vec{\sigma}_{C(S/P2)} \end{matrix} \right\}_C \text{ avec } \vec{\sigma}_{C(S/P2)} = I_S \cdot \omega_{S/P2} \cdot \vec{z}$$

$$Ec(S/p2) = \frac{1}{2} M_S \cdot (\vec{V}_{C,S/P2})^2 + \frac{1}{2} I_S \cdot (\omega_{S/P2})^2 = \frac{1}{2} \left[M_S \cdot (Rs + Rp_1)^2 + I_S \cdot \left(\frac{Rs + Rp_1}{Rs} \right)^2 \right] \omega_{PS}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[M_S \cdot (Rs)^2 + I_S \right] \left[\frac{Rs + Rp_1}{Rs} \right]^2 \omega_{PS}^2 = \frac{1}{2} \left[I_S + M_S \cdot \left(\frac{m \cdot Zs}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{Zs + Zp_1}{Zs} \omega_{PS} \right]^2$$

On s'intéresse maintenant à la loi d'entrée-sortie du train épicycloïdal.

Question A8 : Exprimer le rapport de transmission $K2 = \omega_{sortie} / \omega_{entrée} = \omega_{PS} / \omega_{P1}$, en fonction des nombres de dents $ZP1$ et $ZP2$.

Nota : la démarche pourra être conduite en combinant les relations de roulement sans glissement en I1 et I2, ou bien en écrivant la relation de Willis.

Utilisons la relation de Willis :

$$\frac{\omega_{P1/0} - \omega_{PS/0}}{\omega_{P2/0} - \omega_{PS/0}} = (-1)^1 \frac{Z_{P2}}{Z_{P1}} \quad \text{ou encore :} \quad \frac{\omega_{P1} - \omega_{PS}}{\omega_{P2} - \omega_{PS}} = - \frac{Z_{P2}}{Z_{P1}}$$

ce qui conduit à : $K2 = \omega_{PS}/\omega_{P1} = Z_{P1}/(Z_{P1} + Z_{P2})$

On nomme Σ l'ensemble constitué des solides suivants : { le rotor moteur, les trois satellites, le porte satellite PS avec l'hélice }.

Question A9 : Donner l'expression de l'énergie cinétique $Ec(\Sigma / p2)$;

en déduire l'expression littérale I_{equ2} de l'inertie équivalente de Σ en fonction de ω_{P1} , des nombres de dents et des moments d'inertie $IP1$, I_s , IPS .

$$Ec(\Sigma / p2) = Ec(P1 / P2) + Ec(PS / P2) + 3.Ec(S / P2)$$

$$Ec(\Sigma / p2) = \frac{1}{2}IP1.(\omega_{P1})^2 + \frac{1}{2}IPS.(\omega_{PS})^2 + \frac{3}{2} \left[I_s + Ms. \left(\frac{m.Z_s}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{Z_s + Z_{P1}}{Z_s} \omega_{PS} \right]^2$$

en remplaçant ω_{PS} par son expression en fonction de ω_{P1} , on obtient :

$$Ec(\Sigma / p2) = \frac{1}{2}IP1.(\omega_{P1})^2 + \frac{1}{2}IPS. \left[\omega_{P1} \cdot \frac{Z_{P1}}{(Z_{P1} + Z_{P2})} \right]^2 + \frac{3}{2} \left[I_s + Ms. \left(\frac{m.Z_s}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{Z_s + Z_{P1}}{Z_s} \omega_{P1} \cdot \frac{Z_{P1}}{(Z_{P1} + Z_{P2})} \right]^2$$

d'où l'expression de l'inertie équivalente :

$$I_{equ2} = IP1 + IPS. \left[\frac{Z_{P1}}{(Z_{P1} + Z_{P2})} \right]^2 + 3. \left[I_s + Ms. \left(\frac{m.Z_s}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{Z_s + Z_{P1}}{Z_s} \cdot \frac{Z_{P1}}{(Z_{P1} + Z_{P2})} \right]^2$$

Chaque réducteur étant associé à une motorisation particulière ; le tableau suivant récapitule les caractéristiques de chaque solution.

	Speed400-6V + réducteur MPJET	Speed400-7,2 V + réducteur Multiplex	Hacker A20-54 + prise directe
Régime nominal moteur	18 000 tr/min	17 280 tr/min	9 139 tr/min
Rapport de transmission	K1 = 0,2	K2 = 0,306	K3 = 1
Inertie équivalente (rotor moteur + hélice + réducteur) ramenée à l'arbre moteur	$I_{equ1} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$	$I_{equ2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$	$I3 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$
Couple maximal disponible sur l'arbre moteur	0,04 Nm	0,033 Nm	0,082 Nm

Question A10 : Proposer une démarche commune qui permet de comparer les trois solutions du point de vue de la capacité de chacune à répondre rapidement aux sollicitations d'accélération du drone générées par la commande (le théorème utilisé sera soigneusement précisé) ; mettre cette démarche en application et donner les résultats numériques de l'accélération du moteur puis de l'hélice que l'on peut obtenir dans chaque cas (présenter les résultats dans un tableau).

On utilise le théorème de l'énergie cinétique ; on l'applique à l'ensemble Σ des pièces mobiles de la chaîne cinématique de la motorisation :

$$\frac{d(Ec_{(\Sigma/Rg)})}{dt} = P(stator \rightarrow rotor) ;$$

$$\text{avec : } Ec_{(\Sigma/Rg)} = \frac{1}{2} I_{\text{équi}} \cdot \omega_m^2 \text{ et } P_{(stator \rightarrow rotor)} = C_m \cdot \omega_m$$

$$\text{on obtient : } \dot{\omega}_m = \frac{C_m}{I_{\text{équi}}} \quad \text{et} \quad \dot{\omega}_h = K_i \cdot \dot{\omega}_m$$

	Speed400-6V + réducteur MPJET	Speed400-7,2 V + réducteur Multiplex	Hacker A20-54 + prise directe
$\dot{\omega}_m (rd.s^{-2})$	$\frac{0,045}{1,5 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^4$	$\frac{0,03}{2 \cdot 10^{-6}} = 1,5 \cdot 10^4$	$\frac{0,2}{10 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^4$
$\dot{\omega}_h (rd.s^{-2})$	$0,6 \cdot 10^4$	$0,45 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$

Le moteur brushless Hacker monté en prise directe donne les meilleures performances d'accélération de l'hélice, et donc de mise en place de l'effort sur le drone ; néanmoins l'hypothèse « le couple nominal s'applique instantanément » doit être remplacée par une analyse du comportement du circuit de commande pour que cette affirmation reste pertinente.

Partie B : Etude du décollage

B.1 Linéarisation du modèle du moteur

Question B1 : En posant $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ et $u = u_0 + \delta u$, déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 . Montrer que l'équation différentielle liant $\delta\omega$ et δu est de la forme $\frac{d(\delta\omega)}{dt} = -A\delta\omega + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_Q et ω_0 .

L'équation initiale $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega - k_Q\omega^2 + \frac{k_v}{\tau}u$ devient :

$$\frac{d(\delta\omega)}{dt} = \left(-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_Q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 \right) - \frac{1}{\tau}\delta\omega - 2k_Q\omega_0\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

Equation stationnaire :
$$-\frac{1}{\tau}\omega_0 - k_Q\omega_0^2 + \frac{k_v}{\tau}u_0 = 0$$

Equation différentielle liant $\delta\omega$ et δu :
$$\frac{d(\delta\omega)}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau} + 2k_Q\omega_0\right)\delta\omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u$$

Soit
$$A = \left(\frac{1}{\tau} + 2k_Q\omega_0\right)$$
 et
$$B = \frac{k_v}{\tau}$$

Question B2 : Calculer la fonction de transfert du moteur $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ et donner l'expression de ses paramètres caractéristiques (gain statique G_s et constante de temps T_m) en fonction des paramètres τ , k_v , k_Q et ω_0 .

Par hypothèse : $\delta\omega(0) = 0$, donc $p\Delta\Omega(p) = -A\Delta\Omega(p) + B\Delta U(p)$

$$\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{B}{p+A} = \frac{B}{A} \frac{1}{1+\frac{1}{A}p} = \frac{G_s}{1+T_m p} \text{ avec } G_s = \frac{k_v}{1+2k_Q\omega_0} \text{ et } T_m = \frac{\tau}{1+2k_Q\omega_0}$$

B.2 Recherche du point de fonctionnement ω_0

Question B3 : Ecrire l'équation du mouvement sur l'axe vertical et calculer la poussée F_0 que doit exercer un seul moteur pour maintenir l'appareil en vol stationnaire.

On isole le mini-drone soumis à son poids : $-mg\vec{z}$ et à la poussée des 4 moteurs : $4F_0\vec{z}$

L'équation de résultante en projection sur \vec{z} donne : $4F_0 - mg = m\ddot{z} = 0$ à l'équilibre.

D'où
$$F_0 = \frac{mg}{4}$$
 et
$$F_0 = \frac{0,24 \times 10}{4} = 0,6N$$

Question B4 : Déterminer la vitesse de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire. Vérifier si le critère du cahier des charges sur l'accélération verticale vers le haut et vers le bas est respecté et indiquer pour quelle vitesse moteur ces accélérations maximales sont atteintes.

Par lecture sur la figure FB2, on obtient : $F_0 = 0,6N \Rightarrow \omega_0 = 340 \text{ rad/s}$

D'après l'équation de résultante en projection sur \vec{z} : $\ddot{z} = \frac{4F - mg}{m} = \frac{4F}{m} - g$

Accélération maximale vers le haut : $\frac{\ddot{z}_{\max}}{g} = \frac{4 \cdot 4}{2,4} - 1 = 5,7g \geq 3g$

Accélération minimale vers le bas : $\frac{\ddot{z}_{\min}}{g} = \left| \frac{4 \cdot 0,2}{2,4} - 1 \right| = 0,66g \geq 0,5g$

Donc le cahier des charges est respecté.

\ddot{z}_{\max} est atteinte pour $F_{\max} = \frac{mg}{4}(1+3) = 2,4N \Rightarrow \boxed{\omega_{\max} = 640 \text{ rad/s}}$

\ddot{z}_{\min} est atteinte pour $F_{\min} = \frac{mg}{4}(1-0,5) = 0,3N \Rightarrow \boxed{\omega_{\min} = 250 \text{ rad/s}}$

Question B5 : Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_Q en fonction de a, b et τ . Préciser l'unité des coefficients k_v et k_Q .

D'après l'équation stationnaire : $u_0 = \frac{1}{k_v} \omega + \frac{\tau k_Q}{k_v} \omega^2$ et en identifiant avec la courbe de tendance, on obtient : $\frac{1}{k_v} = b$ et $\frac{\tau k_Q}{k_v} = a$

Donc $\boxed{k_v = \frac{1}{b} \text{ en rad/s/V}}$ et $\boxed{k_Q = \frac{a}{b\tau} \text{ (sans unité)}}$

Ou encore $G_S = \frac{373}{1+6,9} = 47,2 \text{ rad/s/V}$ et $T_m = 0,016 \text{ s}$, d'où $\boxed{\frac{\Delta Q(p)}{\Delta U(p)} = \frac{47,2}{1+0,016p}}$

Pour la suite de l'étude, on retiendra le modèle suivant : $\boxed{\frac{\Delta Q(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}}$

B.3 Schéma-bloc de l'asservissement vertical

Question B6 : Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du mouvement sur l'axe vertical. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

D'après l'équation sur l'axe vertical, $4(F_0 + \delta F) - mg = m \delta \ddot{z}$ ou encore $4\delta F = m \delta \ddot{z}$.

