

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2012

Filière : TSI

Épreuve : Sciences Industrielles 1

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/Annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Concours Commun Centrale-Supélec 2012
Corrigé du sujet de Sciences Industrielles pour Ingénieur (S2I1)

Stabilisateur cardiaque actif

I Modélisation du Cardiolock1

I.A – Évaluation de l'espace de travail

I.A.1) Détermination du déplacement extremum du point E dû à l'actionneur piézoélectrique

a) Fermeture géométrique

Chaîne fermée 0-1-2-3-4-0

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \vec{x}_0 + L_3 \vec{x}_3 + d_1 \vec{y}_1 - L_1 \vec{x}_1 - a \vec{x}_0 - d_1 \vec{y}_0 = \vec{0}$$

D'où on tire après projection suivant les directions \vec{x}_0 et \vec{y}_0 :

$$\text{Sur } \vec{x}_0 : \quad \lambda + L_3 \cdot \cos \gamma - d_1 \cdot \sin \alpha - L_1 \cos \alpha - a = 0 \quad (1)$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0 : \quad L_3 \cdot \sin \gamma + d_1 \cdot \cos \alpha - L_1 \sin \alpha - d_1 = 0 \quad (2)$$

Après linéarisation, on obtient :

$$\lambda + L_3 - d_1 \cdot \alpha - L_1 - a = 0 \quad (1')$$

$$L_3 \cdot \gamma + d_1 - L_1 \cdot \alpha - d_1 = 0 \quad (2')$$

D'où on tire :

$$\begin{cases} \lambda = L_1 + a - L_3 + d_1 \cdot \alpha \\ \gamma = \frac{L_1 \cdot \alpha}{L_3} \end{cases}$$

b) Expression de λ_0 :

$$\lambda_0 = (\lambda)_{\alpha=0} = L_1 + a - L_3$$

D'où le déplacement x_A :

$$x_A = \lambda - \lambda_0 = d_1 \cdot \alpha$$

Afin de contrer un déplacement positif suivant \vec{y}_0 de l'extrémité E de la tige 5, il est nécessaire de commander un déplacement négatif du solide 4 suivant \vec{x}_0 donc $x_A < 0$.

Calcul de α_{ex} et de γ_{ex} :

$$\alpha_{ex} = \frac{d_1}{x_{A_{ex}}} = -4,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\gamma_{ex} = \frac{L_1 \cdot x_{A_{ex}}}{L_3 \cdot d_1} = \frac{L_1 \cdot x_{A_{ex}}}{L_3 \cdot d_1} = -5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

c) Déplacement y_c du point C suivant \vec{y}_0 :

Le torseur des petits déplacements du solide 1/0 s'écrit en D : $\{U_{1/0}\} = \{\delta \vec{\theta}_{10} = \alpha \cdot \vec{z}_0; \delta \vec{u}_{D,10} = \vec{0}\}_D$

On en déduit $\delta \vec{u}_{C,10} = \delta \vec{u}_{D,10} + \delta \vec{\theta}_{10} \wedge \vec{DC} = \alpha \cdot \vec{z}_0 \wedge L_1 \cdot \vec{x}_1 = L_1 \cdot \alpha \cdot \vec{y}_1$

$$D'o\grave{u} \quad y_C = \overrightarrow{\delta u}_{C,10} \cdot \overrightarrow{y_0} = L_1 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha \approx L_1 \cdot \alpha$$

Application num\u00e9rique :

$$y_{C_{ex}} = L_1 \cdot \alpha_{ex} = -9 \cdot 10^{-5} m$$

D\u00e9placement du point E

Le torseur des petits d\u00e9placements du solide 5/0 s'\u00e9crit en C :

$$\{U_{5/0}\} = \left\{ \overrightarrow{\delta \theta}_{50} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{z_0}; \quad \overrightarrow{\delta u}_{C,50} = L_1 \cdot \alpha \cdot \overrightarrow{y_1} \right\}_C$$

On en d\u00e9duit $\overrightarrow{\delta u}_{E,50} = \overrightarrow{\delta u}_{C,50} + \overrightarrow{\delta \theta}_{50} \wedge \overrightarrow{CE} = L_1 \cdot \alpha \cdot \overrightarrow{y_1} + (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{z_0} \wedge L_5 \cdot \overrightarrow{x_5} = L_1 \cdot \alpha \cdot \overrightarrow{y_1} + L_5 \cdot (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{y_5}$

$$D'o\grave{u} \quad y_E = \overrightarrow{\delta u}_{E,50} \cdot \overrightarrow{y_0} = L_1 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha + L_5 \cdot (\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) \approx (L_1 + L_5) \cdot \alpha + L_5 \cdot \beta$$

Si $\beta = 0$ on a alors :

$$y_{E_{ex}} = (L_1 + L_5) \cdot \alpha_{ex} = -1,38 mm$$

I.A.2) D\u00e9termination du d\u00e9placement du point E d\u00fb \u00e0 l'effort cardiaque

a) Le mod\u00e8le propos\u00e9 est de type poutre encastr\u00e9e en C avec charge ponctuelle en E.

Le torseur de sollicitations est donc du type : $\{T_{sol}\} = \left\{ f_0 \cdot \overrightarrow{y_5}; \quad f_0 \cdot (L_5 - x) \cdot \overrightarrow{z_0} \right\}_G$.

Ce torseur est typique d'un \u00e9tat de sollicitation de type flexion simple.

