

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2011

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

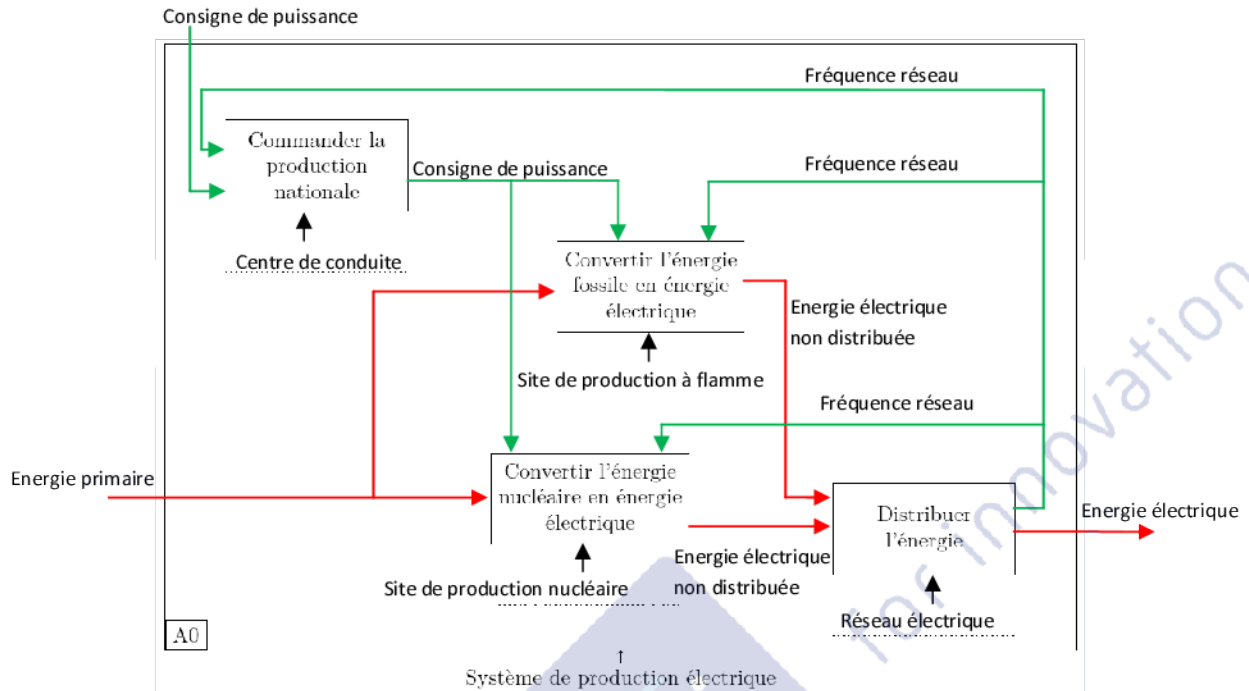
En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

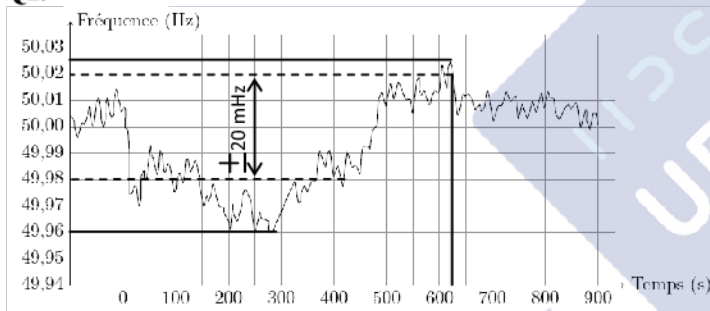
Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Q1.



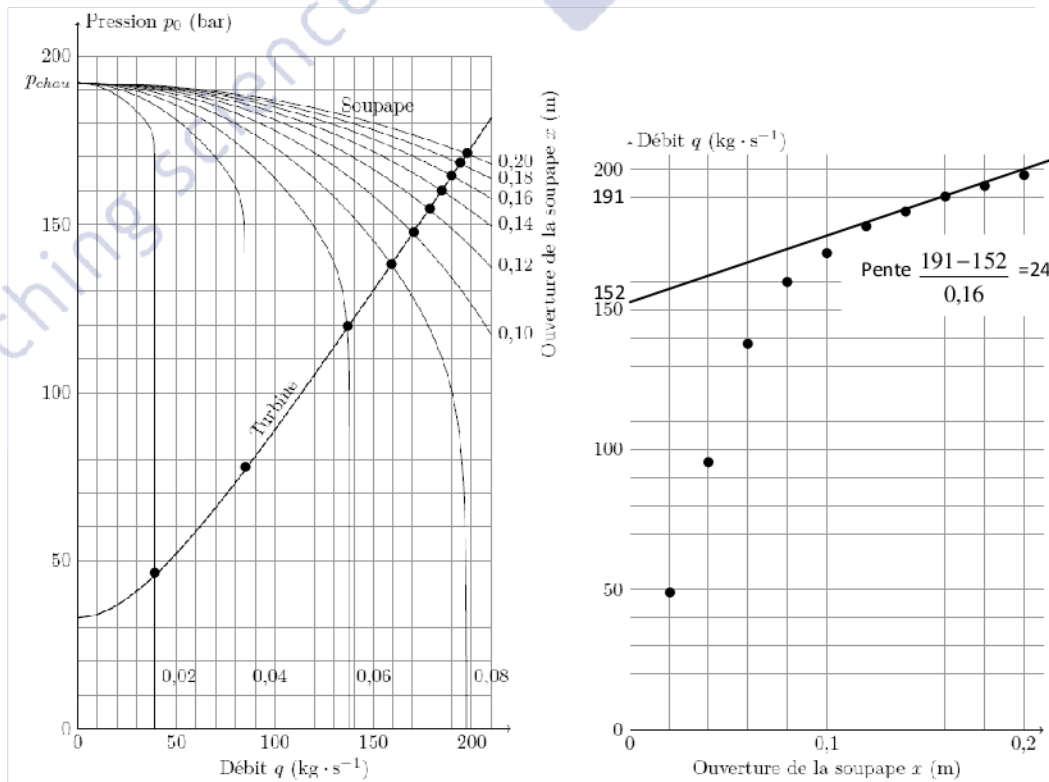
Q2.



Les critères suivants sont validés :

- Stabilité de la régulation de fréquence du réseau :
On a bien $49,82 \text{ Hz} < f < 50,18 \text{ Hz}$ sur l'ensemble du tracé. Ici, on a $49,96 \text{ Hz} < f < 50,025 \text{ Hz}$.
- Précision de la régulation de fréquence du réseau :
Le système est précis, en régime permanent $f \approx 50 \text{ Hz}$.
- Temps maximal de retour à moins de 20 mHz de la fréquence nominale de 50 Hz :
Ici, on obtient un temps de retour de moins de 625 s. Ceci est conforme au cahier des charges qui impose 900 s.

Q3.

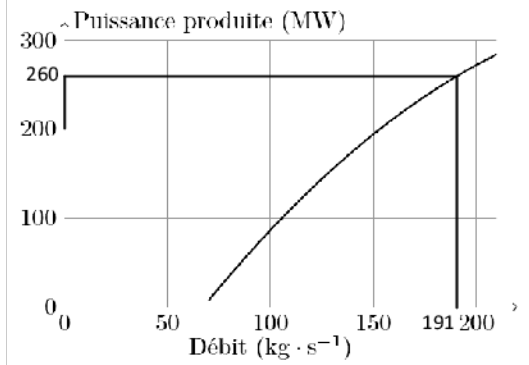


Q4.

Autour du point de fonctionnement ($p_n = 165 \text{ bar}$; $q_n = 191 \text{ kg.s}^{-1}$), on considère que la caractéristique de la soupape, pour de petites variations, est linéaire. Elle est de la forme $\Delta q_n(t) = K_S \times \Delta x(t)$.

Dans le domaine symbolique, $F_S(p) = \frac{\Delta q(p)}{\Delta x(p)} = K_S$, avec $K_S = 244 \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$, obtenu par le tracé de la tangente à la caractéristique, au point de fonctionnement.

Q5.