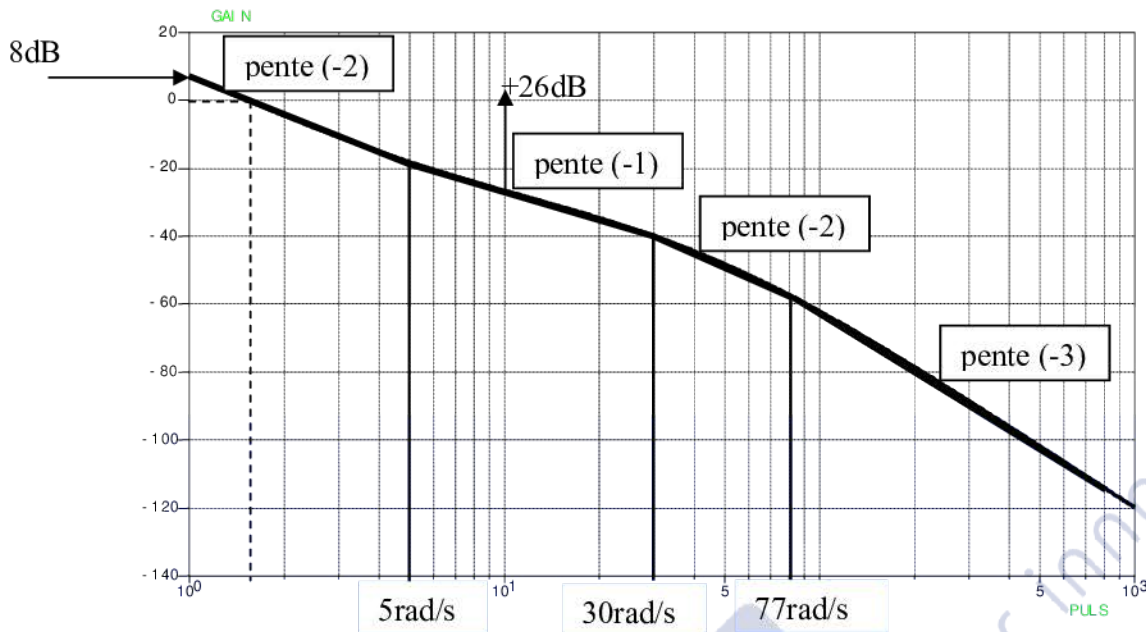
Dans le domaine de Laplace : $4\Delta F(p) = mp^2 \Delta Z(p)$ donc $\boxed{\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}}$

D'où l'expression de la FTBO : $FTBO = 20K(1+Tp) \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}} \frac{4}{mp^2} \frac{0,05}{1 + \frac{p}{30}}$

$$\boxed{FTBO = 2,5K \frac{(1+Tp)}{p^2 \left(1 + \frac{p}{30}\right) \left(1 + \frac{p}{77}\right)}}$$

Question B7 : Représenter le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur ($T=0,2\text{s}$ et $K=1$). Préciser les pentes et les pulsations de brisure du tracé. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad/s, le gain sera compris entre -120dB et +10 dB.

Valeur numérique particulière : $20 \log 2,5 = 8 \text{ dB}$



Question B8 : Justifier que pour $K=1$, $\omega_{0dB} \approx 1,5 \text{ rad/s}$. En déduire la marge de phase pour $K=1$. Commenter.

D'après le tracé asymptotique, lorsque $FTBO=1$, la fonction est équivalente à $FTBO \approx \frac{2,5}{p^2}$.

Donc la pulsation correspondante vérifie : $\frac{2,5}{\omega^2}=1$ ou encore $\omega = \sqrt{2,5} = 1,58 \text{ rad/s} \approx 1,5 \text{ rad/s}$.

Par lecture sur la courbe de phase, le déphasage correspondant à cette pulsation est -170° , soit une marge de phase de 10° , trop faible.

Question B9 : Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer la marge de phase de 35° , conforme au cahier des charges : on utilisera la courbe de phase ci-dessus et les valeurs simplifiées du tracé asymptotique précédent (gain de -20 dB environ pour $\omega=5 \text{ rad/s}$).

Pour la marge de phase de 35° , la phase sera : $-180^\circ + 35^\circ = -145^\circ$

Par lecture sur la courbe de phase, cela correspond à la pulsation 10 rad/s .

A cette pulsation la FTBO est équivalente à $FTBO \approx \frac{2,5K}{p^2} (1+0,2p)$

soit $|FTBO(10 \text{ rad/s})| \approx \frac{2,5K}{10^2} \sqrt{1+(0,2 \cdot 10)^2}$

$|FTBO(10 \text{ rad/s})|=1$ pour $K = \frac{10^2}{2,5\sqrt{5}} = 17,9$ soit environ 25 dB , cohérent avec le tracé asymptotique précédent : entre 5 et 10 rad/s la pente (-1) est de -6 dB/octave donc le gain à 10 rad/s sera de -26 dB environ.

Question B10 : Le critère de précision de l'extrait du cahier des charges est-il vérifié ? Justifier.

Le critère de précision est vérifié. Il n'y a pas d'écart statique car le système est de classe 2 en boucle ouverte (double intégrateur).

Question B11 : *Quels est(sont) le(s) pole(s) dominant(s) et déterminer la(leur) valeur(s) numérique(s).*

Les pôles dominants sont les plus proches de l'axe imaginaire, il s'agit des 2 pôles complexes conjugués : $p_3 = -5 + 8j$ et $p_4 = -5 - 8j$

Question B12 : *Calculer l'expression littérale des pôles d'un système élémentaire du second ordre de pulsation propre ω_0 et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire la présence ou l'absence d'oscillations de la réponse du mini-drone lors d'un décollage, supposé modélisé par un échelon d'entrée d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il complètement vérifié ?*

Pour $H(p) = \frac{G}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ les pôles vérifient : $1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} = 0$

$$\Delta = \frac{\xi^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\xi^2 - 1}{\omega_0^2} \text{ négatif si } \xi < 1. \quad \boxed{p_{1/2} = -\xi\omega_0 \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_0}$$

Les pôles p_3 et p_4 correspondent à $\xi = 0,6$ (lecture sur les droites d'iso-amortissement), donc de faibles oscillations sont prévisibles.

Estimation du premier dépassement : $D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{5\pi}{8}} = 0,14 > 0,05$ critère de stabilité non vérifié. Ou encore, la valeur limite pour un dépassement de 5% est $\xi = 0,7$, or le coefficient d'amortissement est ici inférieur à cette valeur limite.

Question B13 : *Après avoir estimé la pulsation propre associée au(x) pole(s) dominant(s), déterminer si le critère de rapidité est vérifié ?*

Par identification, on obtient pour les pôles dominants $\xi\omega_0 = 5$ soit $\omega_0 = \frac{5}{\xi} = \frac{5}{0,6} = 8,33 \text{ rad/s}$

$$\boxed{t_{5\%} = \frac{5}{\omega_0} = \frac{5}{8,33} = 0,6 \text{ s}} \text{ critère de rapidité juste vérifié}$$

Partie C : Etude du basculement selon l'axe de roulis

L'objectif de cette partie est d'étudier le comportement du quadrirotor lors du basculement autour de l'axe \vec{x} de Roulis (moteurs F2 et F4 actifs – figure page1).

Le réglage des différents constituants de la boucle d'asservissement nécessite de tester les solutions sur un support fixe ; pour cela il a été construit un support appelé « balançoire » (photo figure FC1).

C'est sur cette balançoire que seront réalisés les expérimentations dont les résultats seront analysés.



Figure FC1

C.1 Etude dynamique du basculement

L'objectif de l'étude est de quantifier l'importance des effets dynamiques lors des changements d'inclinaison selon l'axe \vec{x} de roulis, et en particulier d'analyser le phénomène de couple gyroscopique.

Le schéma paramétré du dispositif est fourni figure FC2.

On travaillera dans un premier temps sur l'ensemble $\{E2\} = \{ \text{hélice 2} + \text{rotor moteur 2} \}$, puis sur l'ensemble $\{E4\} = \{ \text{hélice 4} + \text{rotor moteur 4} \}$ dont les caractéristiques inertielles sont identiques à celles de $\{E2\}$, et enfin on y adjoindra la structure $\{S1\} = \{ \text{bras} + \text{stator moteur 2} + \text{stator moteur 4} \}$ qui comprend le bras reliant les deux moteurs et les stators de chaque moteur ; $\{S1\}$ est en liaison pivot d'axe $O\vec{x}$ par rapport au support fixe $\{S0\}$; les frottements de cette liaison sont négligeables ; O est le centre de gravité de $\{S1\}$. On appelle « balançoire » l'ensemble $\{B\} = \{E2\} + \{E4\} + \{S1\}$; son centre de gravité est O.

On note

$$R_0 = (0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

Le repère fixe galiléen de référence, lié au support fixe $\{S0\}$.

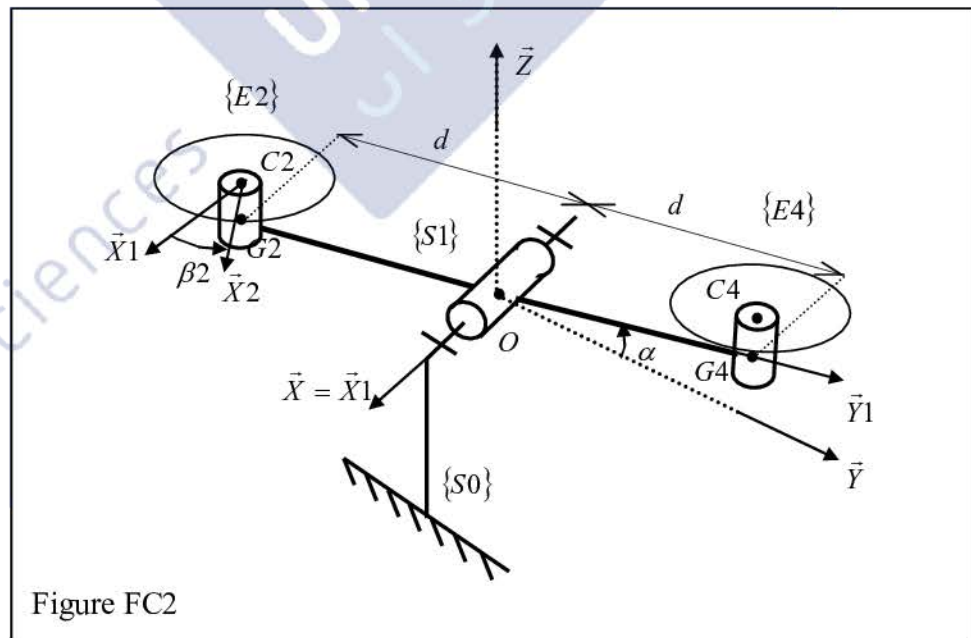


Figure FC2

Les différentes bases et les paramètres angulaires sont récapitulés figure FC3 :