Remarque :

- *Le sujet donne en introduction de cette partie l'effort $\overrightarrow{f}(t) = f_0 \cdot \overrightarrow{y_0}$ qui est remplac\u00e9 sur le sch\u00e9ma de la question par l'effort $\overrightarrow{f}(t) = f_0 \cdot \overrightarrow{y_5}$. Il aurait pu \u00eatre possible de partir de f_0 port\u00e9 par $\overrightarrow{y_0}$ et montrer qu'il se d\u00e9compose dans la base li\u00e9e \u00e0 5 avec une composante de compression n\u00e9gligeable sur $\overrightarrow{x_5}$ et donc une composante sur $\overrightarrow{y_5}$.*
- *L'angle α_{ex} est d\u00e9fini dans le sens oppos\u00e9 sur la figure 8 par rapport \u00e0 sa d\u00e9finition donn\u00e9e en d\u00e9but de sujet figure 6.*

b) Equation de la d\u00e9form\u00e9e

$$y''(x) = \frac{M f_z(x)}{E_5 \cdot I_{GZ}}$$

Ce qui donne apr\u00e8s double int\u00e9gration et \u00e9limination des constantes pour $x=0$:

$$y(x) = \frac{f_0 \left(\frac{L_5 \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)}{E_5 \cdot I_{GZ}} \quad \text{d'o\grave{u} on tire la fl\u00e8che en E :} \quad y(x = L_5) = \frac{f_0 \cdot L_5^3}{3 \cdot E_5 \cdot I_{GZ}}$$

Application num\u00e9rique :

$$y(x = L_5) = 0,39 mm$$

c) En utilisant le d\u00e9placement extr\u00eame trouv\u00e9 dans l'\u00e9tude 1, on d\u00e9termine l'effort cardiaque maximum :

$$f_{0 \max} = \frac{3 \cdot E_5 \cdot I_{GZ} \cdot y_{E_{ex}}}{L_5^3} = 13,99 N$$

d) L'\u00e9tude pr\u00e9c\u00e9dente peut-\u00eatre conduite \u00e0 partir d'un logiciel de calcul de structure.

I.A.3) Détermination de l'espace de travail

L'extrait de cahier des charges fourni indique que le système cardioloock doit permettre une compensation du déplacement résiduel de 0,1mm dû à un effort de 1N.

Les résultats précédents montrent que le système permet une capacité de déplacement de 1,38mm >>> 0,1mm. En conclusion, le cardioloock respecte la performance statique attendue.

Limite et modèle permettant de relativiser ce résultat :

- Modèle poutre en RDM limité aux hypothèses des petits déplacements,
- Modèle associé aux liaisons élastiques (cinématique réelle, influence des raideurs élastiques)
- solides indéformables (sauf 5).

(mais peu d'info sur le système réel pour conclure)

I.B – Modélisation et correction du comportement de l'actionneur piézoélectrique

I.B.1) Mise en place d'un modèle équivalent à l'actionneur piézoélectrique

a) Au secondaire du transformateur :

$$V_2(p) = Z_2(p)I_2(p) \text{ avec } Z_2(p) = r_m + l_m p + \frac{1}{c_m p}$$

Transport des grandeurs au primaire :

$$V_1(p) = V_{Am}(p) = \frac{1}{N} V_2(p), \text{ pour la tension ;}$$

$$\text{et } I_2(p) = \frac{1}{N} I_m(p) \text{ pour le courant.}$$

En combinant les quatre relations précédentes :

$$V_{Am}(p) = \frac{1}{N} Z_2(p)I_2(p) = \frac{1}{N} \left(r_m + l_m p + \frac{1}{c_m p} \right) \frac{1}{N} I_m(p).$$

Identification du rapport $\frac{V_{Am}(p)}{I_m(p)} = \frac{1}{N^2} \left(r_m + l_m p + \frac{1}{c_m p} \right)$ à l'impédance $Z_1(p) = R_m + L_m p + \frac{1}{C_m p}$ vue du primaire, ce qui permet d'exprimer les trois éléments :

$$R_m = \frac{r_m}{N^2} ; L_m = \frac{l_m}{N^2} \text{ et } C_m = N^2 c_m$$

b) Avec la relation du diviseur de tension sur V_m , la tension aux bornes de C_m , s'exprime par :

$$V_m(p) = \frac{1/C_m p}{1/C_m p + L_m p + R_m} V_{Am}(p) = \frac{1}{1 + R_m C_m p + L_m C_m p^2} V_{Am}(p)$$

Or, par définition : $q_m = C_m V_m$, donc : $\frac{q_m(p)}{V_{Am}(p)} = \frac{C_m}{1 + R_m C_m p + L_m C_m p^2}$. Ce qui permet de déduire que :

$$M(p) = \frac{C_m}{N} \frac{1}{1 + R_m C_m p + L_m C_m p^2}$$

Par identification avec la forme canonique :

$$\frac{M_0}{1 + 2 \frac{z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{C_m}{N} \frac{1}{1 + R_m C_m p + L_m C_m p^2}$$

D'où l'expression des trois coefficients caractéristiques de la fonction de transfert $M(p)$:

$$M_0 = \frac{C_m}{N} ; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} \text{ et } z = \frac{1}{2} R_m \sqrt{\frac{C_m}{L_m}}$$

I.B.2) Modélisation de la boucle de retour

a) Avec les diviseurs de tension : $v_A = \frac{R_0 + \Delta R}{2R_0 + \Delta R - \nu \Delta R} E_0 = \frac{R_0 + \Delta R}{2R_0 + (1 - \nu) \Delta R} E_0$ et

$v_B = \frac{R_0 - \nu \Delta R}{2R_0 + (1 - \nu) \Delta R} E_0$, la tension $u_{AB} = v_A - v_B$ s'exprime :

$$u_{AB} = \left(\frac{R_0 + \Delta R}{2R_0 + (1 - \nu) \Delta R} - \frac{R_0 - \nu \Delta R}{2R_0 + (1 - \nu) \Delta R} \right) E_0 = \frac{(1 + \nu) \Delta R}{2R_0 + (1 - \nu) \Delta R} E_0 = \frac{(1 + \nu) \frac{\Delta R}{R_0}}{2 + (1 - \nu) \frac{\Delta R}{R_0}} E_0$$

Si $\frac{\Delta R}{R_0} \ll 1$, alors : $u_{AB} = \frac{1}{2} (1 + \nu) \frac{\Delta R}{R_0} E_0$.

b) Puisque $\frac{\Delta R}{R_0} = G_F \frac{\Delta L}{L_0}$, alors $u_{AB} = \frac{1}{2} (1 + \nu) G_F \frac{\Delta L}{L_0} E_0$.