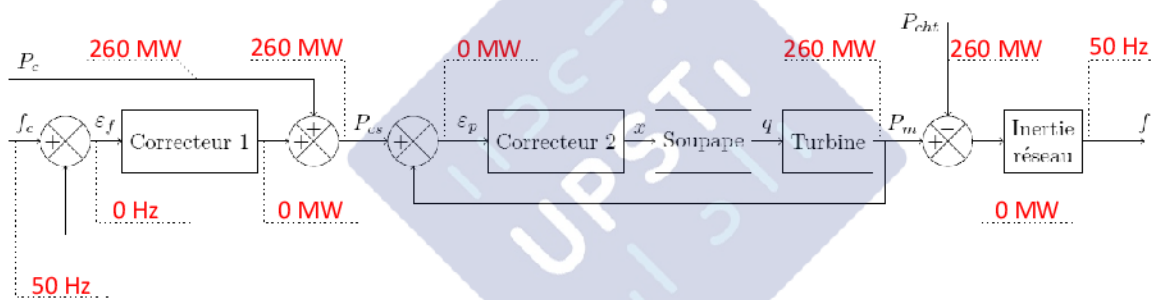
On propose un modèle de fonctionnement de type 1^{er} ordre autour du point de fonctionnement considéré.

Dans le domaine symbolique, $F_T(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta q(p)} = \frac{K_T}{1 + \tau \times p}$ avec

$$K_T = \frac{260}{191} = 1,36 \text{ MW.s.kg}^{-1}$$

$$\tau = \frac{tr_{5\%}}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ s.}$$

Q6.



Q7.

La correction est intégrale : $C(p) = \frac{K_I}{p}$.

$$H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)} = \frac{\frac{K_I}{p} \times K_S \times \frac{K_T}{1 + \tau \times p}}{1 + \frac{K_I}{p} \times K_S \times \frac{K_T}{1 + \tau \times p}} = \frac{K_I \times K_S \times K_T}{p \times (1 + \tau \times p) + K_I \times K_S \times K_T}$$

Sous forme canonique : $H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_I \times K_S \times K_T} \times p + \frac{\tau}{K_I \times K_S \times K_T} \times p^2}$.

$H_p(p)$ est une fonction de transfert d'un système du 2nd ordre.

On donne $K = 1$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_I \times K_S \times K_T}{\tau}}$; $\xi = \frac{1}{2 \times \sqrt{\tau \times K_I \times K_S \times K_T}}$.

Les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative ($-\xi \times \omega_0$).

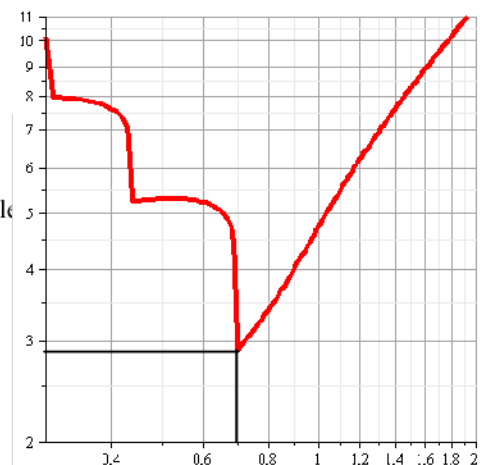
Le système est donc stable.

Le gain statique est unitaire donc le système est précis, l'erreur statique est nulle.

Pour avoir un temps de réponse minimal, il faut que $\xi \approx 0,7$.

$$\frac{1}{2 \times \sqrt{\tau \times K_I \times K_S \times K_T}} \approx 0,7, \text{ ce qui donne : } \tau \times K_I \times K_S \times K_T = 0,51.$$

$$K_I = \frac{0,51}{\tau \times K_S \times K_T} = 2,54 \times 10^{-10} \text{ m.MW}^{-1}.\text{s}^{-1}.$$



On en déduit $\omega_0 = 0,119 \text{ rad.s}^{-1}$.

Pour $\xi \approx 0,7$, $\text{tr}_{5\%} \times \omega_0 \approx 3$ et donc $\text{tr}_{5\%} = 25 \text{ s}$.

La turbine seule a un temps de réponse de 18 s.

La boucle interne de puissance n'a donc pas amélioré la rapidité du système.

Q8.

La correction est proportionnelle intégrale : $C(p) = K_p \times \left(1 + \frac{1}{T_I \times p}\right)$.

$$H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)} = \frac{K_p \times \left(1 + \frac{1}{T_I \times p}\right) \times K_S \times \frac{K_T}{1 + \tau \times p}}{1 + K_p \times \left(1 + \frac{1}{T_I \times p}\right) \times K_S \times \frac{K_T}{1 + \tau \times p}} = \frac{K_p \times K_S \times K_T \times (1 + T_I \times p)}{T_I \times p \times (1 + \tau \times p) + K_p \times (1 + T_I \times p) \times K_S \times K_T}$$

Sous forme canonique : $H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)} = \frac{1 + T_I \times p}{1 + T_I \times \left(1 + \frac{1}{K_p \times K_S \times K_T}\right) \times p + \frac{\tau \times T_I}{K_p \times K_S \times K_T} \times p^2}$.

$H_p(p)$ est une fonction de transfert d'un système du 2nd ordre.

Les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative ($-\xi \times \omega_0$). Le système est donc stable.

Le gain statique est unitaire donc le système est précis, l'erreur statique est nulle.

	Précision	Rapidité	Stabilité
Boucle ouverte	Peu précis en général	Dépend de la constante de temps du process	Correcte la plupart du temps
Correction P	Améliore la précision d'autant plus que K_p est grand	Améliore la rapidité si K_p est réglé tel que le coefficient d'amortissement de la FTBF soit de 0,7.	La stabilité est dégradée par l'augmentation du gain
Correction I	L'erreur statique est nulle	Diminue la rapidité	La stabilité est dégradée par la diminution de la phase
Correction PI	L'erreur statique est nulle	Amélioration de la rapidité pour un réglage correct de K_p et T_I	Les marges ne sont pas altérées pour un réglage de T_I suffisamment petit

Q9.

Si $K_p \times K_S \times K_T = 1$, $H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)} = \frac{1 + T_I \times p}{1 + 2 \times T_I \times p + \tau \times T_I \times p^2}$.

$H_p(p)$ est une fonction de transfert d'un système du 2nd ordre de gain statique $K = 1$; de pulsation du système non

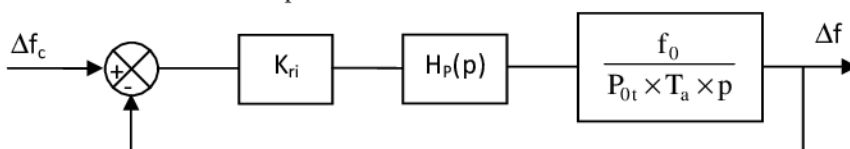
amorti $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau \times T_I}}$ et de coefficient d'amortissement $\xi = \sqrt{\frac{T_I}{\tau}}$.

Si de plus $T_I \approx \tau$, alors $H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)} = \frac{1}{1 + \tau \times p}$.

$H_p(p)$ est alors une fonction de transfert d'un système du 1^{er} ordre de gain statique $K = 1$ et de constante de temps $\tau = 6 \text{ s}$.

Q10.

On se ramène à la modélisation non perturbée suivante :



La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :
$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta f_c(p)} = \frac{K_{ri} \times H_p(p) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}{1 + K_{ri} \times H_p(p) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}$$

On en déduit :
$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta f_c(p)} = \frac{K_{ri} \times \left(\frac{1 + T_I \times p}{1 + 2 \times T_I \times p + \tau \times T_I \times p^2} \right) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}{1 + K_{ri} \times \left(\frac{1 + T_I \times p}{1 + 2 \times T_I \times p + \tau \times T_I \times p^2} \right) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}$$

$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta f_c(p)} = \frac{K_{ri} \times f_0 \times (1 + T_I \times p)}{P_{0t} \times T_a \times p \times (1 + 2 \times T_I \times p + \tau \times T_I \times p^2) + K_{ri} \times f_0 \times (1 + T_I \times p)}$$

$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta f_c(p)} = \frac{K_{ri} \times f_0 \times (1 + T_I \times p)}{K_{ri} \times f_0 + (K_{ri} \times f_0 \times T_I + P_{0t} \times T_a) \times p + 2 \times T_I \times P_{0t} \times T_a \times p^2 + \tau \times T_I \times P_{0t} \times T_a \times p^3}$$

On applique le critère de stabilité absolue de Routh :

- Tous les coefficients du dénominateur sont présents ;
- Tous les coefficients du dénominateur sont de même signe ;

On dresse alors le tableau suivant :

p^3	$\tau \times T_I \times P_{0t} \times T_a > 0$	$K_{ri} \times f_0 \times T_I + P_{0t} \times T_a$
p^2	$2 \times T_I \times P_{0t} \times T_a > 0$	$K_{ri} \times f_0$
p^1	$\frac{[2 \times T_I \times P_{0t} \times T_a] \times [K_{ri} \times f_0 \times T_I + P_{0t} \times T_a] - \tau \times T_I \times P_{0t} \times T_a \times K_{ri} \times f_0}{2 \times T_I \times P_{0t} \times T_a} > 0$	0
1	1	0



- Le système est stable si tous les éléments de cette colonne gardent le même signe.

