

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2012

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/Annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Récupération d'énergie au freinage sur véhicules électriques

Pertinence de la récupération d'énergie au freinage
Analyse externe

Q1. Indiquer trois raisons incitant les usagers des véhicules électriques à décélérer sans utiliser la pédale de frein :

- décélération reproductible et constante du système
- pas d'usure mécanique
- possibilité de récupérer l'énergie pour charger les batteries au lieu de la dissiper par transfert thermique

Séquence type urbaine

Q2. Distance parcourue dans le cas d'un freinage « normal » :

hypothèse : le mouvement est rectiligne sur route horizontale, la décélération est constante. On peut donc écrire directement :

$$V(t) = \gamma_n \cdot t + V_0 \quad \text{et} \quad x(t) = \gamma_n \cdot \frac{t^2}{2} + V_0 \cdot t$$

Les conditions initiales et finales $V(0) = V_0 = 50 \text{ km.h}^{-1}$ et $V(t_f) = 0$ permettent de

déterminer la distance soit $x(t_f) = \frac{\gamma_n}{2} \cdot \left(\frac{-V_0}{\gamma_n}\right)^2 + V_0 \cdot \left(\frac{-V_0}{\gamma_n}\right)$

L'application numérique, en prenant garde aux unités, conduit à $x(t_f) = 48,22 \text{ m}$. Le critère est respecté puisqu'il était proposé 50 m .

Q3. Evolution temporelle de la vitesse du véhicule par rapport au sol lors d'une séquence urbaine type telle que définie dans le sujet :

il s'agit d'une loi en trapèze classique.

sur l'intervalle $[t_0, t_1]: V_h(t) = \gamma_n \cdot (t - t_0)$

sur l'intervalle $[t_1, t_2]: V_h(t) = V_0$

sur l'intervalle $[t_2, t_3]: V_h(t) = -\gamma_n \cdot (t - t_2) + V_0$



Il manque dans l'énoncé de la question les variables (t_0, t) .

Avec les données du problème on obtient :

$$t_1 - t_0 = \frac{V_0}{\gamma_n} = \frac{3,6}{2} = 6,94 \text{ s} ;$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\text{distance parcourue}}{V_0} = \frac{500}{\frac{50}{3,6}} = 36 \text{ s}$$

et par symétrie, $t_3 - t_2 = t_1 - t_0 = 6,94 \text{ s}$.

Q4. Pertinence de la récupération d'énergie au freinage

hypothèses : inertie des pièces en rotation négligée, non glissement des roues sur le sol, déplacement sur route horizontale.

on applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble véhicule soit :

$$\frac{dT \{véhicule/R\}}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

calcul de la dérivée de l'énergie cinétique : $M \cdot \gamma_n \cdot V_h(t)$

calcul de la puissance des efforts extérieurs :

seule l'action aérodynamique et de résistance au roulement contribue, car il n'y a pas glissement et la pesanteur ne « travaille » pas . Dans ce cas il vient :

$$P_{ext} = -f \cdot V_h(t)^2$$

On a ainsi $P_{int} = M \cdot \gamma_n \cdot V_h(t) + f \cdot V_h(t)^2$

Or la puissance des inter efforts correspond à la puissance mécanique fournie par la transmission aux roues. Pour obtenir la puissance électrique fournie par la batterie il faut la majorer à l'aide du rendement (appelé facteur de perte dans le sujet) soit :

$$P_{int} = \eta \times P_{elec} \quad \text{ce qui donne} \quad P_{elec} = \frac{1}{\eta} \cdot P_{int} = \frac{1}{\eta} \cdot [M \cdot \gamma_n \cdot V_h(t) + f \cdot V_h(t)^2]$$

Q5. Expression de l'énergie :

il faut intégrer l'expression obtenue entre les instants t_0 et t_1 soit sur la durée $t_a = \frac{V_0}{\gamma_n}$

avec $V_h(t) = \gamma_n \cdot t$.