Application numérique :

$$U_{AB} = \frac{1 + 0,31}{2} \times 2,1 \times \frac{0,11}{100} \times 10, \text{ soit } U_{AB} = 15,1 \text{ mV}.$$

Un déplacement des céramiques de $-130 \mu\text{m}$ produit une tension en sortie de pont de 15,1 mV.

c) L'ALI3 est monté en réaction négative (notée CR<0), ce qui lui procure un fonctionnement en régime linéaire. Dans ces conditions, avec un gain statique de ALI3 très élevé ($\rightarrow \infty$), la tension d'entrée différentielle reste au voisinage de zéro, donc : $v_{ALI3}^+ = v_{ALI3}^-$ ou $v_{ed3} = v_{ALI3}^+ - v_{ALI3}^- = 0$.

1. Théorème de Millman sur l'entrée + de ALI3 : $v_{ALI3}^- = \frac{\frac{v_1 + v_{cm}}{\frac{R_2}{2} + R_b}}{\frac{2}{R_2}} = \frac{1}{2} (v_1 + v_{cm})$.

2. Théorème de Millman sur l'entrée - de ALI3 (ou un diviseur de tension) : $v_{ALI3}^+ = \frac{\frac{v_2 + 0}{\frac{R_2}{2}}}{\frac{R_2}{2}} = \frac{v_2}{2}$.

3. Puisque $v_{ALI3}^+ = v_{ALI3}^-$, en « égalisant » les deux expressions : $\frac{1}{2} (v_1 + v_{cm}) = \frac{v_2}{2}$, soit $v_{cm} = v_2 - v_1$.

Cet étage de sortie est un amplificateur de différence.

Attention : Sur la figure 16, l'ALI1 est en régime non linéaire (rebouclage sur l'entrée +) : Erreur de sujet !

Les deux autres montages à ALI (1 & 2) respectent les mêmes hypothèses de fonctionnement, donc $v_{ALI1}^+ = 0$ et $v_{ALI2} = 0$.

1. Par conséquent, la tension v_{Rg} aux bornes de R_g (fléchée vers le bas) s'exprime : $v_{Rg} = v_A - v_B$.

2. Cette tension, appliquée à R_g , est parcourue par le courant i , d'où : $i = \frac{v_{Rg}}{R_g} = \frac{v_A - v_B}{R_g}$.

3. De plus, les courants entrants dans les ALI1&2 étant nuls (ALI parfaits), le courant i qui parcourt les trois résistances a pour expression : $i = \frac{v_2 - v_1}{R_1 + R_g + R_1}$.

4. L'élimination de i conduit à : $i = \frac{v_2 - v_1}{R_1 + R_g + R_1} = \frac{v_A - v_B}{R_g}$, soit $v_2 - v_1 = \frac{R_1 + R_g + R_1}{R_g} (v_A - v_B)$.

En réintégrant les notations des tensions, l'amplification du montage est : $\frac{v_{cm}}{u_{AB}} = 1 + 2 \frac{R_1}{R_g}$.

d) Applications numériques

L'amplification de ce montage est $\frac{V_{cm}}{U_{AB}} = K = 1 + 2 \frac{24,7}{0,1}$, soit $K = 495$.

En reprenant le résultat de la question **I.B.2)b)**, $V_{cm} = KU_{AB} = 495 \times 15,1 \times 10^3 = 7,47 \text{ V}$.

La tension maximale issue du conditionnement est juste inférieure aux 7,5 V requis par le cahier des charges, ce qui permet de considérer que ce signal est compatible avec l'électronique de commande.

I.B.3) Réglage du correcteur $C_h(p)$

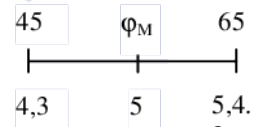
a) Dans l'expression $C_h(p) = K_i \left(\frac{1}{T_i \cdot p} + 1 \right) = \frac{K_i}{T_i \cdot p} + K_i$, on reconnaît les deux actions, intégrale et

proportionnelle du correcteur : le correcteur $C_h(p)$ est de type proportionnel-intégral.

Il permet d'augmenter de un la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte, permettant ainsi une erreur statique nulle en réponse à une consigne en échelon.

b) Pour respecter un temps de réponse à 5% inférieur à 5 ms, par lecture directe, il faut une marge de phase φ_M comprise entre 45 et 65°. Plus précisément, par interpolation linéaire entre $t_r = 4,3$ et 5,4 ms, il faut une

marge de phase $\varphi_M = 45 + \frac{20 \times 0,7}{1,1} = 57,7$, soit $\varphi_M \approx 58^\circ$.



Avec cette marge de phase, la phase réelle est de -122° . Le report sur le diagramme de Bode correspond au pic de gain : $G_1 \approx 14,5 \text{ dB}$.

Il faut donc diminuer le gain de 12 dB, soit $20 \log K_i = -12$, donc : $K_i = 10^{\frac{-12}{20}}$, ou $K_i = 0,25$.

Il faut donc diminuer le gain de 14,5 dB, soit $20 \log K_i = -14,5$, donc : $K_i = 10^{\frac{-14,5}{20}}$, ou $K_i = 0,18$.

I.B.4) Implantation du correcteur $C_h(p)$

a) L'atténuation (l'opposé du gain) est faible dans la zone des fréquences basses et s'accroît au delà de 2,5 kHz. La figure représente le gabarit d'un filtre de type « passe bas ». La bande passante est caractérisée par une atténuation faible et la bande coupée par une atténuation supérieure à 60 dB.

De plus, le respect du théorème de Shannon impose de supprimer toutes les composantes dont la fréquence est supérieure à $\frac{F_e}{2}$, soit $\frac{1}{(2 \cdot T_e)} = \frac{10^3}{(2,0,04)} = 12,5 \text{ kHz}$.

b) L'atténuation maximale de 3 dB en bande passante correspond à la fréquence de coupure du filtre. Or, un filtre atténué de 20 dB par ordre de ce dernier. Pour assurer l'atténuation de 60 dB à la fréquence minimale dans la bande coupée, l'ordre du filtre doit être de 60/20, soit un filtre d'ordre 3 au minimum.

c) Avec les mêmes hypothèses de fonctionnement qu'à la question **I.B.2-c)** : $V_{ALI}^+ = V_{ALI}^- = 0$.