On en déduit la condition $[2 \times T_I \times P_{0t} \times T_a] \times [K_{ri} \times f_0 \times T_I + P_{0t} \times T_a] - \tau \times T_I \times P_{0t} \times T_a \times K_{ri} \times f_0 > 0$.

D'où $2 \times [K_{ri} \times f_0 \times T_I + P_{0t} \times T_a] - \tau \times K_{ri} \times f_0 > 0$.

et donc $T_I > \frac{\tau}{2} \frac{P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0}$.

A.N. : $T_I > 2,48$ s (critère de stabilité absolue).

A partir du diagramme de Bode, le tracé en pointillés ne présente aucune marge de phase car lorsque le tracé asymptotique du gain coupe l'axe des abscisses, le tracé asymptotique de la phase est de -270° . Le système ainsi modélisé ($T_I < \tau$) peut donc être instable. On préférera alors choisir $T_I > \tau$.

Q11.

La fonction de transfert en boucle ouverte est
$$\frac{\Delta f(p)}{\varepsilon_f(p)} = K_{ri} \times \left(\frac{1 + T_I \times p}{1 + 2 \times T_I \times p + \tau \times T_I \times p^2} \right) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}$$

Le gain est donné par
$$G_{dB}(\omega) = 20 \times \log \left[K_{ri} \times \frac{\sqrt{1 + (T_I \times \omega)^2}}{\sqrt{(1 - \tau \times T_I \times \omega^2)^2 + (2 \times T_I \times \omega)^2}} \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times \omega} \right]$$

La phase est donnée par
$$\varphi(\omega) = \arctan(T_I \times \omega) - \arctan\left(\frac{2 \times T_I \times \omega}{1 - \tau \times T_I \times \omega^2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Lorsque ω est grand,
$$G_{dB}(\omega) \approx 20 \times \log \left[K_{ri} \times \frac{T_I \times \omega}{\tau \times T_I \times \omega^2} \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times \omega} \right]$$

Et donc $G_{dB}(\omega) \approx 20 \times \log \left[\frac{K_{ri} \times f_0}{\tau \times P_{0t} \times T_a \times \omega^2} \right] = 20 \times \log \left(\frac{K_{ri} \times f_0}{\tau \times P_{0t} \times T_a} \right) - 40 \times \log(\omega)$

L'asymptote coupe donc l'axe des abscisses pour $\omega_C = \sqrt{\frac{K_{ri} \times f_0}{\tau \times P_{0t} \times T_a}}$.

A.N. : $\omega_C = 0,57$ rad/s.

La phase est alors $\varphi(\omega_C) = \arctan \left(T_1 \times \sqrt{\frac{K_{ri} \times f_0}{\tau \times P_{0t} \times T_a}} \right) - \arctan \left(\frac{2 \times T_1 \times \sqrt{\frac{K_{ri} \times f_0}{\tau \times P_{0t} \times T_a}}}{1 - \tau \times T_1 \times \frac{K_{ri} \times f_0}{\tau \times P_{0t} \times T_a}} \right) - \frac{\pi}{2}$.

AN : $\varphi(\omega_C) = -154^\circ$.

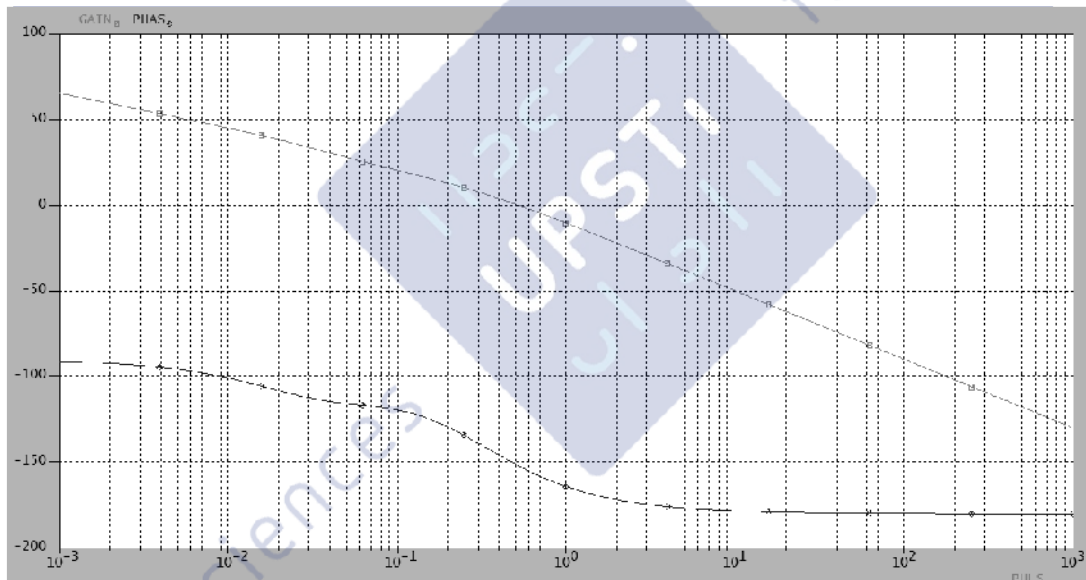
La marge de phase est donc $M_\varphi = -154 + 180 = 26^\circ$.

Le cahier des charges (tableau 2, page 5) impose $M_\varphi > 20^\circ$, le critère est donc validé.

NB : La marge de gain M_G est infinie car la phase tend asymptotiquement vers -180° .

Le cahier des charges (tableau 2, page 5) impose $M_G > 10$ dB, le critère de stabilité est donc complètement validé.

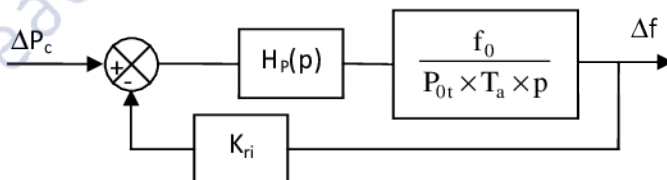
Le diagramme de Bode réel est le suivant :



La fonction de transfert en boucle fermée $\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_c(p)}$ a un gain statique unitaire, l'écart statique est donc nul. Le critère de précision est donc lui aussi validé.

Q12.

On se ramène au schéma suivant :



$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_c(p)} = \frac{\left(\frac{1 + T_1 \times p}{1 + 2 \times T_1 \times p + \tau \times T_1 \times p^2} \right) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}{1 + K_{ri} \times \left(\frac{1 + T_1 \times p}{1 + 2 \times T_1 \times p + \tau \times T_1 \times p^2} \right) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}$$

$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_c(p)} = \frac{f_0 \times (1 + T_1 \times p)}{P_{0t} \times T_a \times p \times (1 + 2 \times T_1 \times p + \tau \times T_1 \times p^2) + K_{ri} \times f_0 \times (1 + T_1 \times p)}$$

Finalement, sous forme canonique :
$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_c(p)} = \frac{1}{K_{ri}} \times \frac{1 + T_1 \times p}{1 + \left(T_1 + \frac{P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0}\right) \times p + \frac{2 \times T_1 \times P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0} \times p^2 + \frac{\tau \times T_1 \times P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0} \times p^3}$$

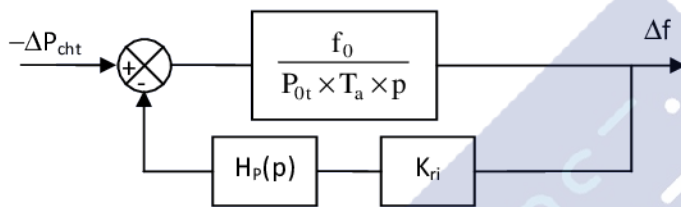
Si la perturbation $\Delta P_c(t)$ est constante, on a $\Delta P_c(p) = \frac{\Delta P_{c0}}{p}$ avec ΔP_{c0} l'amplitude de l'échelon.