Cela conduit à : $E = \int_0^{t_a} P_{elec}(t) dt = \frac{\gamma_n^2}{\eta} \cdot \left[\frac{M \cdot t^2}{2} + \frac{f \cdot t^3}{3} \right]_0^{t_a}$ en remplaçant t_a par son

expression fonction de V_0 et γ_n l'application numérique donne :

$$E = 230665 J \approx 231 kJ$$

Remarque : attention à l'unité de la vitesse V_0 donnée !

Q6. Energie durant la phase à vitesse constante :

il n'y a plus accélération, donc l'énergie à fournir doit compenser la seule dissipation due à

l'action aérodynamique, ainsi $E = \int_{t_1}^{t_2} P_{elec}(t) dt = \frac{1}{\eta} \cdot f \cdot V_0^2 (t_2 - t_1) = 158730 J \approx 159 kJ$

Q7. Comparaison des résultats

Sur la plage de vitesse considérée, la différence d'énergie récupérée entre les deux modèles est faible (environ 5%). Cela permet de penser que le modèle sans frottement visqueux est suffisant pour représenter convenablement le phénomène physique. La dissipation due aux forces aérodynamiques et à la résistance au roulement est négligeable devant celle produite par la machine électrique.

Q8. Conclusion

L'idée de récupération d'énergie lors d'une séquence urbaine type est donc pertinente. On récupère environ un quart de l'énergie dépensée (103 kJ par rapport à $159 + 231 \text{ kJ}$)

Q9. Limites du freinage électrique :

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la voiture, on obtient :

bilan des actions :

- action du sol sur les roues avec considération d'une action tangentielle $T_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}}$ qui s'oppose au glissement éventuel (loi de Coulomb).
- pesanteur

L'équation de la résultante en projection sur \vec{x} conduit à : $T_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}} = M \times \gamma(t)$. Or $\gamma(t) = -\gamma_n = \text{cte}$ d'où $T_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}} = -M \times \gamma_n$.

Pour déterminer le couple de freinage, il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique aux roues, en négligeant l'inertie et en considérant la liaison roue véhicule comme parfaite.

Bilan des actions :

- couple de freinage
- action du sol sur les roues
- action de liaison roue moyeu
- pesanteur

On obtient avec l'équation de moment sur l'axe de l'essieu : $-C_F(t) + T_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}} \times R_r = 0$.

Soit $C_F(t) = -\gamma_n \times M \times R_r = -2 \times 1600 \times 0,3 = 960 \text{ N.m}$

Q10. Performance du système de freinage électrique sans commande adaptée :

A la lecture du graphe fourni, on constate :

- temps de réponse à 5% d'environ $1,2 \text{ s}$
- Oscillation, dépassement : $D_{r1} \approx \frac{3,8 - 2}{2} \times 100 = 90\%$
- période : environ $0,18 \text{ s}$

Par rapport au cahier des charges fourni, le critère de dépassement et le critère du nombre d'oscillations ne sont pas validés : il faut une commande adaptée.

Q11. Non glissement lors d'un freinage nominal :

Il faut déterminer la valeur de l'action tangentielle lors d'un freinage nominal soit

$$T_{sol \rightarrow roue} = -M \times \gamma_n = 1600 \times 2 = 3200 \text{ N}$$

Cette valeur doit être compatible avec les lois de Coulomb à la limite du glissement soit :

$$T_{max} = f \times F_{av} = 0,9 \times 1600 \times (0,26 \times 2 + 0,48 \times 10) = 7661 \text{ N}$$

On constate que la valeur nécessaire est inférieure à la valeur limite, il n'y a pas glissement.