Le théorème de Millman est appliqué en deux points du montage :

- À l'entrée « - », $V_{ALI}^- = 0 = \frac{\frac{V_e}{1/j\omega C} + \frac{V_0}{R}}{j\omega C + \frac{1}{R}}$, soit $V_0 = -j\omega R C V_e$;

- Au point commun des quatre composants, $V_0 = \frac{\frac{V_{ef}}{R} + \frac{V_e}{R} + \frac{0}{R} + \frac{0}{1/j\omega \cdot aC}}{\frac{3}{R} + j\omega \cdot aC}$

Après élimination de V_0 et simplifications :

$$(\underline{V}_0) - j\omega RC \underline{V}_\varepsilon = \frac{\underline{V}_{\varepsilon f} + \underline{V}_\varepsilon}{3 + j\omega \cdot aRC}$$

$$\text{Soit : } \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_\varepsilon(j\omega)}{\underline{V}_{\varepsilon f}(j\omega)} = \frac{-1}{1 + 3RC(j\omega) + a(RC)^2(j\omega)^2}$$

L'identification de cette expression avec celle proposée donne : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{aRC}}$ et $\frac{1}{Q\omega_0} = 3RC$.

Ce qui conduit aux expressions des deux coefficients :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{aRC}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{a}}{3}$$

d) Si $Q=1$, alors, avec la seconde relation : $\sqrt{a} = 3$. An : $a=9$.

e) Avec la première, $2\pi f_0 = \frac{1}{3RC}$, donc $RC = \frac{1}{6\pi f_0}$. An : $RC = \frac{1}{6\pi \times 2,5 \cdot 10^3}$, donc $RC = 21,2 \mu\text{s}$.

f) Avec $C_h(p) : V_{Ah}(p) = K_i \frac{1+T_i p}{T_i p} V_\varepsilon(p)$, donc $T_i p V_{Ah}(p) = K_i V_\varepsilon(p) + K_i T_i p V_\varepsilon(p)$.

La multiplication par p dans le domaine de Laplace correspond à la dérivation temporelle, donc :

$$T_i \frac{dv_{Ah}(t)}{dt} = K_i v_\varepsilon(t) + K_i T_i \frac{dv_\varepsilon(t)}{dt}$$

Ce qui conduit à identifier les trois coefficients :

$$a = T_i, \quad b = K_i \text{ et } c = K_i T_i.$$

g) L'intégration des deux membres de l'équation différentielle entre $(n-1)T_e$ et nT_e donne :

$$T_i \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} \frac{dv_{Ah}(t)}{dt} dt = K_i \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} v_\varepsilon(t) dt + K_i T_i \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} \frac{dv_\varepsilon(t)}{dt} dt$$

Qui se réduit en :

$$v_{Ah}(nT_e) - v_{Ah}((n-1)T_e) = \frac{K_i}{T_i} \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} v_\varepsilon(t) dt + K_i (v_\varepsilon(nT_e) - v_\varepsilon((n-1)T_e)).$$

Soit, en introduisant les notations discrètes :

$$v_{Ah}[n] - v_{Ah}[n-1] = \frac{K_i}{T_i} \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} v_\varepsilon(t) dt + K_i (v_\varepsilon[n] - v_\varepsilon[n-1]).$$

h) Entre les instants $(n-1)T_e$ et nT_e , l'aire sous la courbe est : $\Delta S = \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} \mathfrak{A}(t) dt$.

Si, entre ces instants, la courbe est assimilée à un segment de droite, alors :

$$\Delta S = \mathfrak{A}[n-1] \Delta t + \frac{1}{2} (\mathfrak{A}[n] - \mathfrak{A}[n-1]) \Delta t \text{ avec } \Delta t = nT_e - (n-1)T_e = T_e.$$

Après simplifications, l'approximation demandée est obtenue :

$$\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} \mathfrak{A}(t) dt \approx \frac{T_e}{2} (\mathfrak{A}[n] + \mathfrak{A}[n-1])$$

i) Le résultat précédent est appliqué à la relation issue de l'intégration de l'équation différentielle (qst g) :

$$v_{Ah}[n] - v_{Ah}[n-1] = \frac{K_i T_e}{T_i} (v_\varepsilon[n] + v_\varepsilon[n-1]) + K_i (v_\varepsilon[n] - v_\varepsilon[n-1])$$