En appliquant le théorème de la valeur finale,

$$\Delta f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{\Delta P_{c0}}{p} \times \frac{1}{K_{ri}} \times \frac{1 + T_1 \times p}{1 + \left(T_1 + \frac{P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0}\right) \times p + \frac{2 \times T_1 \times P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0} \times p^2 + \frac{\tau \times T_1 \times P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0} \times p^3}$$

On en conclue que
$$\Delta f(\infty) = \frac{\Delta P_{c0}}{K_{ri}}$$

On se ramène ensuite au schéma suivant :



$$\frac{\Delta f(p)}{-\Delta P_{cht}(p)} = \frac{\frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}{1 + K_{ri} \times \left(\frac{1 + T_1 \times p}{1 + 2 \times T_1 \times p + \tau \times T_1 \times p^2}\right) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}$$

$$\frac{\Delta f(p)}{-\Delta P_{cht}(p)} = \frac{f_0 \times (1 + 2 \times T_1 \times p + \tau \times T_1 \times p^2)}{P_{0t} \times T_a \times p \times (1 + 2 \times T_1 \times p + \tau \times T_1 \times p^2) + K_{ri} \times f_0 \times (1 + T_1 \times p)}$$

Finalement, sous forme canonique :
$$\frac{\Delta f(p)}{-\Delta P_{cht}(p)} = \frac{1}{K_{ri}} \times \frac{1 + \frac{2 \times T_1}{K_{ri} \times f_0} \times p + \frac{\tau \times T_1}{K_{ri} \times f_0} \times p^2}{1 + \left(T_1 + \frac{P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0}\right) \times p + \frac{2 \times T_1 \times P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0} \times p^2 + \frac{\tau \times T_1 \times P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0} \times p^3}$$

Si la perturbation $\Delta P_{cht}(t)$ est constante, on a $\Delta P_{cht}(p) = \frac{\Delta P_{cht0}}{p}$ avec ΔP_{cht0} l'amplitude de l'échelon.

En appliquant le théorème de la valeur finale,
$$\Delta f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \left(-\frac{\Delta P_{cht0}}{p}\right) \times \left[\frac{\Delta f(p)}{-\Delta P_{cht}(p)}\right]$$

On en conclue que
$$\Delta f(\infty) = -\frac{\Delta P_{cht0}}{K_{ri}}$$

$$\Delta f(\infty) = \frac{f_0 \times \lambda}{P_{0t}} \times (\Delta P_{c0} - \Delta P_{cht0})$$

En appliquant le théorème de superposition,
$$\frac{\Delta P_{c0}}{K_{ri}} - \frac{\Delta P_{cht0}}{K_{ri}} = \frac{f_0 \times \lambda}{P_{0t}} \times (\Delta P_{c0} - \Delta P_{cht0})$$

On en déduit
$$\frac{1}{K_{ri}} = \frac{f_0 \times \lambda}{P_{0t}}$$
 et donc
$$K_{ri} = \frac{P_{0t}}{f_0 \times \lambda}$$

A.N. : $K_{ri} = 1,3 \times 10^8$ W.s.

Q13.

Si $T_1 \approx \tau = 6$ s alors $H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)} = \frac{1}{1 + \tau \times p} = \frac{1}{1 + 6 \times p}$ (Q9).

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $\frac{\Delta f(p)}{\Delta f_c(p)} = \frac{K_{ri} \times H_p(p) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}{1 + K_{ri} \times H_p(p) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}$.

On en déduit : $\frac{\Delta f(p)}{\Delta f_c(p)} = \frac{K_{ri} \times \left(\frac{1}{1 + \tau \times p}\right) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}{1 + K_{ri} \times \left(\frac{1}{1 + \tau \times p}\right) \times \frac{f_0}{P_{0t} \times T_a \times p}}$.

$\frac{\Delta f(p)}{\Delta f_c(p)} = \frac{K_{ri} \times f_0}{P_{0t} \times T_a \times p \times (1 + \tau \times p) + K_{ri} \times f_0}$.

Finalement, sous forme canonique : $\frac{\Delta f(p)}{\Delta f_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{P_{0t} \times T_a}{K_{ri} \times f_0} \times p + \frac{P_{0t} \times T_a \times \tau}{K_{ri} \times f_0} \times p^2}$.

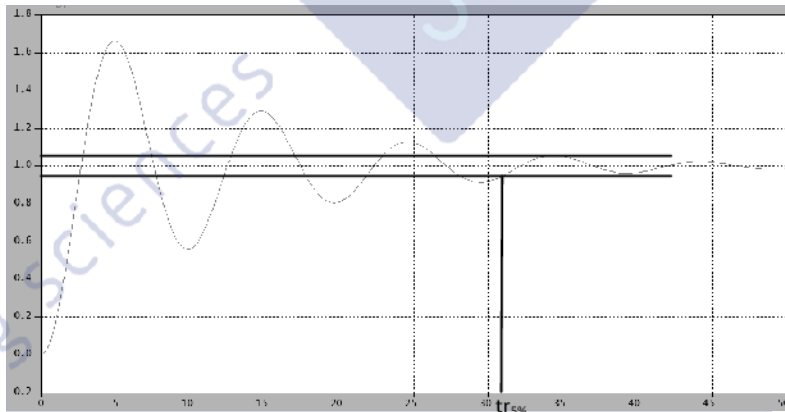
La pulsation du système non amorti est $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{ri} \times f_0}{P_{0t} \times T_a \times \tau}}$ et l'amortissement est $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P_{0t} \times T_a}{\tau \times K_{ri} \times f_0}}$.

A.N. : $\omega_0 = 0,645 \text{ rad.s}^{-1}$; $\xi = 0,129$.

L'abaque (figure 6, page 4) nous donne $tr_{5\%} \times \omega_0 \approx 20$ et donc $tr_{5\%} \approx 31$ s.

Le cahier des charges (tableau 2, page 5) impose $tr_{5\%} = 40$ s, le critère de rapidité est donc validé.

NB : Une simulation numérique nous donne le tracé suivant pour une variation en échelon de 1 Hz :



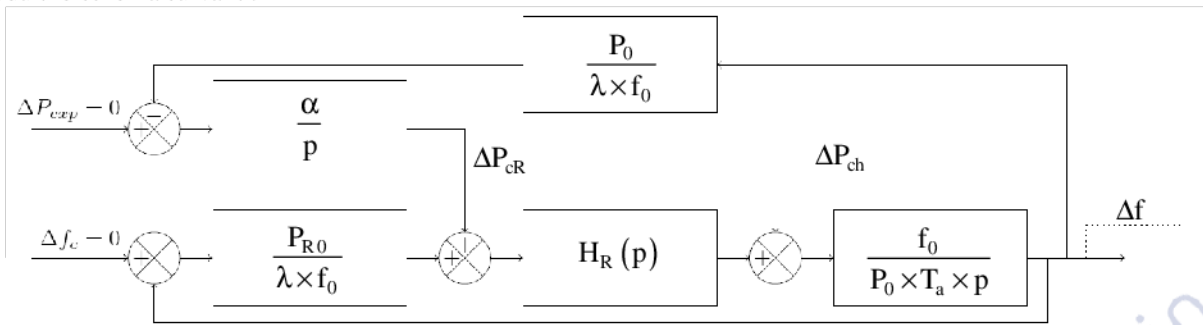
Q14.