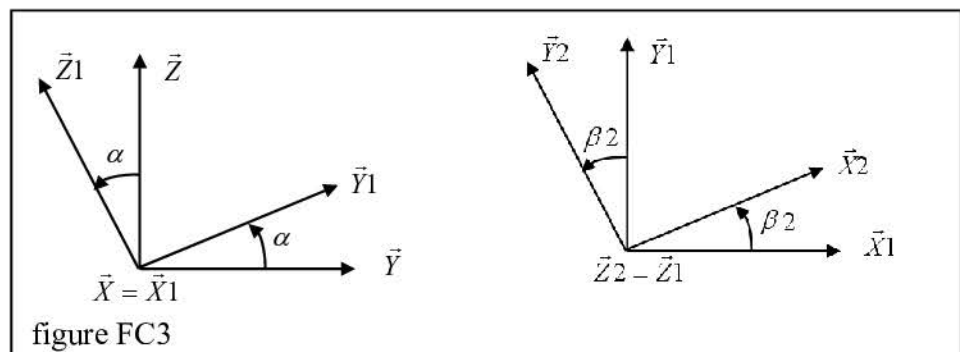
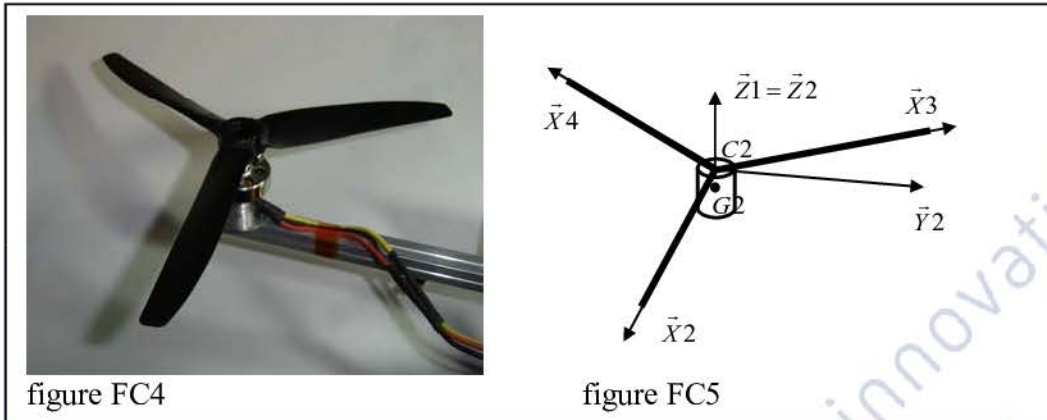


figure FC3

Pour $\{E2\}$, l'hélice est un modèle tripale (figure FC4) de centre $C2$ et dont les pales sont orientées à 120° les unes des autres.

Le rotor moteur sur lequel l'hélice est fixée est considéré comme un cylindre homogène ; la masse de l'ensemble $\{E2\} = \{ \text{hélice} + \text{rotor moteur} \}$ est notée : m ; le centre de masse de l'ensemble est G_2 situé sur l'axe $C_2\vec{Z}_1$; la masse de l'hélice seule est notée m_h .



On donne la matrice d'inertie de cet ensemble $\{E2\}$:

$$I_{G_2(E2)} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} (G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$$

Question C1 : Indiquer quelle est la particularité géométrique qui permet de dire que $I_{xy} = 0$ et $I_{yz} = 0$.

Le plan $(G_2, \vec{X}_2, \vec{Z}_2)$ est plan de symétrie.

Question C2 : démontrer que $I_{xz} = 0$ et que $I_{xx} = I_{yy}$ (on pourra considérer les pales comme des tiges rectilignes de directions respectives : $C_2\vec{X}_2$, $C_2\vec{X}_3$, $C_2\vec{X}_4$, (figure FC5) et raisonner séparément sur le rotor cylindrique et l'hélice).

La matrice d'inertie de l'hélice est la somme de la matrice d'inertie du rotor et de celle des pales ; démontrons donc la propriété sur le rotor, puis sur les pales.

Cas du rotor :

Le rotor est un solide de révolution, pour lequel :

- l'axe z est axe principal d'inertie, et donc $I_{xz} = 0$
- les axes x et y sont interchangeables sans modification de la disposition de la matière, donc $I_{xx} = I_{yy}$.

Cas des pales :

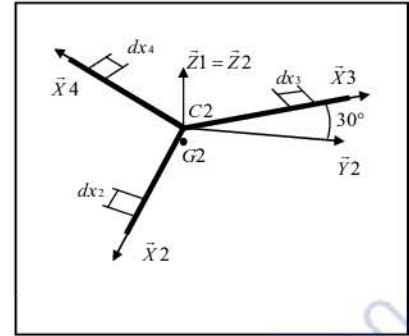
- montrons que $I_{xz} = 0$; pour cela plaçons nous au point $C2$:

Les plans $(C_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_2)$ et $(C_2, \vec{X}_2, \vec{Z}_2)$ sont plans de symétrie, donc la matrice en $C2$ est diagonale et $I_{xz}_{C2} = 0$;

en appliquant le théorème de Huygens (matriciel) on a : $I_{xz}_{G2} = I_{xz}_{C2} + m_h \cdot x_{G2C2} \cdot z_{G2C2}$;
or $x_{G2C2} = 0$ donc $I_{xz}_{G2} = I_{xz}_{C2} = 0$

- montrons que $I_{xx} = I_{yy}$; pour cela plaçons nous au point $C2$:

Considérons des éléments différentiels de longueur dx_2, dx_3, dx_4 respectivement sur chacune des pales $C_2 \vec{X}_2$, $C_2 \vec{X}_3$ et $C_2 \vec{X}_4$.



$$\begin{aligned} I_{xx} C_2 &= I_{xx} C_2(\text{pale2}) + I_{xx} C_2(\text{pale3}) + I_{xx} C_2(\text{pale4}) \\ &= \int_{p_2} (y^2 + z^2) \mu_l dx_2 + \int_{p_3} (y^2 + z^2) \mu_l dx_3 + \int_{p_4} (y^2 + z^2) \mu_l dx_4 \\ &= 0 + \int_{p_3} (x_3 \cos 30) ^2 \mu_l dx_3 + \int_{p_4} (-x_4 \cos 30) ^2 \mu_l dx_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yy} C_2 &= I_{yy} C_2(\text{pale2}) + I_{yy} C_2(\text{pale3}) + I_{yy} C_2(\text{pale4}) \\ &= \int_{p_2} (x^2 + z^2) \mu_l dx_2 + \int_{p_3} (x^2 + z^2) \mu_l dx_3 + \int_{p_4} (x^2 + z^2) \mu_l dx_4 \\ &= \int_{p_2} (x_2^2) \mu_l dx_2 + \int_{p_3} (-x_3 \sin 30) ^2 \mu_l dx_3 + \int_{p_4} (-x_4 \sin 30) ^2 \mu_l dx_4 \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $x_2 = x$; $x_3 = x$; $x_4 = x$; x variant de 0 à ℓ
 $dx_2 = dx$; $dx_3 = dx$; $dx_4 = dx$; et on obtient :

$$\begin{aligned} I_{xx} C_2 &= \int_0^\ell 2 \cdot (x \cos 30) ^2 \mu_l dx = \int_0^\ell \frac{3}{2} x^2 \mu_l dx = \frac{1}{2} \mu_l \ell^3 \\ I_{yy} C_2 &= \int_0^\ell (x^2 + 2(x \sin 30) ^2) \mu_l dx = \int_0^\ell (x^2 + \frac{1}{2} x^2) \mu_l dx = \int_0^\ell \frac{3}{2} x^2 \mu_l dx = \frac{1}{2} \mu_l \ell^3 \end{aligned}$$

Ce qui montre que $I_{xx} C_2 = I_{yy} C_2$;
 En utilisant le théorème de Huygens pour exprimer ces moments d'inertie au point G2, on ajoute une quantité identique pour les deux termes et on obtient : $I_{xx} G_2 = I_{yy} G_2$.

On admettra sans démonstration que la matrice $I_{G_2(E_2)}$ de {E2} est identique dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ et dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

On utilisera pour la suite la matrice d'inertie de l'ensemble {E2} suivante :

$$I_{G_2(E_2)} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} (G_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

au point G₂, exprimée dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

On donne : $\vec{OG}_2 = -d \cdot \vec{Y}_1$ avec $d = 0,2 \text{ m}$

Question C3 : donner l'expression analytique au point O, du moment cinétique $\vec{\sigma}_{O(E_2/R_0)}$ de {E2} dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O(E_2/R_0)} &= \vec{\sigma}_{G_2(E_2/R_0)} + \vec{OG}_2 \wedge m \vec{V}_{G_2, E_2/R_0} \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} + (-d \cdot \vec{Y}_1) \wedge m (-d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{Z}_1) \\ &= (I_{xx} + m \cdot d^2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + I_{zz} \cdot \dot{\beta}_2 \cdot \vec{z}_1 \end{aligned}$$

Question C4 : donner l'expression analytique au point O, du moment dynamique $\vec{\delta}_{O(E_2/R_0)}$ de {E2} dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{O(E2/R_0)} &= \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{O(E2/R_0)}) \quad (\text{pas de terme complémentaire car O est un point fixe}). \\ &= (I_{xx} + m.d^2).\ddot{\alpha}.\vec{x}_1 - I_{zz}.\dot{\beta}_2.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + I_{zz}.\ddot{\beta}_2.\vec{z}_1\end{aligned}$$

Question C5 : Identifier dans l'expression du moment dynamique, chacun des termes associés aux dénominations suivantes :

R = « moment des effets dynamiques selon l'axe de Roulis » ;

L = « moment des effets dynamiques selon l'axe de Lacet » ;

C = « moment des effets dynamiques de Coriolis » ou « couple gyroscopique ».

R est la projection sur l'axe \vec{x}_1 de roulis : $R = (I_{xx} + m.d^2).\ddot{\alpha}$

L est la projection sur l'axe \vec{z}_1 de lacet : $L = I_{zz}.\ddot{\beta}_2$

C est la projection sur l'axe \vec{y}_1 : $C = -I_{zz}.\dot{\beta}_2.\dot{\alpha}$

On donne le moment d'inertie $IS1$ de la structure $\{S1\}$ par rapport à l'axe $O\vec{x}$.

Question C6 : Donner l'expression analytique du moment dynamique $\vec{\delta}_{O(S1/R_0)}$.

$\{S1\}$ est un solide en rotation autour de l'axe $O\vec{x}_1$ fixe ; donc :

$$\vec{\delta}_{O(S1/R_0)} = IS1.\ddot{\alpha}.\vec{x}_1$$

On utilise l'angle β_4 pour paramétrer la position angulaire de $\{E4\}$ par rapport à $\{S1\}$.

On étudie l'ensemble $\{E4\} = \{\text{hélice 4} + \text{rotor moteur 4}\}$.