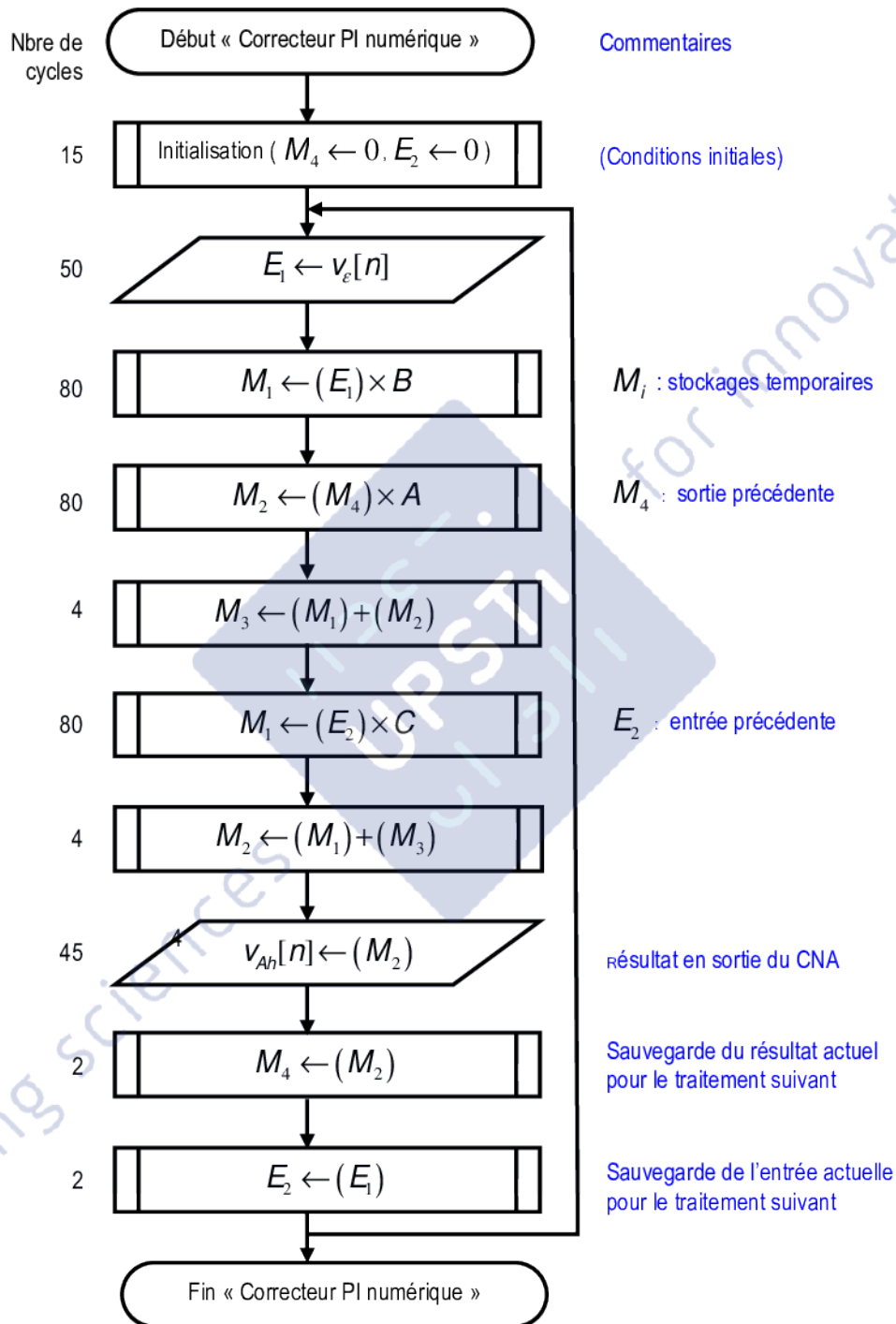
Après simplifications, la relation de récurrence apparaît :

$$v_{Ah}[n] = v_{Ah}[n-1] + K_i \left(\frac{T_e}{2T_i} + 1 \right) v_\varepsilon[n] + K_i \left(\frac{T_e}{2T_i} - 1 \right) v_\varepsilon[n-1]$$

Ce qui mène à l'identification des trois coefficients :

$$A=1, B=K_i\left(\frac{T_e}{2T_i}+1\right) \text{ et } C=K_i\left(\frac{T_e}{2T_i}-1\right).$$

j) Tracé de l'organigramme et indication des durées par opération d'évaluation de l'algorithme de traitement.



k) La somme des nombres de cycles de chaque étape, en excluant l'initialisation, est :

$$NB_{pi} = 50 + 3 \times 80 + 2 \times 4 + 45 + 2 \times 2 = 347 \text{ (le premier traitement utilise 15 cycles de plus).}$$

Après l'initialisation, le traitement du correcteur numérique dure $NB_{pi} = 347$ cycles.

Chaque cycle a une durée de 100 ns, donc la durée d'élaboration d'une valeur en sortie du correcteur PI est :

$$T_{pi} = 347 \times 0,1, \text{ soit } T_{pi} = 34,7 \mu s.$$

La durée est inférieure à celle entre deux échantillons (40 μ s). Le traitement peut être réalisé par ce microcontrôleur.

I.C – Modélisation et identification : mise en place d'un modèle pour la commande

I.C.1) Calcul des fonctions de transfert

a) Déplacement du point E

Le torseur des petits déplacements du solide 5/0 s'écrit en C :

$$\{U_{5/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\delta\theta}_{50} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{z_0}; \\ \overrightarrow{\delta u}_{C,50} = L_1 \cdot \alpha \cdot \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_C$$

On en déduit $\overrightarrow{\delta u}_{E,50} = \overrightarrow{\delta u}_{C,50} + \overrightarrow{\delta\theta}_{50} \wedge \overrightarrow{CE} = L_1 \cdot \alpha \cdot \overrightarrow{y_1} + (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{z_0} \wedge L_5 \cdot \overrightarrow{x_5} = L_1 \cdot \alpha \cdot \overrightarrow{y_1} + L_5 \cdot (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{y_5}$

D'où $y_E = \overrightarrow{\delta u}_{E,50} \cdot \overrightarrow{y_0} = L_1 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha + L_5 \cdot (\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) \approx (L_1 + L_5) \cdot \alpha + L_5 \cdot \beta = y(t)$

b)

1. Le solide 5 est soumis aux actions de la liaison $\{L_{1/5}\}$ et à l'action cardiaque $\overrightarrow{f}(t) = f \cdot \overrightarrow{y_0}$

On en déduit le moment en C en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{M}_{C,ex \rightarrow 5} = -K_2 \cdot \beta - f_2 \cdot \dot{\beta} + L_5 \cdot f(t)$$

2. Calcul du moment d'inertie I_5 de la tige 5 par rapport à l'axe $(C, \overrightarrow{z_0})$:

$$I_5 = m_5 \frac{L_5^2}{3}; \text{ résultat de cours pour une barre homogène de longueur } L_5 \text{ et de masse } m_5$$

3. Calcul du moment cinétique de la tige 5 au point C et en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$\overrightarrow{\sigma}_{C,5/0} = \tilde{I}_{(C,5)} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{5/0} + m_5 \cdot \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{V}_{C,5/0}$$

$$\text{Avec : } \overrightarrow{\Omega}_{5/0} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot \overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{CG} = \frac{L_5}{2} \cdot \overrightarrow{x_5}, \overrightarrow{V}_{C,5/0} = L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} \text{ et } \tilde{I}_{(C,5)} = \left. \begin{array}{l} \frac{m_5 \cdot r^2}{2} \\ \frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} \\ \frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} \end{array} \right|_{B_5}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{C,5/0} = \left(\frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} + \frac{m_5 \cdot L_1 \cdot L_5}{2} \right) \cdot \dot{\alpha} + \frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} \cdot \dot{\beta}$$