On étudie les variations autour de la situation nominale. La puissance de consigne des machines non régulées (P_{cNRi}) ne varie pas. On considère donc que $\Delta P_{cNR1} = \Delta P_{cNR2} = \dots = \Delta P_{cNRm} = 0$.

$$\Delta P_m(p) = \sum_{i=1}^n \left[\Delta P_{cRi} + \left(\varepsilon_f(p) \times \frac{P_{R0i}}{\lambda \times f_0} \right) \right] \times H_R(p) = \left[\Delta P_{cR} + \frac{\varepsilon_f(p)}{\lambda \times f_0} \times \sum_{i=1}^n P_{R0i} \right] \times H_R(p).$$

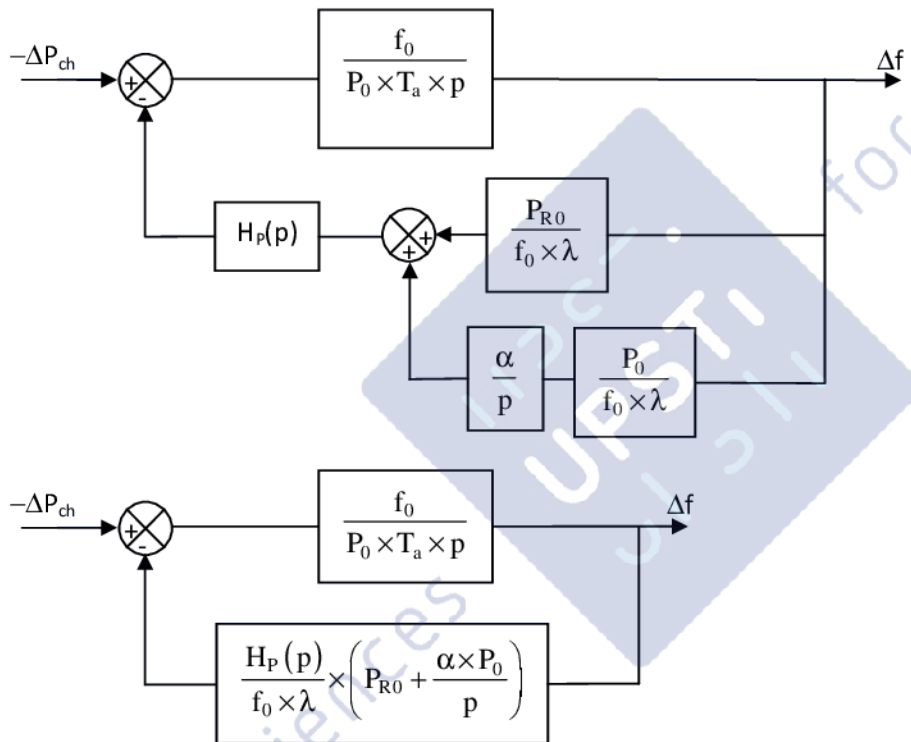
$$\Delta P_m(p) = \left[\Delta P_{cR} + \varepsilon_f(p) \times \frac{P_{R0}}{\lambda \times f_0} \right] \times H_R(p).$$

On en déduit le schéma suivant :



Q15.

On se ramène aux schémas équivalents suivants :



On donne alors la fonction de transfert suivante :

$$\frac{\Delta f(p)}{-\Delta P_{ch}(p)} = \frac{\frac{f_0}{P_0 \times T_a \times p}}{1 + \frac{f_0}{P_0 \times T_a \times p} \times \left(\frac{1}{1 + T_p \times p} \right) \times \frac{1}{f_0 \times \lambda} \times \left(P_{R0} + \frac{\alpha \times P_0}{p} \right)}$$

Et donc

$$\frac{\Delta f(p)}{-\Delta P_{ch}(p)} = \frac{f_0 \times \lambda \times p \times (1 + T_p \times p)}{\lambda \times P_0 \times T_a \times p^2 \times (1 + T_p \times p) + P_{R0} \times p + \alpha \times P_0}$$

Si la perturbation $\Delta P_{ch}(t)$ est constante, on a $\Delta P_{ch}(p) = \frac{\Delta P_{ch0}}{p}$ avec ΔP_{ch0} l'amplitude de l'échelon.

On applique le théorème de la valeur finale :

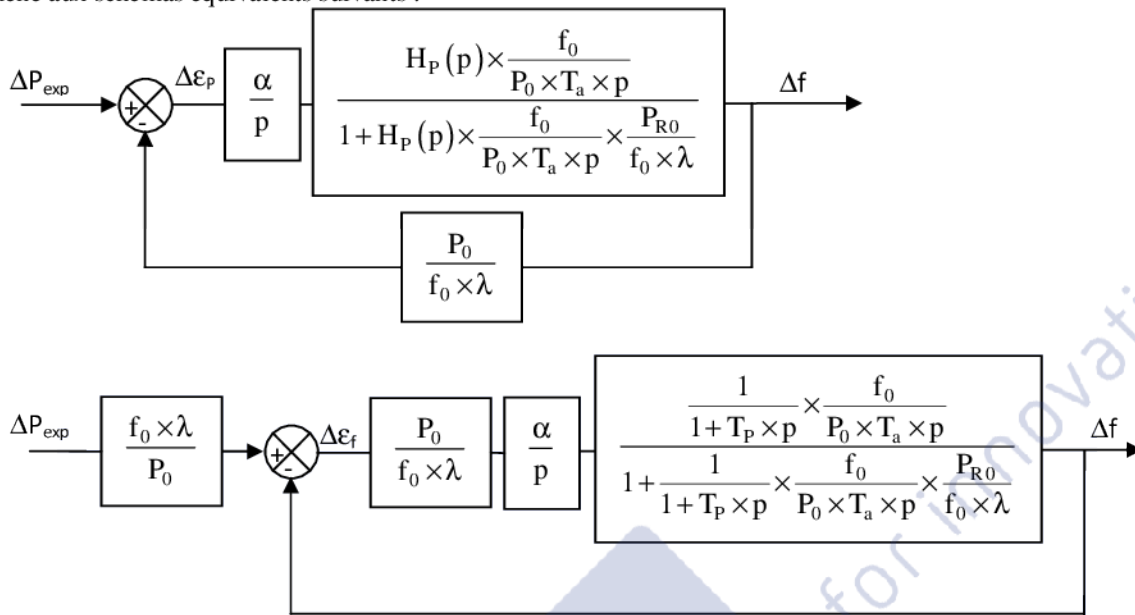
$$\Delta f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \left(-\frac{\Delta P_{ch0}}{p} \right) \times \left[\frac{\Delta f(p)}{-\Delta P_{ch}(p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \left(-\frac{\Delta P_{ch0}}{p} \right) \times \left(\frac{f_0 \times \lambda \times p \times (1 + T_p \times p)}{\lambda \times P_0 \times T_a \times p^2 \times (1 + T_p \times p) + P_{R0} \times p + \alpha \times P_0} \right) = 0.$$

Le système ainsi modélisé est donc insensible à une variation de charge constante.

NB : On aurait pu arriver à la même conclusion en remarquant que le schéma de la figure 9, page 8, possède une intégration dans la chaîne d'action avant la perturbation. Ceci entraîne donc un écart statique nul pour une perturbation additive constante.

Q16.

On se ramène aux schémas équivalents suivants :



La fonction de transfert en boucle ouverte est alors donnée par :

$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta \varepsilon_f(p)} = \frac{P_0}{f_0 \times \lambda} \times \frac{\alpha}{p} \times \frac{f_0 \times \lambda}{(1 + T_p \times p) \times P_0 \times T_a \times p \times \lambda + P_{R0}}$$

$$\text{Soit : } \frac{\Delta f(p)}{\Delta \varepsilon_f(p)} = \alpha \times \frac{P_0}{P_{R0}} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{1 + \frac{P_0 \times T_a \times \lambda}{P_{R0}} \times p + \frac{P_0 \times T_a \times \lambda \times T_p}{P_{R0}} \times p^2}$$

Le gain est donné par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \times \log\left(\frac{\alpha \times P_0}{P_{R0}}\right) - 20 \times \log \omega - 20 \times \log \left[\sqrt{\left(1 - \frac{P_0 \times T_a \times \lambda \times T_p}{P_{R0}} \times \omega^2\right)^2 + \left(\frac{P_0 \times T_a \times \lambda}{P_{R0}} \times \omega\right)^2} \right]$$

$$\text{La phase de cette fonction de transfert est : } \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\frac{P_0 \times T_a \times \lambda}{P_{R0}} \times \omega}{1 - \frac{P_0 \times T_a \times \lambda \times T_p}{P_{R0}} \times \omega^2}\right)$$

$$\text{Elle est égale à } -180^\circ \text{ pour } \omega_{-180} = \sqrt{\frac{P_{R0}}{P_0 \times T_a \times \lambda \times T_p}} = 0,204 \text{ rad/s}$$

Pour cette pulsation, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G_{dB}(\omega_{-180}) = 20 \times \log\left(\frac{\alpha \times P_0}{P_{R0}}\right) - 20 \times \log \sqrt{\frac{P_{R0}}{P_0 \times T_a \times \lambda \times T_p}} - 20 \times \log\left(\sqrt{\frac{P_0 \times T_a \times \lambda}{P_{R0} \times T_p}}\right)$$

$$G_{dB}(\omega_{-180}) = 20 \times \log\left(\frac{\alpha \times P_0 \times T_p}{P_{R0}}\right)$$

Le tableau 1 en page 3 impose une marge de gain $M_G > 33$ dB.

$$\text{On en déduit } 20 \times \log\left(\frac{\alpha \times P_0 \times T_p}{P_{R0}}\right) < -33$$

$$\text{Finalement : } \alpha < 10^{-\frac{33}{20}} \times \frac{P_{R0}}{P_0 \times T_p}$$

$$\text{A.N. : } \alpha < 3,7 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