Q12. Freinage d'urgence :

dans ce cas, l'accélération vaut $\gamma_u = -6,43 \text{ m.s}^{-2}$, la valeur nécessaire au freinage

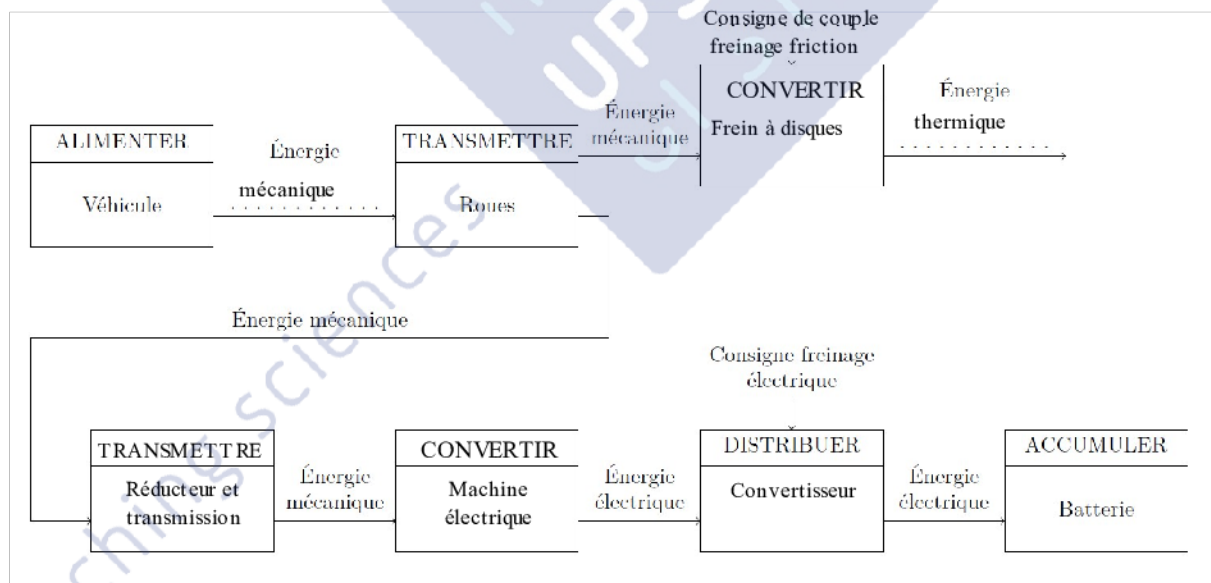
$$T_{sol \rightarrow roue} = -M \times \gamma_u = 10288 \text{ N}$$

et la valeur limite maximale possible

$$T_{max} = f \times F_{av} = 0,9 \times 1600 \times (-0,26 \times -6,43 + 0,48 \times 10) \approx 9319 \text{ N}$$

Cette fois ci il y a incompatibilité avec les lois de Coulomb, les roues glissent.

Q13. Structure de la chaîne d'énergie lors de la récupération :



Remarque : comme proposé dans le sujet, il n'est pas tenu compte de l'énergie potentielle (véhicule se déplaçant sur route horizontale).

Q14. Expression des consignes de couple dans le domaine de Laplace :

On sait que $C_{fe}(p) = \frac{C_F}{p}$ donc $C_{ec}(p) = C_{fe}(p) \times H_{Filtrage}(p) = \frac{C_F}{p} \times \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p}$ et

$$C_{fric}(p) = C_{fe}(p) - C_{ec}(p) = \frac{C_F}{p} \times \left(1 - \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p}\right) = \frac{C_F \times \tau_1}{1 + \tau_1 \cdot p}$$

Expression temporelle de la réponse d'un système du 1er ordre à un échelon :

$$C_{ec}(t) = C_F \times (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) \cdot u(t)$$

Q15. Détermination de l'énergie récupérée dans la batterie :

$P(t) = C_{ec}(t) \times \omega_r(t) = C_F \times (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) \times (\omega_{r0} - \omega \cdot t)$ soit $E = \int_0^{t_f} P(t) dt$. Il faut faire une intégration par partie et cela conduit à

$E = C_F \times (\omega_{r0} \cdot t_f - \frac{\omega}{2} \cdot t_f^2 + e^{-\frac{t_f}{\tau_1}} \times (\tau_1 \cdot \omega_{r0} - \omega \cdot t_f \cdot \tau_1 - \omega \cdot \tau_1^2))$ expression dans laquelle seule 70% de l'énergie est récupérée, il faut donc la multiplier par le rendement η .