4. Calcul du moment dynamique de la tige 5 au point C et en projection sur $\overrightarrow{z_0}$:

$\overrightarrow{z_0}$ étant une direction fixe, on peut écrire :

$$\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta}_{C,5/0} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma}_{C,5/0} \cdot \overrightarrow{z_0}) + (m_5 \cdot \overrightarrow{V}_{C,5/0} \wedge \overrightarrow{V}_{G,5/0}) \cdot \overrightarrow{z_0}$$

$$\text{Avec : } \overrightarrow{V}_{G,5/0} = L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} + \frac{L_5}{2} \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot \overrightarrow{y_5}$$

Calculs intermédiaires :

$$\circ (m_5 \cdot \overrightarrow{V}_{C,5/0} \wedge \overrightarrow{V}_{G,5/0}) \cdot \overrightarrow{z_0} = m_5 \cdot \frac{L_1 \cdot L_5}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot (\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{y_5}) \cdot \overrightarrow{z_0} = m_5 \cdot \frac{L_1 \cdot L_5}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cdot \sin(\beta)$$

Dans l'hypothèse des petits déplacements, on négligera les infiniment petits d'ordre 2 et on assimile $\sin(\beta) \approx \beta$

On obtient alors : $(m_5 \overrightarrow{V_{C,5/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G,5/0}}) \cdot \overrightarrow{z_0} \approx 0$

$$\circ \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{C,5/0}} \cdot \overrightarrow{z_0}) = \left(\frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} + \frac{m_5 \cdot L_1 \cdot L_5}{2} \right) \ddot{\alpha} + \frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} \ddot{\beta}$$

D'où on obtient :

$$\overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{\delta_{C,5/0}} = \left(\frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} + \frac{m_5 \cdot L_1 \cdot L_5}{2} \right) \ddot{\alpha} + \frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} \ddot{\beta}$$

On applique ensuite le théorème du moment dynamique en C en projection sur $\overrightarrow{z_0}$ sur le solide 5 dans son mouvement par rapport au bâti 0 :

$$\overrightarrow{\delta_{C,5/0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = M_{C,ext \rightarrow 5} \cdot \overrightarrow{z_0} \Leftrightarrow \left(\frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} + \frac{m_5 \cdot L_1 \cdot L_5}{2} \right) \ddot{\alpha} + \frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} \ddot{\beta} = -K_2 \cdot \beta - f_2 \cdot \dot{\beta} + L_5 \cdot f(t)$$

On en déduit : $M_{21} = \frac{m_5 \cdot L_5^2}{3} + \frac{m_5 \cdot L_1 \cdot L_5}{2}$ et $M_{22} = \frac{m_5 \cdot L_5^2}{3}$

c)
 ○ La relation obtenue en a permet d'exprimer $Y(p)$:

$$y(t) = (L_1 + L_5) \alpha + L_5 \beta \xrightarrow{L} Y(p) = (L_1 + L_5) \alpha(p) + L_5 \beta(p)$$

○ On applique la transformée de Laplace à l'équation issue du théorème du moment dynamique :

$$M_{22} \ddot{\beta} + f_2 \dot{\beta} + K_2 \beta = L_5 f - M_{21} \ddot{\alpha}$$

$$\xrightarrow{L} M_{22} \cdot p^2 \cdot \beta(p) + f_2 \cdot p \cdot \beta(p) + K_2 \cdot \beta(p) = L_5 \cdot F(p) - M_{21} \cdot p^2 \cdot \alpha(p)$$

On en tire : $\beta(p) = \frac{L_5 \cdot F(p) - M_{21} \cdot p^2 \cdot \alpha(p)}{M_{22} \cdot p^2 + f_2 \cdot p + K_2}$

D'où :

$$Y(p) = (L_1 + L_5) \alpha(p) + L_5 \cdot \frac{L_5 \cdot F(p) - M_{21} \cdot p^2 \cdot \alpha(p)}{M_{22} \cdot p^2 + f_2 \cdot p + K_2} = \underbrace{\frac{(L_1 + L_5) - M_{21} \cdot p^2}{M_{22} \cdot p^2 + f_2 \cdot p + K_2}}_{G(p)} \cdot \alpha(p) + \underbrace{\frac{L_5^2}{M_{22} \cdot p^2 + f_2 \cdot p + K_2}}_{H(p)} \cdot F(p)$$

Après réorganisation des fonctions G(p) et H(p), on retrouve les expressions données dans le sujet.

d) Selon le cahier des charges, le domaine fréquentiel des battements du cœur s'étend jusqu'à 20 Hz (125 rad/s). En observant la figure n°23, les réponses (numérateur complet et numérateur réduit à un gain pur) sont identiques jusqu'à 1000 rad/s, pulsation très largement supérieure à celle des battements cardiaques.

En conséquence, le numérateur $NumG(p) = \frac{(L_1 + L_5) M_{22} - L_5 M_{21}}{K_2} p^2 + \frac{L_1 + L_5}{K_2} f_2 p + (L_1 + L_5)$

$G(p)$ se réduit au gain pur $G_0 = (L_1 + L_5)$ dans le domaine des basses fréquences (ie : $p = j\omega \rightarrow 0$). La lecture du diagramme de Bode en gain complet montre que cette condition est réalisée pour $\omega \approx 150 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,

soit $f < \frac{150}{2\pi} \approx 24 \text{ Hz}$. D'ailleurs, la lecture du tracé du gain de $G(p)$ tenant compte d'un gain pur le confirme.

Cette fréquence est supérieure à la fréquence maximale des battements cardiaques maximale.
En conséquence, le numérateur de $G(p)$ peut être assimilé à un terme constant.