NB :

- o La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_{\text{exp}}(p)} = \frac{f_0 \times \lambda}{P_0} \times \frac{\frac{P_0}{f_0 \times \lambda} \times \frac{\alpha}{p} \times \frac{f_0 \times \lambda}{(1 + T_p \times p) \times P_0 \times T_a \times p \times \lambda + P_{R0}}}{1 + \frac{P_0}{f_0 \times \lambda} \times \frac{\alpha}{p} \times \frac{f_0 \times \lambda}{(1 + T_p \times p) \times P_0 \times T_a \times p \times \lambda + P_{R0}}}$$

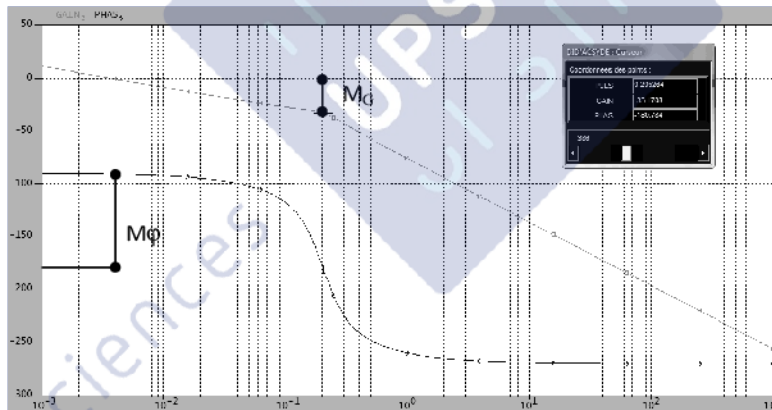
$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_{\text{exp}}(p)} = \frac{\frac{\alpha}{p} \times \frac{f_0 \times \lambda}{(1 + T_p \times p) \times P_0 \times T_a \times p \times \lambda + P_{R0}}}{1 + \frac{1}{p} \times \frac{P_0 \times \alpha}{(1 + T_p \times p) \times P_0 \times T_a \times p \times \lambda + P_{R0}}}$$

$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_{\text{exp}}(p)} = \frac{\alpha \times f_0 \times \lambda}{p \times [(1 + T_p \times p) \times P_0 \times T_a \times p \times \lambda + P_{R0}] + P_0 \times \alpha}$$

$$\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_{\text{exp}}(p)} = \frac{\frac{f_0 \times \lambda}{P_0}}{1 + \frac{P_{R0}}{P_0 \times \alpha} \times p + \frac{T_a \times \lambda}{\alpha} \times p^2 + \frac{T_a \times \lambda \times T_p}{\alpha} \times p^3}$$

A.N. : Pour $\alpha = 3,7 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_{\text{exp}}(p)} = \frac{3,3 \times 10^{-11}}{1 + 270 \times p + 1080 \times p^2 + 6480 \times p^3}$.

- o Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte est pour $\alpha = 3,7 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$:

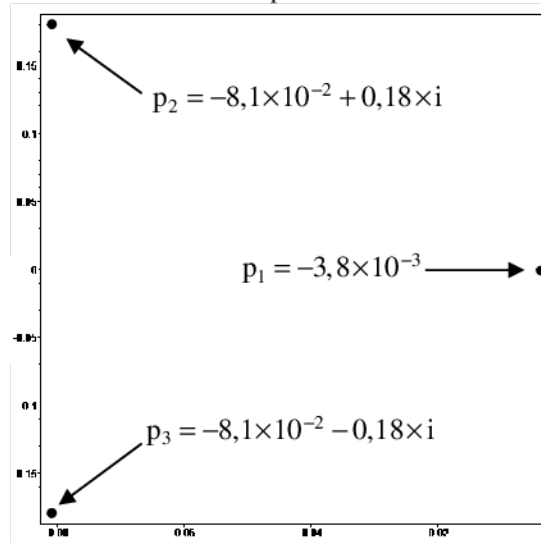


La marge de phase est d'environ 90° , ce qui aussi en accord avec le cahier des charges ($M\phi > 60^\circ$).

Q17.

On admet $\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_{\text{exp}}(p)} = \frac{3,3 \times 10^{-11}}{1 + 270 \times p + 1100 \times p^2 + 6400 \times p^3}$.

Dans le plan complexe, les pôles de la fonction de transfert sont placés de la manière suivante :



Le pôle p_1 est dominant car sa partie réelle est faible en valeur absolue devant les autres. On pose $\tau_1 = -\frac{1}{p_1} = 263 \text{ s}$.

On admet alors que le temps de réponse du système est à peu près le même que celui d'un système du 1^{er} ordre de fonction de transfert : $\frac{\Delta f(p)}{\Delta P_{\text{exp}}(p)} = \frac{3,3 \times 10^{-11}}{1 + 263 \times p}$.

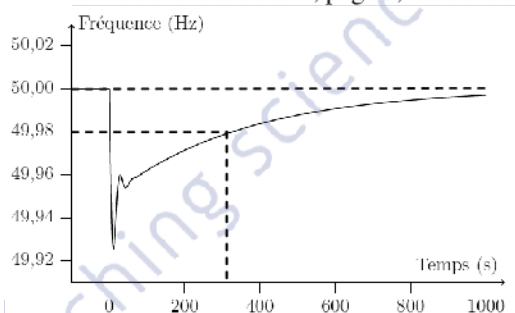
On donne alors : $\text{tr}_{5\%} \approx 3 \times \tau_1 = 789 \text{ s}$.

Le tableau 1, page 3, propose un critère de temps maximal de retour à moins de 20 mHz de la fréquence nominale de 50 Hz, suite à un incident sur une source de production. Cela ne concerne pas notre étude, l'entrée ΔP_{exp} concerne la puissance destinée à l'exportation.

On ne peut donc que valider le texte page 7 qui précise en introduction que le temps de réponse de la régulation secondaire est de l'ordre de quelques centaines de secondes.

Q18.

D'après la simulation effectuée, le système est précis (50 Hz) et insensible à une perturbation de charge constante. Le critère de précision mentionné dans le tableau 1, page 3, est donc satisfait.

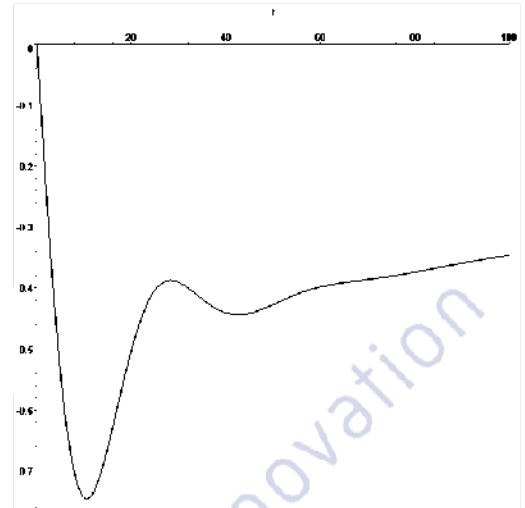
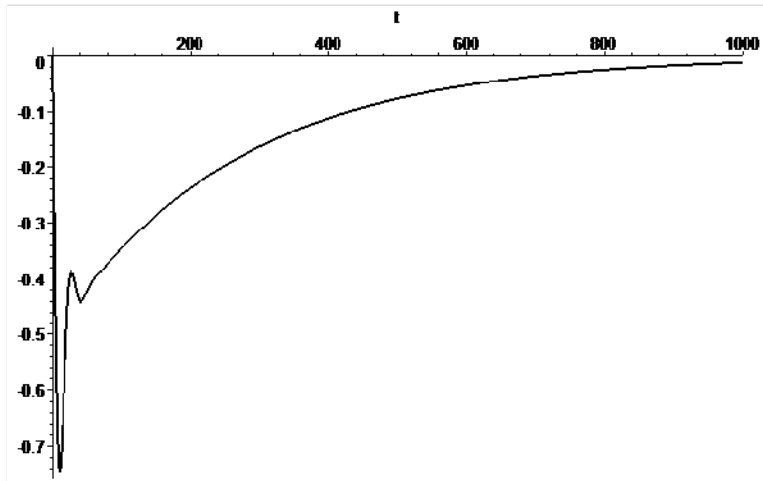


De plus, le temps maximal de retour à moins de 20 mHz de la fréquence nominale doit être de 900 s. Ici, on lit un peu plus de 300 s. Le critère de rapidité semble donc validé par la simulation.