La matrice d'inertie de $\{E4\}$ exprimée en $G4$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est identique à la matrice

$$\text{de } \{E2\} \text{ exprimée en } G2 : I_{G_4(E4)} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} (G_4, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \quad ; \text{ On a : } \overrightarrow{OG_4} = +d \cdot \vec{Y}_1$$

Question C7 : à partir des résultats obtenus à la question C4, donner l'expression analytique au point O, du moment dynamique $\vec{\delta}_{O(E4/R_0)}$ de $\{E4\}$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en fonction (entre autre) de l'angle β_4 et de ses dérivées ;

La seule modification à effectuer pour ce calcul est de remplacer l'expression de

$$\overrightarrow{OG_2} = -d \cdot \vec{Y}_1 \text{ par } \overrightarrow{OG_4} = +d \cdot \vec{Y}_1 ; \text{ et } \beta_2 \text{ par } \beta_4 ; \text{ alors :}$$

$$\vec{\delta}_{O(E4/R_0)} = (I_{xx} + m.d^2).\ddot{\alpha}.\vec{x}_1 - I_{zz}.\dot{\beta}_4.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + I_{zz}.\ddot{\beta}_4.\vec{z}_1$$

En déduire l'expression analytique $\vec{\delta}_{O(B/R_0)}$ du moment dynamique de l'ensemble balançoire : $\{B\} = \{E2\} + \{E4\} + \{S1\}$ dans son mouvement par rapport à $\{S0\}$ et exprimer le terme CB = « moment des effets dynamiques de Coriolis » ou « couple gyroscopique » qui s'exerce sur l'ensemble $\{B\}$.

$$\vec{\delta}_{O(B/R_0)} = (2.(I_{xx} + m.d^2) + IS1).\ddot{\alpha}.\vec{x}_1 - I_{zz}.\dot{\beta}_2.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + I_{zz}.\dot{\beta}_4.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + I_{zz}.\ddot{\beta}_2.\vec{z}_1 + I_{zz}.\ddot{\beta}_4.\vec{z}_1$$

$$\text{alors : } CB = -I_{zz}.\dot{\beta}_2.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + I_{zz}.\dot{\beta}_4.\dot{\alpha}.\vec{y}_1$$

On donne les résultantes des actions exercées par l'air sur les hélices H2 et H4, du fait de leur rotation : $\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{z}_1$ et $\vec{F}_4 = F_4 \cdot \vec{z}_1$.

Question C8 : Déterminer l'expression analytique de l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ en fonction de F_2 , F_4 , des éléments inertiels et des distances.

On isole l'ensemble $\{B\} = \{E_2\} + \{E_4\} + \{S_1\}$; Les actions mécaniques appliquées sont :

- les actions exercées par l'air sur les hélices ;
- l'action de la pesanteur (de moment nul car CDG en O) ;
- l'action du support $\{S_0\}$ sur $\{S_1\}$ (de moment nul car liaison 0/1 supposée sans frottement) ;

on utilise l'équation des moments du principe fondamental de la dynamique, en projection sur l'axe \vec{x}_1 : $\Sigma(M_{0,ext \rightarrow \{B\}} \cdot \vec{x}_1) = \vec{\delta}_{O(B/R_0)} \cdot \vec{x}_1$

$$d.F_4 - d.F_2 = (2.(I_{xx} + m.d^2) + IS_1) \cdot \ddot{\alpha}$$

$$d'où : \ddot{\alpha} = \frac{d.(F_4 - F_2)}{2.(I_{xx} + m.d^2) + IS_1}$$

Question C9 : Quel type de mouvement obtient-on pour $\{S_1\}$, si F_2 et F_4 prennent des valeurs constantes différentes l'une de l'autre ?

$\ddot{\alpha}$ est constante ; le mouvement de rotation autour de O \vec{x}_1 est uniformément accéléré.

En déduire l'expression (en fonction de $\ddot{\alpha}$ et du temps t) de la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ et de la position α , si l'on considère les conditions initiales $\dot{\alpha} = 0$ rd/s et $\alpha = 0^\circ$.

$$\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} \cdot t \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{2} \ddot{\alpha} \cdot t^2$$

Pour la suite, dans l'objectif de déterminer la valeur numérique du « couple gyroscopique » CB obtenu question C7 et pour la configuration de mouvement obtenue question C9, on utilise les données numériques suivantes :

$d = 0,2$ m ; $m = 0,04$ kg ; $IS_1 = 64 \cdot 10^{-4}$ kg.m² ;

$$I_{G_4(E_4)} = I_{G_2(E_2)} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} (G_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$$

On se place dans la configuration idéale pour laquelle les moteurs passent instantanément de

la vitesse $\dot{\beta}_2 = \dot{\beta}_4 = 500$ rd/s aux vitesses $\dot{\beta}_2 = 400$ rd/s ; $\dot{\beta}_4 = 600$ rd/s ;

Dans ce cas les efforts F_2 et F_4 prennent les valeurs $F_2 = 0,9$ N et $F_4 = 2,1$ N.

Question C10 : calculer la valeur numérique de l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$; en déduire la valeur du couple gyroscopique CB pour la position $\alpha = 0,5$ radians (28,6°).

$$\ddot{\alpha} = \frac{d.(F_4 - F_2)}{2.(I_{xx} + m.d^2) + IS_1} = \frac{0,2.(2,1 - 0,9)}{2(18 \cdot 10^{-6} + 0,04.(0,2)^2) + 64 \cdot 10^{-4}} = \frac{0,24}{0,0032 + 0,0064} = \frac{24 \cdot 10^{-2}}{96 \cdot 10^{-4}}$$

$$\text{on obtient : } \ddot{\alpha} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-2}} = 25 \text{ rd/s}^2$$

$$\text{or } CB = -I_{zz} \cdot (\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_4) \cdot \dot{\alpha}$$

cherrchons la valeur de la vitesse $\dot{\alpha}$ pour $\alpha = 0,5$ radians ($28,6^\circ$),

$$\text{la loi de mouvement nous donne } t = \sqrt{\frac{2\alpha}{\ddot{\alpha}}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = 1/5 = 0,2 \text{ s}$$

$$\text{d'où } \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} \cdot t = 25 \cdot 0,2 = 5 \text{ rd/s}$$

$$\text{alors } CB = -10^{-5} \cdot 1000 \cdot 5 = -0,05 \text{ Nm}$$

Comparer le résultat obtenu avec la valeur du moment Mh généré autour de l'axe \bar{x} de roulis par les actions \vec{F}_2 et \vec{F}_4 des hélices pendant le mouvement de basculement.

Le moment généré autour de l'axe \bar{x} de roulis est :

$$M_h = d \cdot F_4 - d \cdot F_2 = d \cdot (F_4 - F_2) = 0,2 \cdot (1,2) = 0,24 \text{ Nm}$$

Conclure sur l'importance relative du couple gyroscopique lors de l'utilisation du drone et à son influence éventuelle lors des manoeuvres.

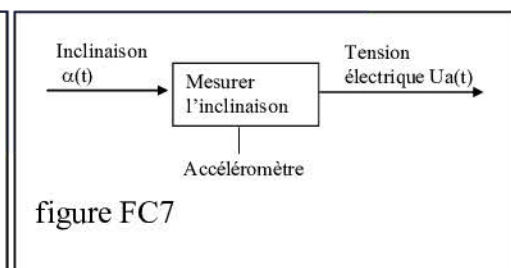
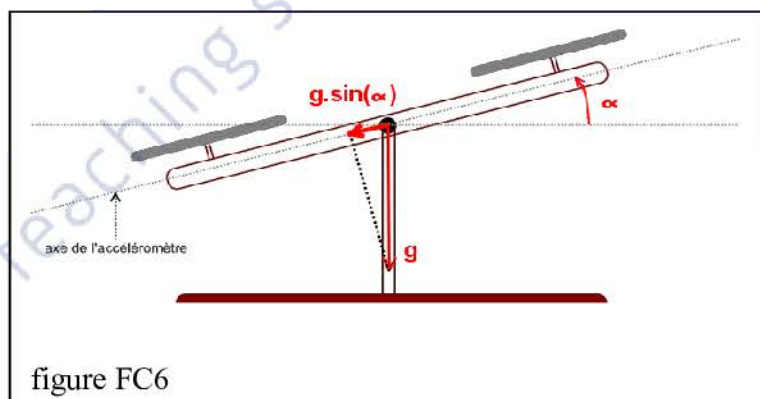
CB est 5 fois plus faible (en valeur absolue) que Mh ; et de plus il est calculé dans des conditions défavorables (accélération angulaire de roulis de 0° jusqu'à $28,6^\circ$) ; néanmoins ce couple peut conduire à une modification de l'angle de tangage simultanément à la manoeuvre de roulis.

C.2 Etude de solutions de Mesure d'inclinaison de roulis

L'objectif de cette partie est d'analyser les performances de capteurs susceptibles de mesurer le roulis. On traitera successivement l'utilisation d'un accéléromètre, puis d'un gyromètre ; à chaque fois on étudiera une solution corrective qui minimise les défauts inhérents à chaque capteur, et enfin on traitera une solution qui rassemble les deux capteurs en exploitant chacun d'eux dans son domaine de performance optimale. Un correcteur sera choisi pour régler la boucle d'asservissement.

C2.1 Mesure de l'angle de roulis par un accéléromètre.

Les figures FC6 et FC7 présentent le principe de l'utilisation de l'accéléromètre pour mesurer l'angle d'inclinaison de roulis.



On donne certaines des caractéristiques de l'accéléromètre ADXL 322 (Analog device)

Etendue de mesure	+ ou - 2 g (g = accélération de la pesanteur)
Bande passante à -3 dB	$f_a = 1,6 \text{ kHz}$ ou $\omega_{0a} = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$
Sensibilité	420 mV/g (g = accélération de la pesanteur)

On choisit de caractériser l'accéléromètre par un modèle du premier ordre de fonction de transfert $Fa(p) = \frac{Ka}{1+Ta.p}$. On considère que l'angle α reste petit ; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Question C11 : donner les valeurs des grandeurs Ka et Ta dans les unités du système international (SI) que l'on précisera.

La sensibilité de l'accéléromètre est de $420 \cdot 10^{-3}$ Volts pour 10 m.s^{-2} .

Donc si acc(t) est l'accélération qu'il subit : $Ua(t) / \text{acc}(t) = 420 \cdot 10^{-4} \text{ V}/(\text{m.s}^{-2})$

Sa mesure d'accélération en fonction de α donne $\text{acc}(t) = g \cdot \sin(\alpha(t))$

ou : $\text{acc}(t) = 10 \cdot \alpha(t)$ pour α petit.