I.C.2) Étude de l'influence du myocarde sur le comportement du Cardioloock1

—) Peu de commentaires. L'ordre de grandeur des paramètres est respecté. Les modifications sont faibles. Il peut donc être envisageable de retenir le modèle défini en I.C.1. (sans myocarde) car il est le plus oscillant. Toute correction sur ce modèle sera adaptée au modèle avec myocarde.

II Modèle pour la commande et vérification des performances

II.A – Évaluation des performances du Cardioloock1 perturbé par le mouvement cardiaque

a) Écriture directe de ε_c : $\varepsilon_c(p) = Y_{cons}(p) - Y(p)$ avec $Y(p) = \frac{1}{D(p)}(N_2 F(p) + N_1 BR(p)\varepsilon_c(p))$.

En substituant $Y(p)$: $\varepsilon_c(p)D(p) = D(p)Y_{cons}(p) - (N_2 F(p) + N_1 BR(p)\varepsilon_c(p))$,

et en isolant ε_c : $\varepsilon_c(p)(D(p) + N_1 BR(p)) = D(p)Y_{cons}(p) - N_2 F(p)$.

Nous obtenons :

$$\varepsilon_c(p) = \frac{D(p)}{D(p) + N_1 BR(p)} Y_{cons}(p) - \frac{N_2}{D(p) + N_1 BR(p)} F(p)$$

Ce résultat se présente sous la forme d'une somme qui permet d'identifier les deux fonctions de transferts :

$$J(p) = \frac{D(p)}{D(p) + N_1 BR(p)} \quad \text{et} \quad K(p) = -\frac{N_2}{D(p) + N_1 BR(p)}$$

b) Un correcteur PI est implanté dans la chaîne directe, ce qui induit que fonction de transfert en boucle ouverte

($H_{BO}(p) = \frac{N_1 BR(p)}{D(p)} = \frac{K_{iR} N_1 B(1 + \tau_{iR} p)}{\tau_{iR} p D(p)}$) est de classe 1.

En conséquence, en réponse à une consigne en échelon, l'erreur statique ε_{cl} est nulle.

c) À partir de son expression, $\varepsilon_{c2}(p=j\omega) = |K(p=j\omega)| |F(p=j\omega)|$: $|\varepsilon_{c2}(j\omega_c)| = |K(j\omega_c)| |F(j\omega_c)|$.

Lecture de $|K(j\omega_c)|$ sur le diagramme de Bode à $\omega_c = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: $|K(j\omega_c)| = 10^{\frac{108,6}{20}} = 3,7 \cdot 10^{-6}$.

Donc (an) : $|\varepsilon_{c2}(j\omega_c)| = 3,7 \cdot 10^{-6} \times 4$, donc $|\varepsilon_{c2}(j\omega_c)| = 14,8 \mu\text{m}$.

d) Le résultat précédent est $0,1/0,0148=6,8$ fois plus petit que la valeur fixée par le cahier des charges.

De plus, cette valeur correspond au gain maximal $|K(j\omega)|$ lu sur la courbe. Par conséquent :

l'erreur évaluée, maximale, respecte le cahier des charges sur toute la plage des fréquences cardiaques.

e) L'évaluation est reprise « à l'envers » pour $f_{0\max}$: $f_{0\max} = |F(j\omega_c)|_{\max} = \frac{|\varepsilon_{c2}(j\omega_c)|_{\max}}{|K(j\omega_c)|_{\max}}$.

Application numérique : $f_{0\max} = \frac{0,1 \times 10^{-3}}{3,7 \cdot 10^{-6}} = 27$.

L'écart maximal est de 0,1 mm est atteint pour l'effort maximal $f_{0\max} = 27 \text{ N}$.

II.B – Évaluation de l'influence du mouvement respiratoire

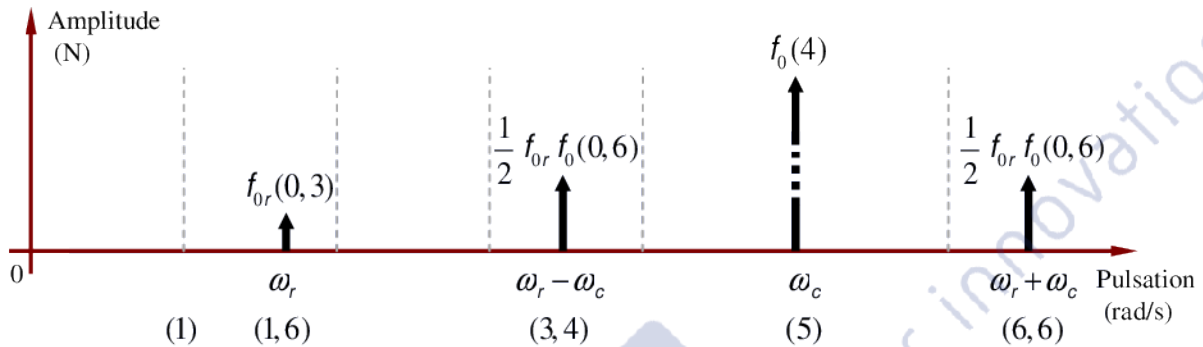
a) Dans l'expression donnée de $f(t)$, nous pouvons repérer deux signaux sinusoïdaux isolés : le signal modulant à la pulsation la plus basse ω_r et la porteuse à ω_c . Le troisième est le produit résultant de la modulation. Comme la porteuse apparaît seule, la modulation utilisée est avec porteuse.

Remarque : le taux de modulation, donné dans l'équation $(1+f_{0r} \sin(\omega_r t + \phi_r))$, est ici de 0,3. Le sujet affecte une unité à cette valeur f_{0r} , ce qui ne respecte pas l'absence de dimension du taux de modulation.

b) La transformation du signal $f(t)$ en une somme de fonctions circulaires donne (pulsations croissantes) :

$$f(t) = f_{0r} \sin(\omega_r t + \varphi_r) + \frac{1}{2} f_{0r} f_0 \cos((\omega_c - \omega_r)t - \varphi_r) + f_0 \sin(\omega_c t) + \frac{1}{2} f_{0r} f_0 \cos((\omega_c + \omega_r)t + \varphi_r)$$

Cette expression fait apparaître quatre termes à des pulsations différentes qui sont autant de raies dans le spectre fréquentiel du signal $f(t)$, représenté ci-dessous (mais pas à l'échelle).



c) La modulation engendrée par la respiration ne perturbe l'effort cardiaque que de $0,6/4 = 0,15$, soit d'un facteur de 15 % dans le domaine fréquentiel de la pulsation cardiaque ω_c . Cette perturbation restant modérée vis à vis de f_0 , nous pouvons ne considérer que le mouvement cardiaque dans cette étude.