Enfin, suite à un déséquilibre de 1,5 GW, la stabilité du réseau est toujours en accord avec le cahier des charges puisque l'on a bien $49,82 \text{ Hz} < f < 50,18 \text{ Hz}$. Le critère de stabilité est donc validé.

NB : Lorsque l'on trace la réponse à un échelon d'amplitude - 1,5 GW de la fonction de transfert déterminée en Q15,

$$\frac{\Delta f(p)}{-\Delta P_{\text{ch}}(p)} = \frac{f_0 \times \lambda \times p \times (1 + T_p \times p)}{\lambda \times P_0 \times T_a \times p^2 \times (1 + T_p \times p) + P_{R0} \times p + \alpha \times P_0} \text{ avec } \alpha = 3,7 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \text{ le résultat est le suivant :}$$



On s'aperçoit alors que les oscillations sont d'amplitude dix fois plus élevées que celle proposées sur les tracés de la figure 10, page 8. Cela impliquerait alors que les critères de stabilité du réseau et de temps de retour à la situation nominale ne sont pas validés. Les tracés proposés seraient valables pour un déséquilibre de 0,15 GW entre production et consommation, mais pas de 1,5 GW.

Q19.

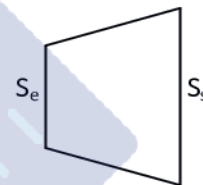
$$q = \frac{dm}{dt} = \frac{1}{v} \times \frac{dV}{dt} = \frac{1}{v} \times S \times \frac{dx}{dt} = \frac{1}{v} \times S \times V_0.$$

On en déduit l'expression de la section : $S = \frac{q \times v}{V_0}$ où q et V_0 sont constants.

La section évolue donc proportionnellement au volume massique v .

$$S_s = \frac{q \times v_s}{V_0} = \frac{S_e \times v_s}{v_e} = \frac{0,1 \times 36}{0,0245} = 147 \text{ m}^2.$$

Cette surface est trop grande, une seule turbine n'est pas une solution envisageable. On choisit donc une structure étagée avec plusieurs turbines HP, MP et BP.



Q20.

$$U_{\text{moy}} = \omega \times \frac{D_{\text{moy}}}{2} = 50 \times 2 \times \pi \times \frac{0,8}{2} = 126 \text{ m/s.}$$

Voir tracé sur document réponse.

$$V_1 = \frac{U_{\text{moy}}}{\xi_{\text{moy}}} = \frac{126}{0,5} = 252 \text{ m/s.}$$

Q21.

Toute variation d'enthalpie est convertie en variation d'énergie cinétique car il n'y a pas de variation d'énergie interne.

$$\text{On en déduit alors la relation : } \Delta h_{0 \rightarrow 1} + \frac{V_1^2 - V_0^2}{2} = 0.$$

$$\Delta h_{0 \rightarrow 1} = \frac{V_0^2 - V_1^2}{2} = \frac{V_0^2 - V_1^2}{2} = -30,5 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

Le nombre d'étage nécessaire est alors : $\frac{\Delta h_{\text{HP}}}{\Delta h_{0 \rightarrow 1}} = \frac{360}{30,5} = 11,8$. On choisira 12 étages.

Q22.

$$q_1 = \frac{1}{v_1} \times V_1 \times \sin(\alpha_1) \times S_1. \quad (\alpha_1 \text{ est compté positif}).$$

$$q_0 = \frac{1}{v_0} \times V_0 \times S_0.$$

$$\text{Si } S_1 \approx S_0, q_1 = \frac{v_0}{v_1} \times \frac{V_1}{V_0} \times \sin(\alpha_1) \times q_0.$$

$$\text{La conservation du débit massique donne } q_1 = q_0 \text{ et donc } \sin(\alpha_1) = \frac{v_1 \times V_0}{v_0 \times V_1}.$$

$$\text{A.N. : } \sin(\alpha_1) = \frac{0,0285 \times 50}{0,0264 \times 252} \text{ et } \alpha_1 = 12^\circ.$$

Voir tracé sur document réponse.

Q23.

La relation de composition des mouvements donne :

$$\vec{V}(\text{vapeur en } S_1 / R_m) + \vec{V}(P_{\text{moy}}, R_m / R_g) = \vec{V}(\text{vapeur en } S_1 / R_g).$$

$$\text{Soit : } \vec{W}_1 + \vec{U} = \vec{V}_1. \text{ Par construction, on en déduit } \vec{W}_1.$$

$$\|\vec{W}_1\| = \|\vec{W}_2\| \text{ et } \vec{W}_2 \text{ est tangent au profil en } S_2.$$

$$\text{De même, } \vec{W}_2 + \vec{U} = \vec{V}_2.$$

Voir tracé sur document réponse.

On en déduit que $\alpha_2 \approx 90^\circ$ et $V_2 \approx V_0 = 50 \text{ m/s}$.

La vitesse absolue de la vapeur en entrée des étages suivant est conservée.

Q24.

Par hypothèse de l'énoncé : $\vec{V}_2 = \vec{V}_0$.

\vec{U} est portée par \vec{e}_θ .

Sa norme est donnée par :

$$U\left(\frac{D_b}{2}\right) = \omega \times \frac{D_b}{2} = 50 \times 2 \times \pi \times \frac{0,894}{2} = 140 \text{ m/s.}$$

$$U\left(\frac{D_t}{2}\right) = \omega \times \frac{D_t}{2} = 50 \times 2 \times \pi \times \frac{1,024}{2} = 161 \text{ m/s.}$$

On rappelle que dans tous les cas, $\vec{W}_2 + \vec{U} = \vec{V}_2$.

Voir constructions de \vec{W}_2 sur document réponse.

Q25.

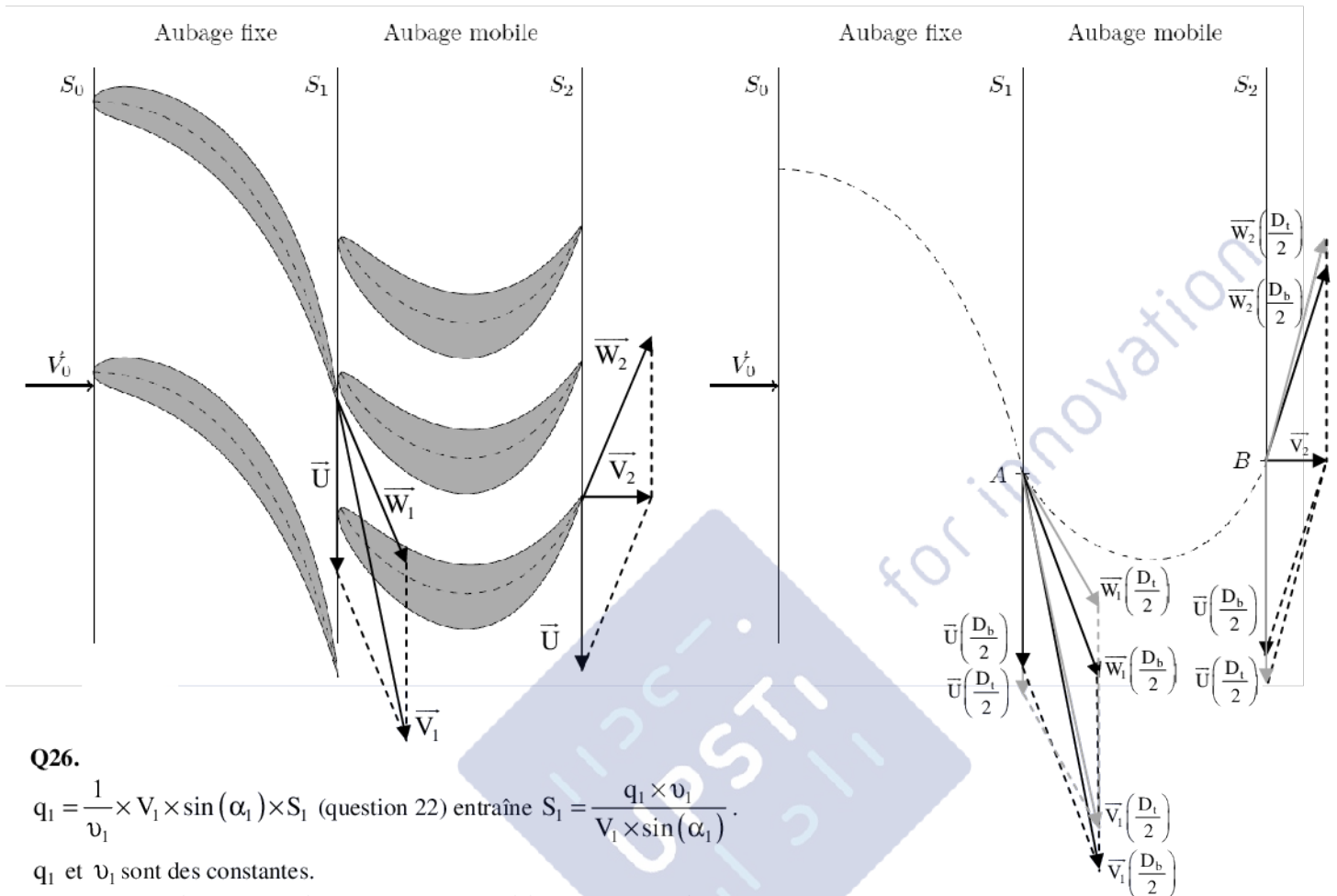
$$V_1\left(\frac{D_b}{2}\right) = \frac{U\left(\frac{D_b}{2}\right)}{\xi\left(\frac{D_b}{2}\right)} = \frac{140}{0,48} = 292 \text{ m/s et } V_1\left(\frac{D_t}{2}\right) = \frac{U\left(\frac{D_t}{2}\right)}{\xi\left(\frac{D_t}{2}\right)} = \frac{161}{0,616} = 261 \text{ m/s.}$$