Remarque : en traçant l'évolution en fonction de la variable τ_1 , je ne retrouve pas le graphe proposé ! J'ai quelque chose de « semblable » pour un domaine de variation [2,5; 5]

Q16. Valeur de la constante de temps :

Le cahier des charges stipule 25% d'énergie économisée. Il faut donc récupérer 25% de la dépense énergétique soit $0,25 \times 389 \approx 97 \text{ kJ}$. Cette valeur conduit d'après la figure fournie à prendre $\tau_1 = 0,2 \text{ s}$;

Q17. Retrouvons l'équation proposée :

on isole le rotor de la machine électrique avec le réducteur. On considère que l'inertie du réducteur est négligeable devant celle du rotor. Les actions extérieures appliquées sur le système isolé sont, le couple du stator et l'action de la transmission flexible.

L'équation de moment du principe fondamental de la dynamique, en projection sur l'axe de rotation, permet d'écrire :

$$J_m \times \ddot{\theta}_m(t) = -C_{me} + C_{TF \rightarrow R} \times r \text{ ce qui correspond à la forme proposée.}$$

On peut aussi utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour faire apparaître naturellement le rapport r dans l'expression.

Q18. Détermination de l'énergie cinétique de l'ensemble Σ :

- il y a le véhicule de masse M se déplaçant à la vitesse $V = R_r \times \omega_r$ soit $\frac{1}{2} M \cdot \omega_r^2 \cdot R_r^2$ (terme qui comprend « l'énergie cinétique en translation » de tous les composants)
- il y a 4 roues soit $2 \times (\frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega_r^2)$
- il y a le rotor de la machine électrique : $\frac{1}{2} J_m \cdot \omega_m^2$

au total $T(\Sigma/R) = \frac{1}{2} M \omega_r^2 R_r^2 + \frac{1}{2} J_m \cdot \omega_m^2 + J_r \omega_r^2$.

En identifiant par rapport à la forme proposée, il vient : $J_{\dot{\alpha}} = 2.J_r + M.R_r^2$

Q19. Bilan des puissances :

Puissance des actions extérieures :

aucune puissance car il n'y a pas de glissement et la gravité ne travaille pas dans le mouvement considéré. De plus par hypothèse les actions aérodynamiques sont négligées.

Puissances des inter-efforts :

- machine électrique $-C_{me} \cdot \dot{\theta}_m$
- freinage par friction avant et arrière : $-C_{fri} \cdot \dot{\theta}_r \times (1 + \alpha)$
- transmission élastique : $-C_{TF \rightarrow R} \times (\dot{\theta}_r - r \cdot \dot{\theta}_m)$

Q20. Expression littérale de la puissance totale :

$$P_{totale} = P_{ext} + P_{int} = 0 - C_{me} \cdot \dot{\theta}_m - C_{fri} \cdot \dot{\theta}_r \times (1 + \alpha) - C_{TF \rightarrow R} \cdot (\dot{\theta}_r - r \cdot \dot{\theta}_m)$$

Q21. Théorème de l'énergie cinétique appliqué au système Σ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{eq} \cdot \omega_r^2 + \frac{1}{2} J_m \cdot \omega_m^2 \right) = -C_{me} \cdot \dot{\theta}_m - C_{fri} \cdot \dot{\theta}_r \times (1 + \alpha) - C_{TF \rightarrow R} \cdot (\dot{\theta}_r - r \cdot \dot{\theta}_m) .$$

Ce qui conduit à : $J_{eq} \cdot \ddot{\theta}_r \cdot \dot{\theta}_r + J_m \cdot \ddot{\theta}_m \cdot \dot{\theta}_m = -C_{me} \cdot \dot{\theta}_m - C_{fri} \cdot \dot{\theta}_r \times (1 + \alpha) - C_{TF \rightarrow R} \cdot (\dot{\theta}_r - r \cdot \dot{\theta}_m)$

En prenant l'expression de $C_{TF \rightarrow R} = k \cdot (\theta_r - r \cdot \theta_m) + \beta \cdot (\dot{\theta}_r - r \cdot \dot{\theta}_m)$ on obtient l'expression demandée.