Donc : $\text{acc}(t) / \alpha(t) = 10$ (en $\text{m.s}^{-2} \cdot \text{rd}^{-1}$)

Donc : $Ua(t) / \alpha(t) = [Ua(t) / \text{acc}(t)] \cdot [\text{acc}(t) / \alpha(t)] = 420 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{rd}^{-1}$

Alors : $Ka = 0,42 \text{ V} \cdot \text{rd}^{-1}$

La bande passante à -3dB est $\omega_{0a} = 10^4 \text{ rd.s}^{-1}$ qui est aussi la pulsation de cassure (diagramme de Bode) ; alors la constante de temps est : $Ta = 1/\omega_0 = 10^{-4} \text{ s}$.

$$Fa(p) = \frac{Ka}{1+Ta.p} = \frac{0,42}{1+10^{-4}.p}$$

L'utilisation d'un accéléromètre pour mesurer le roulis est assortie d'un inconvénient : une accélération ou une vibration du drone risque d'être perçue comme une inclinaison de celui-ci. Pour pallier cet inconvénient, on installe un filtre passe-bas du premier ordre, de fonction

de transfert $Ffa(p) = \frac{1}{1+2.p}$ en sortie de l'accéléromètre dont la constante de temps est

suffisamment grande pour que le système ne prenne pas en compte les phénomènes rapides d'accélération ou de vibration.

Question C12 : Donner la fonction de transfert Fma(p) de l'ensemble Accéléromètre + filtre ; donner une expression simplifiée qui ne conserve que le pôle dominant ; en déduire la constante de temps (tma), puis le temps de réponse à 5% (tr1) de l'ensemble accéléromètre+filtre.

La fonction de transfert de l'ensemble accéléromètre + filtre est :

$$Fma(p) = \frac{420 \cdot 10^{-3}}{1+10^{-4}.p} \cdot \frac{1}{1+2.p} = \frac{0,42}{(1+10^{-4}.p).(1+2.p)}$$

on conserve la constante de temps la plus grande (2) qui correspond au pôle dominant :

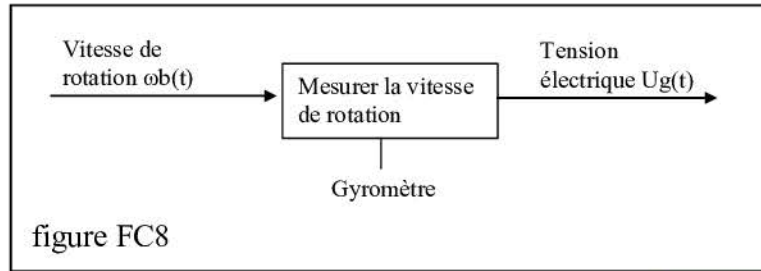
$$Fma(p) = \frac{0,42}{1+2.p}$$

d'où la nouvelle constante de temps de l'ensemble Accéléromètre + filtre : $tma = 2\text{s}$

donc $tr1 = 3 \cdot tma = 6\text{s}$.

C2.2 Mesure de l'angle de roulis par un gyromètre.

Pour améliorer le temps de réponse du système, on se propose d'utiliser un gyromètre. La fonction globale du gyromètre est décrite par le diagramme d'analyse fonctionnelle figure FC8 : l'entrée est la vitesse angulaire $\omega b(t)$ de la balançoire ; la sortie est une tension $Ug(t)$



On donne certaines des caractéristiques du gyromètre MLX90609 (Melexis)

Etendue de mesure	+ ou - 300 °/s
Bande passante à -3 dB	75 Hz
Sensibilité	6,67 mV/°/s (ou 0,382 V.rad ⁻¹ .s)
Tension de sortie au repos : Ug ₀	2,5 V à 25°C (selon température : min : 2,45 V ; max : 2,55 V)

On propose la fonction de transfert $Fg(p) = \frac{Kg}{1 + Tg.p}$ pour caractériser ce gyromètre.

Question C13 : sachant que les fréquences maximales que le gyromètre devra traiter pour le contrôle de l'angle de roulis sont de l'ordre de 5 Hz ; donner une expression simplifiée de Fg(p) ; préciser la (les) valeur(s) numérique(s).

La bande passante du gyromètre est très élevée par rapport aux fréquences qu'il devra traiter ; en conséquence il restitue sans déphasage le signal qu'il reçoit et se comporte donc comme un gain pur :

$$Fg(p) = Kg \quad \text{avec } Kg = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ V/°/s ou } 0,382 \text{ V.rad}^{-1}.s$$

Dans un but de simplification, dans la suite, on ne fera pas de différence entre les grandeurs analogiques et les grandeurs numériques issues du traitement réalisé par les convertisseurs analogiques/numériques du drone.

Le micro-contrôleur qui gère le fonctionnement a besoin de connaître la position angulaire et non la vitesse de rotation.

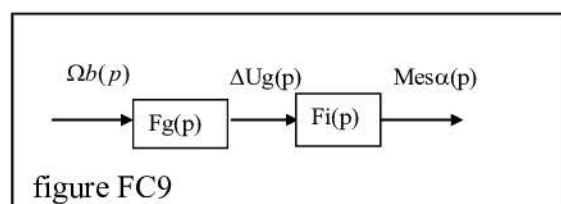
Soit Mes α la mesure de la position angulaire α . Pour obtenir cette mesure de position, le micro-contrôleur effectue les deux opérations suivantes :

- 1- il calcule l'écart $\Delta Ug(t) = Ug(t) - Ug_0$ (Ug_0 : tension de sortie au repos) ;
- 2- il calcule l'angle $Mes\alpha(t) = \int_0^t \Delta Ug(\tau) d\tau$

Le tableau ci-dessous présente les notations des transformées de Laplace des différentes grandeurs :

Grandeur	$\omega b(t)$	$\Delta Ug(t)$	Mes $\alpha(t)$
Transformée de Laplace	$\Omega b(p)$	$\Delta Ug(p)$	Mes $\alpha(p)$

Le schéma-bloc associé au fonctionnement du gyromètre et du micro-contrôleur est alors donné par la figure FC9 :



Question C14 : Donner l'expression de $\frac{Mes\alpha(p)}{\Omega b(p)}$.

$Fi(p)$ est une fonction « intégrateur » ; $Fi(p) = 1/p$

Donc : $\frac{Mes\alpha(p)}{\Omega b(p)} = Kg / p$

Sur le système balançoire, on a réalisé un mouvement en créneau unitaire de vitesse angulaire (figure FC10) :

- $\alpha(t) = \omega b(t) = 0$ pour $t < 0$;
- $\alpha(t) = \omega b(t) = 1^\circ/s$ pour $0 < t < 1s$;
- $\alpha(t) = \omega b(t) = 0$ pour $t > 1s$.

Question C15 : Calculer dans le domaine temporel la valeur de $Mes\alpha(t)$ en volts, pour $t = 1s$.

Donner la valeur de $Mes\alpha(t)$ pour $t > 1s$.

$\omega b(t) = 1^\circ/s$ correspond à

$$\Delta U_g(t) = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Intégrons entre 0 et 1s pour obtenir $Mes\alpha(t)$:

$$Mes\alpha(t=1) = \int_0^1 \Delta U_g(\tau) d\tau = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ degrés}$$

pour $t > 1s$, cette valeur reste égale à la valeur obtenue pour $t = 1s$, car on intègre alors une quantité nulle.

On propose un enregistrement de la réponse du système, réalisé avec le gyromètre (figure FC11).

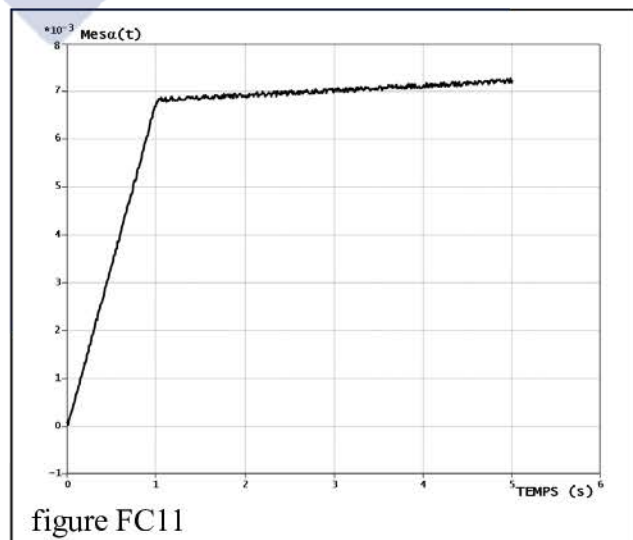
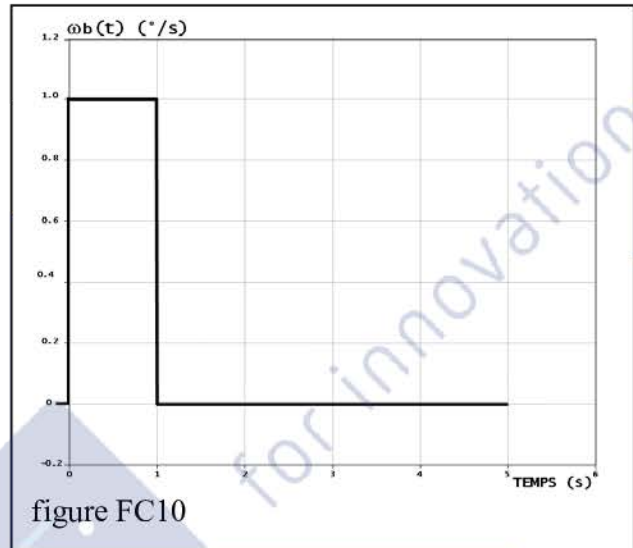
Question C16 : Quel problème identifiez-vous sur cette réponse ?

Expliquez pourquoi le défaut qui correspond à la donnée du constructeur :

« Tension de sortie au repos : $U_{g0} = 2,5 \text{ V}$ à 25°C (selon température : min : $2,45 \text{ V}$; max : $2,55 \text{ V}$) » peut être à l'origine de ce problème.

Pour $t > 1s$, la valeur fournie par le gyromètre ne reste pas constante ;

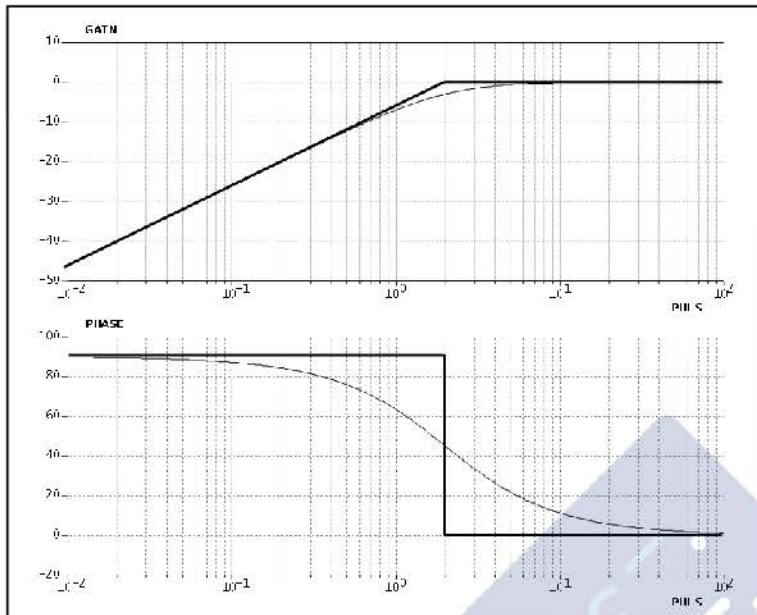
Cela est dû à la variabilité de la tension de sortie au repos qui génère une valeur non nulle qui s'intègre pour générer une valeur non constante de l'angle. C'est la « dérive » du gyromètre.