La question 22 nous donne : $\sin(\alpha_1(r)) = \frac{v_1 \times V_0}{v_0 \times V_1(r)}$.

$$\text{On en déduit } \alpha_1\left(\frac{D_b}{2}\right) = 11^\circ \text{ et } \alpha_1\left(\frac{D_t}{2}\right) = 12,5^\circ.$$

Voir constructions de \vec{W}_1 sur document réponse.

	D_b	D_t
$V_1\left(\frac{D_i}{2}\right)$ en m/s	292	261
$\alpha_1\left(\frac{D_i}{2}\right)$ en $^\circ$	11	12,5
$W_1\left(\frac{D_i}{2}\right)$ en m/s	157	111



Q26.

$$q_1 = \frac{1}{v_1} \times V_1 \times \sin(\alpha_1) \times S_1 \text{ (question 22) entraîne } S_1 = \frac{q_1 \times v_1}{V_1 \times \sin(\alpha_1)}.$$

q_1 et v_1 sont des constantes.

D'après la relation donnée ci-dessus, plus V_1 est faible, plus la section S_1 est grande.

On en déduit donc d'après les résultats de la question 25 que la section au niveau du diamètre de tête D_t est plus grande que celle au niveau du diamètre de base D_b .

La géométrie spatiale de révolution entraîne naturellement cette augmentation de section.

Q27.

On isole le volume de vapeur $\Sigma(r)$.

Il est soumis à l'action de la vapeur située autour de ce volume, à l'action de la pesanteur et à l'action des deux aubes situées de part et d'autre, fermant le volume $\Sigma(r)$.

On néglige l'action de la pesanteur devant les autres actions mécaniques.

De plus, il n'y a pas d'action mécanique suivant \vec{e}_θ exercée par la vapeur située autour du volume $\Sigma(r)$.

Enfin, étant donnée la direction du vecteur vitesse relative $\vec{W}_1(r)$ de la vapeur par rapport aux aubes mobiles, seule l'action mécanique d'une aube sur le fluide sera prise en compte, l'autre est négligée.

On obtient donc :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{e}_\theta = \vec{F}_1 \text{ aube mobile} \rightarrow \text{fluide}(r) \cdot \vec{e}_\theta \times dr = -F_1(r) \times dr$$

$$\text{Et donc : } -F_1(r) \times dr = \frac{q}{N} \times \left(\frac{2 \times dr}{D_t - D_b} \right) \times (\vec{V}_2(r) - \vec{V}_1(r)) \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\text{De plus, } \vec{V}_2(r) \cdot \vec{e}_\theta = 0 \text{ car } \alpha_2(r) = 90^\circ \text{ et } \vec{V}_1(r) \cdot \vec{e}_\theta = \cos(\alpha_1(r)).$$

$$\text{On en déduit donc : } F_1(r) \times dr = \frac{q}{N} \times \left(\frac{2 \times dr}{D_t - D_b} \right) \times V_1(r) \times \cos(\alpha_1(r)).$$

$$\text{Finalement, } F_1(r) = \frac{q}{N} \times \left(\frac{2}{D_t - D_b} \right) \times V_1(r) \times \cos(\alpha_1(r)).$$

Q28.

$$\vec{R}_{1 \text{ aube}} = \vec{R}_{\text{fluide} \rightarrow 1 \text{ aube mobile}} \cdot \vec{e}_\theta$$

On en déduit :
$$\vec{R}_{1 \text{ aube}} = \int_{\frac{D_b}{2}}^{\frac{D_i}{2}} F(r) \times dr \quad \text{et} \quad \vec{C}_{1 \text{ aube}} = \int_{\frac{D_b}{2}}^{\frac{D_i}{2}} \left(r - \frac{D_b}{2} \right) \times F(r) \times dr .$$

Q29.

On doit avoir d'une part :
$$N \geq k_s \times \frac{R_{1 \text{ aube}}}{F_{\max}} = 1,1 \times \frac{25000}{280} = 98,2$$

Et d'autre part :
$$N \geq k_s \times \frac{C_{1 \text{ aube}}}{C_{\max}} = 1,1 \times \frac{1600}{12,5} = 140,8 .$$
 On choisira donc le nombre pair d'aubes : $N = 142$.

Q30.

Pour limiter les défauts d'équilibrage statique, on peut essayer de monter deux par deux les aubes symétriques par rapport à l'axe de rotation, de les placer dans un plan moyen plutôt horizontal, et d'ajuster leur position radiale pour qu'il n'y ait pas de rotation du moyeu. Encore faut-il que s'il y a un faible balourd, cela fasse tourner le rotor. Cela implique de plus un dispositif de réglage de la position radiale des pales.

Le défaut maximal d'équilibrage statique est donné pour la configuration où en prenant une moitié de rotor, toutes les pales ont un défaut de positionnement radial de 1 mm, et pour l'autre moitié, un défaut de -1 mm.

L'angle entre chaque pale d'un étage est :
$$\alpha = \frac{360}{150} = 2,4^\circ .$$

Pour la première moitié (soit 75 pales), la position du centre de gravité est donnée sur une direction par :

$$\frac{m_i \times \left(\frac{D_m}{2} + 0,001 \right) \times \left[\sin(\alpha) + \sin(2 \times \alpha) + \dots + \sin(74 \times \alpha) \right]}{m_i \times 75} \approx 0,1532 \text{ m} .$$

Pour la seconde moitié (75 pales), la position du centre de gravité est alors sur la même direction que précédemment :

$$\frac{-m_i \times \left(\frac{D_m}{2} - 0,001 \right) \times \left[\sin(\alpha) + \sin(2 \times \alpha) + \dots + \sin(74 \times \alpha) \right]}{m_i \times 75} \approx -0,152 \text{ m} .$$

NB : On peut aussi utiliser la position du centre de gravité d'un $\frac{1}{2}$ cercle de rayon r : $\frac{2 \times r}{\pi}$.

Pour la première moitié, cela donne
$$\frac{2 \times \left(\frac{D_m}{2} + 0,001 \right)}{\pi} = 0,1532 \text{ m} .$$

Pour la seconde moitié, cela donne
$$\frac{-2 \times \left(\frac{D_m}{2} - 0,001 \right)}{\pi} = -0,152 \text{ m} .$$

Le centre de gravité de l'ensemble des pales est donc sur cette direction positionné à :

$$\frac{0,1532 - 0,152}{2} = 0,6 \text{ mm} .$$

Le moyeu est équilibré.

On en déduit alors le défaut maximal d'équilibrage statique pour l'ensemble moyeu + pales :

$$\frac{0,6 \times 150 \times 12 \times m_i}{150 \times 12 \times m_i + m_m} = 0,073 \text{ mm} .$$

L'effort du balourd est alors : $F_{\text{balourd}} = (150 \times 12 \times m_i + m_m) \times 0,073 \times 50 \times 2 \times \pi = 340 \text{ kN} .$

Bien que faible, le défaut d'équilibrage statique engendre un effort de balourd important.

Un équilibrage minutieux est donc nécessaire.