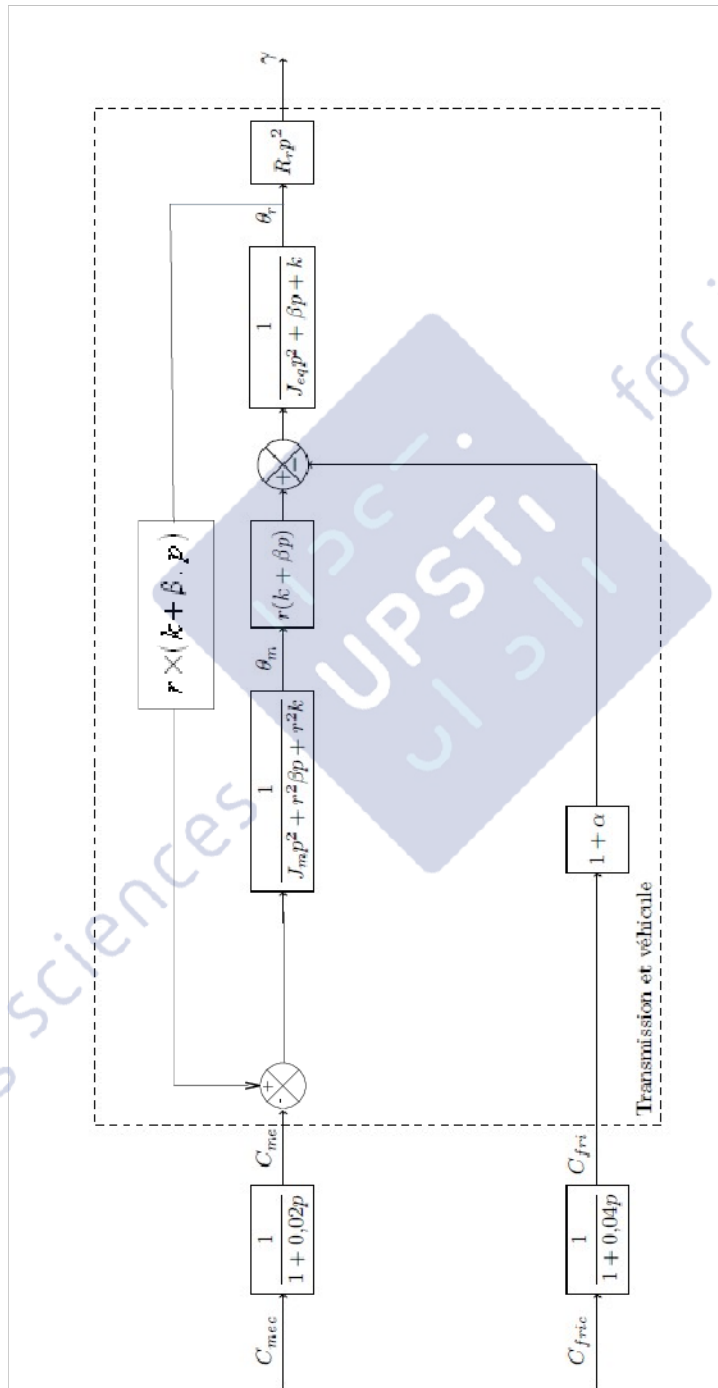
On peut chercher à retrouver l'équation III.3 proposée dans le sujet. Il faut dans ce cas substituer le terme $J_m \cdot \ddot{\theta}_m$ à l'aide de l'équation III.1 et simplifier par $\dot{\theta}_r$.