Pour éviter le problème identifié on propose de placer en série, entre le gyromètre et le micro-contrôleur, un filtre de fonction de transfert $F_{fg}(p) = \frac{T_{fg} \cdot p}{1 + T_{fg} \cdot p}$

Question C17 :

Tracer le diagramme asymptotique de Bode (amplitude et phase) de ce filtre pour $T_{fg} = 0,5$ s.



On rappelle que la transformée de Laplace inverse de $\frac{1}{p+a}$ est : e^{-at} .

On note $u(t)$ la fonction telle que : $u(t) = 0$ si $t < 0$; $u(t) = 1$ si $t \geq 0$.

Question C18 : déterminer l'expression temporelle du signal $s_1(t)$ généré à travers ce filtre par une entrée en rampe : $e_1(t) = tu(t)$ dont la transformée de Laplace est : $E_1(p) = \frac{1}{p^2}$;

$$S_1(p) = \frac{0,5 \cdot p}{1 + 0,5 \cdot p} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{0,5}{p \cdot (1 + 0,5 \cdot p)}$$

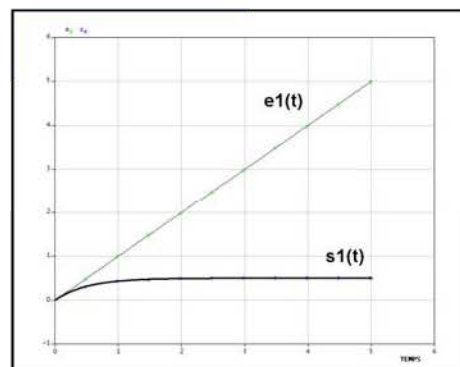
décomposons cette expression en éléments simples :

$$S_1(p) = \frac{0,5}{p} - \frac{0,5}{p + 2}$$

prenons la transformée de Laplace inverse :

$$S_1(t) = 0,5 [u(t) - e^{-2t}]$$

Tracer l'allure de $s_1(t)$ sur une durée de 5 secondes.
 Quel effet bénéfique du filtre peut-on observer par rapport au problème identifié à la question C16 ?



Le filtre supprime la rampe (signal considéré de basse fréquence si sa pente est faible) pour la transformer en une tension proportionnelle à sa dérivée ; cela permet de supprimer la dérive du gyromètre identifiée à la question C16.

Analyse complète de l'effet du filtre : On superpose à l'entrée $e_1(t)$ précédente, un signal sinusoïdal $e_2(t)$ de pulsation 20 rd/s et d'amplitude 0,5 pour obtenir le signal de la figure FC12.

Question C19 :

A partir du tracé du diagramme de Bode du filtre, analyser son influence sur le signal $e_2(t)$; Tracer l'allure de la réponse $s_3(t)$ générée par le signal $e_1(t)+e_2(t)$ à travers le filtre.

Conclure par rapport à la recherche de rapidité dans la réponse du capteur de roulis.

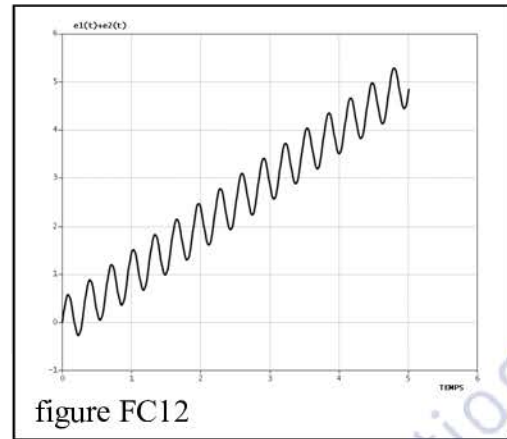


figure FC12

D'après le diagramme de Bode tracé question C17, le rapport d'amplitude du signal sinusoïdal proposé n'est pas modifié par le filtre (le déphasage est aussi peu modifié).

D'après le principe de superposition, il suffit donc d'ajouter la sinusoïde $s_2(t) = e_2(t)$ au signal $s_1(t)$ obtenu question C18 pour obtenir le signal $s_3(t)$. On observe que les signaux de haute fréquence ne sont pas modifiés et ceci permet d'obtenir un capteur qui réagit avec rapidité et qui ne possède plus de « dérive ».

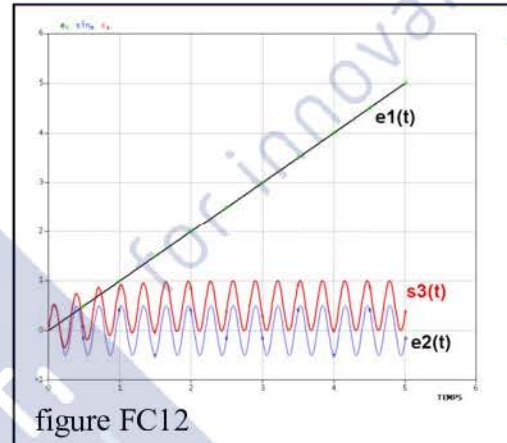


figure FC12

C2.3 Mesure de l'angle de roulis par combinaison des mesures de l'accéléromètre et du gyromètre

On se propose maintenant de combiner les effets bénéfiques de l'accéléromètre et du gyromètre associés à leurs filtres respectifs :

- accéléromètre+filtre Ffa = précis en valeur moyenne ;
- gyromètre+filtre Ffg = rapide.

Le schéma-bloc de la commande est proposé figure FC13 ;

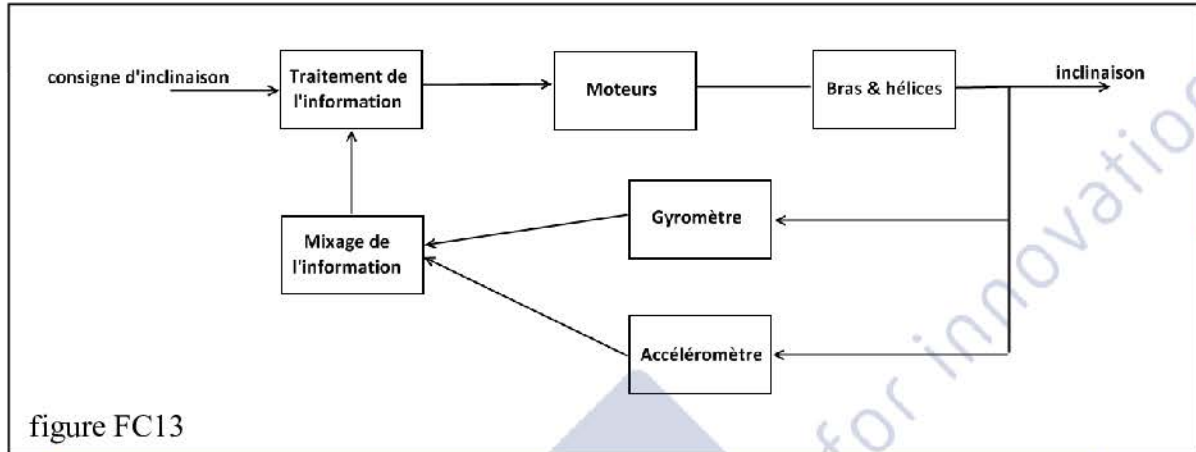


figure FC13

la figure FC14 donne le détail de modélisation des différents constituants ; les grandeurs physiques indiquées représentent les transformées de Laplace des grandeurs obtenues pour des variations autour du point de fonctionnement $\alpha = 0^\circ$.

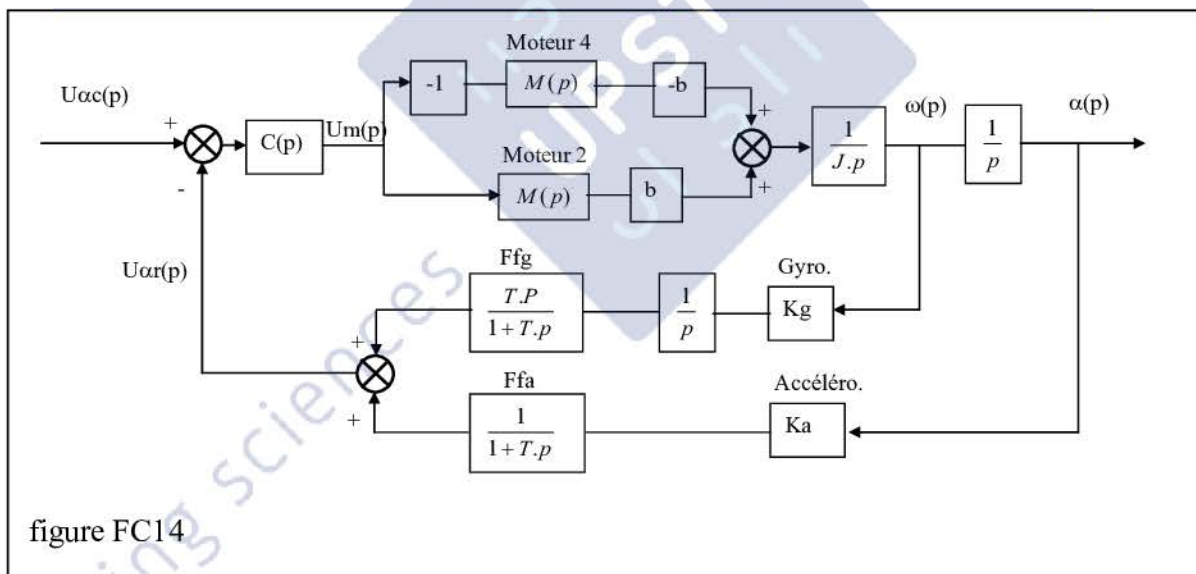


figure FC14

On souhaite simplifier ce schéma-bloc pour obtenir la forme proposée figure FC15 ;