III Construction d'une valeur estimée de $F(p)$

III.A – Estimateur « idéal » : évaluation de C_a

Évaluation de $Y(p)$:
$$Y(p) = \frac{1}{D(p)} (N_2 F(p) + N_1 B (R(p) \varepsilon_c(p) - C_a \hat{F}(p)))$$

Pour compenser la perturbation, il faut que Y ne soit liée qu'à ε_c , ce qui conduit à la condition :

$$N_2 F(p) - N_1 B C_a \hat{F}(p) = 0$$

Ce qui conduit à :
$$C_a = \frac{N_2 F(p)}{N_1 B \hat{F}(p)}$$

Puisque l'estimateur est idéal, $\hat{F}(p) = F(p)$ et la relation devient :
$$C_a = \frac{N_2}{N_1 B}$$

Application numérique : $C_a = \frac{N_2}{N_1 B} = \frac{L_5^2}{KB}$, on a $C_a = \frac{0,3^2}{238 \times 33,33} = 11,3 \cdot 10^{-6}$, soit $C_a = 11,3 \mu\text{m/N}$.

III.B – Estimation de $\hat{F}(p)$: structure de l'estimateur

Remarque 1 : l'asservissement de $\hat{F}(p)$ à $F(p)$ utilisant un correcteur PI permet d'assurer $\hat{F}(p) = F(p)$ en régime statique.

Remarque 2 : les -109 dB indiquées correspondent bien au résultat évalué en II.A.c).

Atténuation totale résultant des actions cumulées asservissement-estimateur : $A_{tot} = 109 + 26 = 135$ dB.

Pour 4 N, dans le cas le plus défavorable, le déplacement résiduel est maintenant : $|\varepsilon_\sigma| = \varepsilon_\sigma = f_0 \times 10^{\frac{A_{tot}}{20}}$.

Donc : $\varepsilon_\sigma = 4 \times 10^{\frac{135}{20}} = 7,1 \cdot 10^{-7}$, soit $\varepsilon_\sigma = 0,71 \mu\text{m}$.

Cette erreur est bien inférieure aux $\varepsilon_{\sigma\text{max}} = 25 \mu\text{m}$ fixés dans le cahier des charges (35 fois moins).

L'action de l'estimateur a clairement diminué le déplacement résiduel pour un effort cardiaque de 4 N.

Pour atteindre ce déplacement $\varepsilon_{\sigma_{\max}}$, il faut appliquer l'effort : $f_{0\max} = 25 \times 10^{-6} / 10^{-\frac{135}{20}} = 562 \text{ N}$

Ou $f_{0\max} = 25 \times 10^{-6} / 10^{-\frac{135}{20}} = 141,6 \text{ N}$

Cet effort, 35 fois plus élevé que celui utilisé pour les évaluations (4 N du « cas défavorable »), permet de valider le cahier des charges et considérer un facteur de sécurité pour une surcharge possible.

Par contre, nous pouvons noter que même précédemment l'atténuation de 109 dB permettait de respecter le déplacement résiduel dynamique maximal.

Seul un modèle équivalent de la perturbation F(p) trop simplifié explique l'intérêt d'ajouter cet estimateur.

IV Analyse de la stabilité et conclusion sur l'étude

IV.A – Étude de la stabilité

Pour $G=0$, la phase est $\varphi = -100^\circ$. La marge de phase $\varphi_M = -100 - (-180) = 80^\circ$.

La marge de phase du système en boucle ouverte utilisant un estimateur est bien supérieure à 60° , ce qui procure une très bonne stabilité au système en boucle fermée.

IV.B – Conclusion sur l'étude

L'étude menée ici a successivement modélisé le système cardioblock 1, puis identifié les paramètres essentiels. Les performances ont été évaluées au travers du calcul de l'erreur en régime statique. Mais la perturbation occasionnée par l'effort dû au mouvement résiduel du muscle cardiaque ne permet plus d'assurer un déplacement résiduel en régime dynamique compatible avec les contraintes imposées par le cahier des charges. Pour améliorer les performances, un estimateur de l'effort perturbateur est introduit pour atténuer considérablement son effet, ce qui permet de valider l'écart résiduel maximal. Pour terminer, l'examen de la marge de phase du système en boucle ouverte conduit à considérer un système fortement stable en boucle fermée. Les évaluations montrent que l'accroissement de l'effort du muscle cardiaque conduit à des performances tout aussi satisfaisantes en statique. Cependant, la valeur assez élevée de la marge de phase montrerait qu'il fait preuve d'une certaine lenteur. Une amélioration de la rapidité pourrait être obtenue par un accroissement du gain de boucle en accord avec la marge de phase.

Pour compléter, voici quelques informations obtenues sur l'Internet : http://newlsiit.u-strasbg.fr/avr_fr/index.php/Cardioblock

Pour compléter les remarques précédentes : Après l'étude des caractéristiques du système, le sujet a permis d'évaluer sa réponse à la perturbation principale, les battements cardiaques :

- En simplifiant cette perturbation (perturbation sinusoïdale complétée par la prise en compte des mouvements respiratoires) ;
- En utilisant une estimation de cette perturbation.

Seul, l'utilisation d'un capteur (mesure de la position des doigts de stabilisation) doit permettre d'annuler ce mouvement résiduel. Pour ce faire, l'emploi d'une caméra associée à un traitement numérique est une solution envisageable car l'implantation d'un capteur de position est délicate dans ce système. De plus, les fréquences de travail (quelques Hertz) sont relativement faibles pour envisager une telle mise en œuvre.