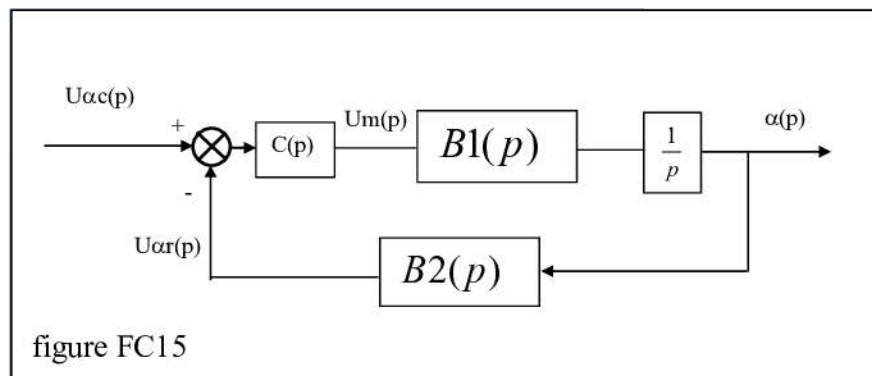
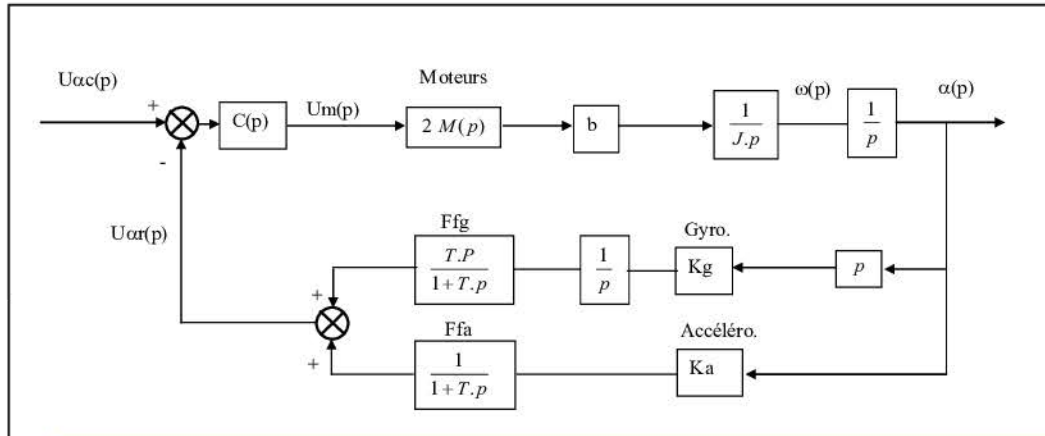


figure FC15

Question C20 : Donner les expressions des fonctions de transfert $B1(p)$, $B2(p)$ en fonction des données du schéma-bloc de la figure FC14.

le schéma-bloc peut être modifié comme suit :



Ce qui permet d'écrire :

$$B1(p) = \frac{2 M(p)b}{J.p} \quad \text{et} \quad B2(p) = \frac{Kg.T.p}{1+T.p} + \frac{Ka}{1+T.p} = \frac{Ka.(1 + \frac{Kg}{Ka}.T.p)}{1+T.p}$$

Pour la suite du problème, on utilise les valeurs données dans le schéma-bloc figure FC16

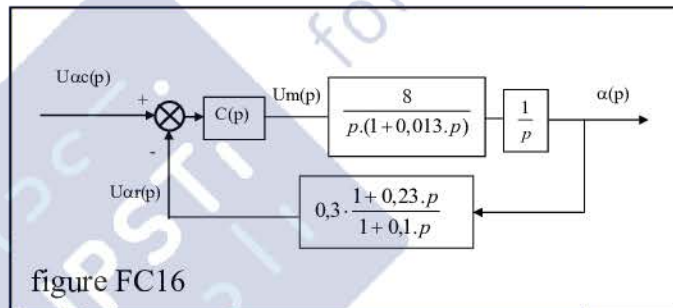


figure FC16

Et on souhaite répondre au cahier des charges suivant :

Stabilité	marge de phase minimale : 60° ; marge de gain minimale 20 dB.
Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 1s

La figure FC17 présente le diagramme de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO1(p) pour C(p) = 1.

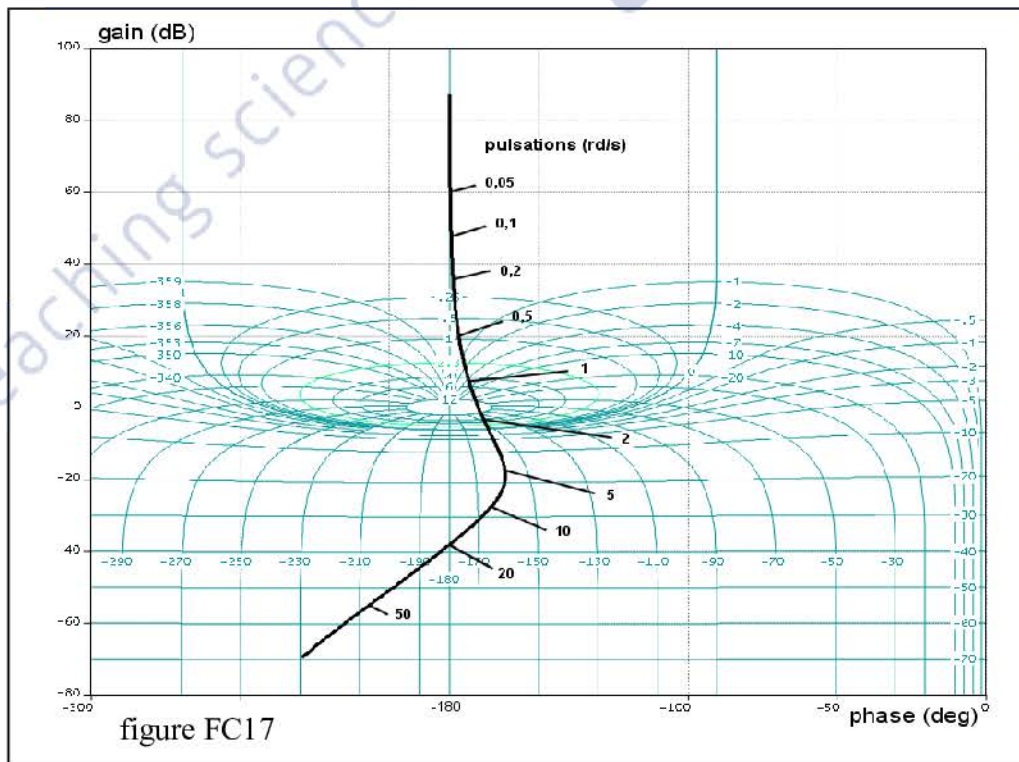


figure FC17

Question C21 : Justifier l'asymptote de la courbe à -180° en basses fréquences. Quelle sera l'asymptote de la courbe en hautes fréquences ?

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$FTBO1(p) = \frac{8}{p \cdot (1 + 0,013 \cdot p)} \cdot \frac{1}{p} \cdot 0,3 \cdot \frac{1 + 0,23 \cdot p}{1 + 0,1 \cdot p} = \frac{2,4 \cdot (1 + 0,23 \cdot p)}{p^2 \cdot (1 + 0,013 \cdot p) \cdot (1 + 0,1 \cdot p)}$$

lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\text{Arg}(FTBO1(j\omega)) \approx \text{Arg}\left(\frac{1}{(j\omega)^2}\right) = -180^\circ$

lorsque $\omega \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \text{Arg}(FTBO1(j\omega)) &= \text{Arg}\left(\frac{1}{(j\omega)^2}\right) + \text{Arg}(1 + 0,23 \cdot j\omega) - \text{Arg}(1 + 0,013 \cdot j\omega) - \text{Arg}(1 + 0,1 \cdot j\omega) \\ &= -180^\circ + 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = -270^\circ \end{aligned}$$

Question C22 : Donner les valeurs de la marge de gain MG1; de la marge de phase MP1 ; Les valeurs approximatives de la pulsation de résonance en boucle fermée ω_r ; de la surtension en boucle fermée QdB.

Conclure vis-à-vis des critères du cahier des charges.

Sur le diagramme de Black, on lit :

MG1 = 38 dB ; MP1 = 10° ; $\omega_r = 1,5$ rd/s ; QdB ≈ 20 dB.

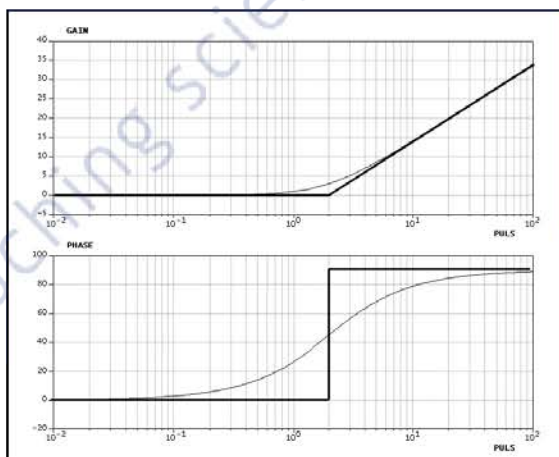
Les critères de marges de gain et de phase ne sont pas respectés.

On souhaite utiliser un correcteur $C(p)$ pour optimiser le comportement du système, et on envisage un correcteur proportionnel dérivé, de fonction de transfert $C(p) = Kd \cdot (1 + Td \cdot p)$.

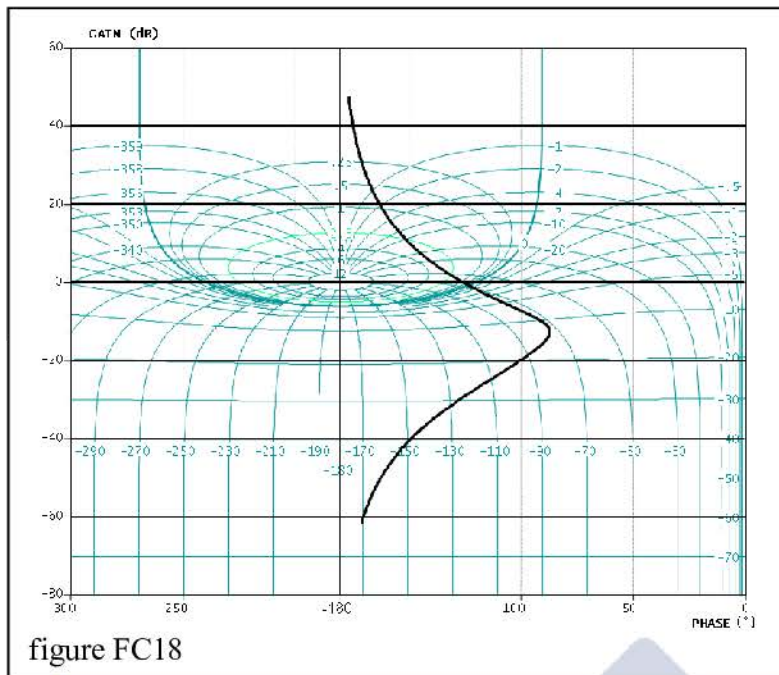
Question C23 :

Tracer le diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme réel (gain et phase) du correcteur $C(p)$ pour $Kd = 1$, avec une constante de temps Td déterminée de façon à ce qu'il provoque une avance de phase de 45° à la pulsation 2rad/s.

Le correcteur $C(p) = Kd \cdot (1 + Td \cdot p)$ provoque une avance de phase de 45° à sa pulsation de cassure ; on choisit donc celle-ci à 2 rad/s ; alors $Td = 1/2 = 0,5$ s



La figure FC18 présente le diagramme de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO2(p) pour $C(p) = Kd \cdot (1 + Td \cdot p)$, avec la constante de temps Td calculée à la question précédente, et $Kd = 1$.

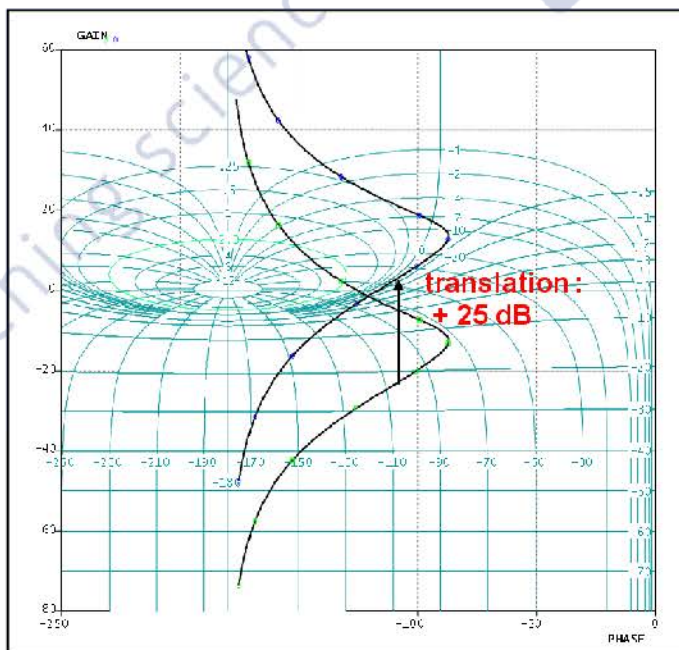


Question C24 : Pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges, on souhaite un gain de FTBO(p) le plus élevé possible, tout en réduisant au maximum la surtension de la fonction de transfert en boucle fermée ; proposez une valeur du coefficient K_d ; expliquez votre démarche.

Nota : on donne

x	- 1,75	-1,5	-1,25	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75	1,25	1,5	1,75
10^x	0,018	0,032	0,056	0,18	0,32	0,56	1,8	3,2	5,6	17,8	31,6	56,2

Une augmentation du gain de FTBO(p) provoque une translation verticale de la courbe de Black ; on réalise cette translation pour venir faire tangenter le tracé de FTBO avec la courbe isogain de 0dB de l'abaque de Hall (limitation de la surtension en boucle fermée).



On doit alors faire une translation de + 25 dB, ce qui donne $K_d = 10^{25/20} = 10^{1,25} = 17,8$

Les essais sur le système ont fait apparaître que la commande des moteurs est affectée d'un retard de valeur Tr , dû au mode de traitement des informations dans le contrôleur du moteur. La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit alors $FTBO4(p) = e^{-Tr \cdot p} \cdot FTBO3(p)$. $FTBO3(p)$ ayant un réglage satisfaisant des coefficients Td et Kd . On rappelle que pour l'étude fréquentielle, on pose $p = j \cdot \omega$.

Question C25 : Exprimer le module $\|FTBO4(j\omega)\|$ en fonction de $\|FTBO3(j\omega)\|$; Exprimer l'argument $Arg(FTBO4(j\omega))$ en fonction de $Arg(FTBO3(j\omega))$.

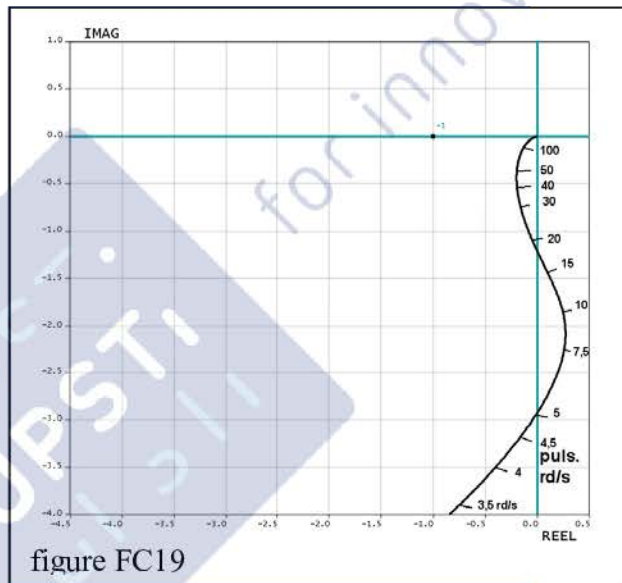
$$\|FTBO4(j\omega)\| = \|e^{-Tr \cdot j\omega}\| \cdot \|FTBO3(j\omega)\| = \|FTBO3(j\omega)\| \quad \text{car } \|e^{-Tr \cdot j\omega}\| = 1$$

$$Arg(FTBO4(j\omega)) = Arg(e^{-Tr \cdot j\omega}) + Arg(FTBO3(j\omega)) = -Tr \cdot \omega + Arg(FTBO3(j\omega))$$

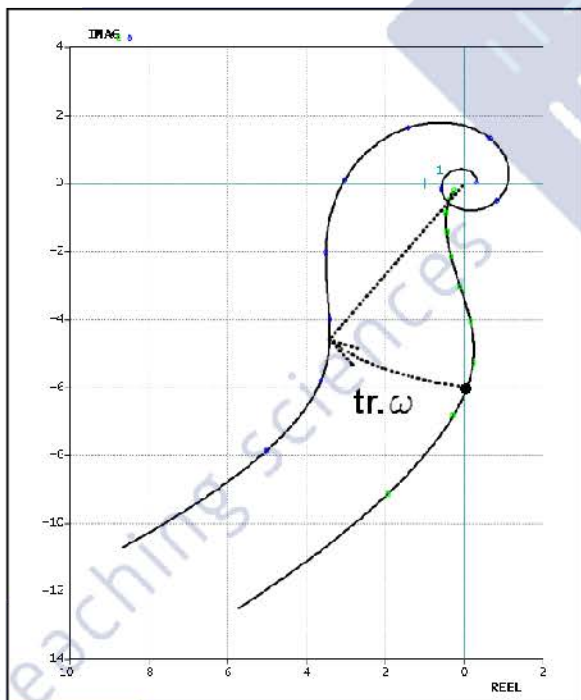
On propose figure FC19 le tracé du diagramme de Nyquist de $FTBO3(j\omega)$.

Question C26 : Tracer sur la figure FC19 du document réponses, la courbe correspondant à $FTBO4(j\omega)$ pour $Tr = 0,1s$.

Nota : pour le tracé, on pourra prendre 1 radian = 60°



Par exemple, le point de pulsation 5 rad/s se trouve au même module, mais à un argument augmenté de : $-tr \cdot \omega = -0,1 \times 5 = -0,5 \text{ rad} = -30^\circ$



Commenter le résultat du point de vue de la stabilité du système.

Le nouveau tracé laisse le point critique $(-1, 0)$ à sa droite, le système devient donc instable.

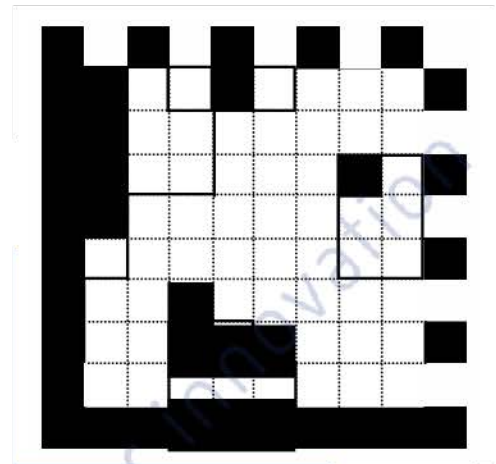
Partie D : Etude de la mission photographique

D.1 Intérêt du code barre 2D

D.2 Codage du DataMatrix

Question D1 : Donner l'écriture binaire codée sur 8 bits de chacun des 3 premiers octets de données seulement. Compléter les cellules élémentaires correspondantes du datamatrix sur le document réponse. Donner l'écriture hexadécimale (base 16) des 3 premiers octets de données étudiés.

Ecriture binaire des 3 premiers octets :
1000 1110 1010 0100 1011 1010
Ecriture hexadécimale des 3 premiers octets : 8E A4 BA



D.3 Correction d'erreurs

Question D2 : Donner l'expression simplifiée des quatre composantes b_i du segment de message B.

$b_0 = 1.a_0 \oplus 0.a_1 = a_0$, $b_1 = 0.a_0 \oplus 1.a_1 = a_1$, $b_2 = 1.a_0 \oplus 1.a_1 = a_0 \oplus a_1$ et $b_3 = 0.a_0 \oplus 1.a_1 = a_1 = b_1$
ainsi $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_0 \oplus a_1$ et $b_3 = a_1 = b_1$

Question D3 : En considérant tous les segments de message A (sur 2 bits) possibles, donner le nombre de messages A différents à coder, le nombre de messages B différents à imprimer, et la liste de ces messages. Comparer avec le nombre de messages B possibles.

Le segment de message A est codé sur 2 bits, il y a donc $2^2 = 4$ messages différents possibles. Il y aura donc 4 messages de type B différents à imprimer :

Si A=(0,0) alors B=(0,0,0,0)

Si A=(0,1) alors B=(0,1,1,1)

Si A=(1,0) alors B=(1,0,1,0)

Si A=(1,1) alors B=(1,1,0,1)

Le message de type B étant de dimension 4, il y a $2^4 = 16$ messages possibles.

Question D4 : Déterminer les équations du syndrome (s_0, s_1) et donner la valeur de S lorsque le message lu est correct.

$s_0 = 1.d_0 \oplus 1.d_1 \oplus 1.d_2 \oplus 0.d_3 = d_0 \oplus d_1 \oplus d_2$ et $s_1 = 0.d_0 \oplus 1.d_1 \oplus 0.d_2 \oplus 1.d_3 = d_1 \oplus d_3$

Si le message lu est correct D=B : $s_0 = b_0 \oplus b_1 \oplus b_2 = a_0 \oplus a_1 \oplus (a_0 \oplus a_1) = 0$ et $s_1 = b_1 \oplus b_3 = a_1 \oplus a_1 = 0$

Donc si le message lu est correct S=(0,0)

Question D5 : Appliquer l'algorithme de correction au message D et vérifier son efficacité.

$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $s_0 = d_0 \oplus d_1 \oplus d_2 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$ et $s_1 = d_1 \oplus d_3 = 0 \oplus 1 = 1$. Par conséquent $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $E = D \oplus M_s = \begin{pmatrix} d_0 \oplus m_0 \\ d_1 \oplus m_1 \\ d_2 \oplus m_2 \\ d_3 \oplus m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B$, la correction a bien été effectuée.

Question D6 : Appliquer l'algorithme de correction au message D et conclure sur l'efficacité de l'algorithme en cas d'erreur de transmission sur 2 bits.

Cette fois $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $s_0 = d_0 \oplus d_1 \oplus d_2 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$ et $s_1 = d_1 \oplus d_3 = 0 \oplus 1 = 1$. Par conséquent $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $M_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $E = D \oplus M_s = \begin{pmatrix} d_0 \oplus m_0 \\ d_1 \oplus m_1 \\ d_2 \oplus m_2 \\ d_3 \oplus m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq B$, la correction n'est pas effectuée correctement.

Le message obtenu après correction est le message le plus proche de celui de D avec une seule erreur de lecture.

Question D7 : Donner l'expression de la matrice de décodage H . A noter, que puisque le codage est redondant, il peut exister plusieurs expressions possibles pour la matrice H .

Une solution possible pour H est : $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ telle que $F = HE = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \end{pmatrix}$ et s'il n'y a pas d'erreurs $F = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = A$