Q22. Schéma bloc de la transmission du véhicule :

On passe l'équation III.3 dans le domaine de Laplace, soit

$J_{eq} \cdot \theta_r \cdot p^2 = -C_{fri} \cdot (1 + \alpha) - (k + \beta \cdot p) \cdot \theta_r + r \cdot (k + \beta \cdot p) \cdot \theta_m$. Une réorganisation des différents termes donne :

$[J_m \cdot p^2 + r^2(k + \beta \cdot p)] \cdot \theta_m = -C_{me} + r \cdot (k + \beta \cdot p) \cdot \theta_r$. Il est alors aisé de compléter le schéma bloc proposé.



Q23. **Expression de la fonction de transfert sans couple de friction :**
la lecture du schéma bloc conduit directement à :

$$H_{FE}(p) = \frac{-r(k + \beta p)}{1 - \frac{(J_{eq} p^2 + \beta p + k) \times (J_m p^2 + r^2 \beta p + r^2 k)}{r^2 (k + \beta p)^2}} \times R_r p^2$$

soit
$$H_{FE}(p) = \frac{-r(k + \beta p)}{(J_{eq} p^2 + \beta p + k) \times (J_m p^2 + r^2 \beta p + r^2 k) - r^2 (k + \beta p)^2} \times R_r p^2$$

En développant le dénominateur il vient :

$$H_{FE}(p) = \frac{-r(k + \beta p)}{J_{eq} J_m p^2 + (J_{eq} r^2 \beta + J_m \beta) p + (J_{eq} r^2 k + J_m k)} \times R_r$$

$$H_{FE}(p) = \frac{-R_r r k (1 + \frac{\beta}{k} p)}{(J_{eq} r^2 + J_m) k} \times \frac{1}{1 + \frac{\beta}{k} \cdot p + \frac{J_{eq} J_m}{(J_{eq} r^2 + J_m) k} \cdot p^2}$$

$$H_{FE}(p) = \frac{-0,03 k (1 + \frac{\beta}{k} p)}{1,504 k} \times \frac{1}{1 + \frac{\beta}{k} \cdot p + \frac{4,998}{1,504 k} \cdot p^2}$$

Q24. **Identification à un second ordre :**

Cela signifie que la dynamique du pseudo dérivateur n'est pas prise en compte pour ce modèle. Avec le graphe fourni :

l'abaque des dépassements, permet de déduire :

$$D_{r1} = \frac{1,8}{2} * 100 = 90 \% \quad \text{soit} \quad \xi_{FE} = 0,032 \quad \text{ainsi que} \quad D_{r2} = \frac{1,4}{2} * 100 = 70 \% \quad \text{soit}$$

$\xi_{FE} \approx 0,06$. Cela donne des valeurs du coefficient d'amortissement assez éloignées, cependant les valeurs des autres dépassements viennent confirmer la seconde valeur. On prendra donc $\xi_{FE} = 0,06$.

la pseudo période permet de déduire :

$$\omega_p = 2 \frac{\pi}{T_p} = 2 \frac{\pi}{0,162} = \omega_{0FE} \sqrt{1 - \xi_{FE}^2} \quad \text{ce qui donne} \quad \omega_{0FE} = 38,77 \text{ rad.s}^{-1}$$

D'après la forme trouvée précédemment on obtient :

$$4,998 \omega_{0FE}^2 = 1,504 k$$

$$2 \frac{\xi_{FE}}{\omega_{0FE}} = \frac{\beta}{k} \quad \text{ce qui permet de déterminer}$$

$$\beta = 2 \xi_{FE} \times 4,998 \frac{\omega_{0FE}}{1,504} \approx 15,4605 \text{ N.m.s.rad}^{-1} \quad \text{et} \quad k = \frac{4,998 \omega_{0FE}^2}{1,504} \approx 4995,05 \text{ N.m.rad}^{-1}$$

On peut tracer la réponse à un échelon de 100 N.m ce qui conduit à une courbe d'allure semblable à celle proposée.

Q25. Validation de la simulation :

La simulation proposée est proche de l'expérimentale :

- même valeur finale
- pseudo période quasi identique (légèrement supérieure $T_p \approx 0,18 \text{ s}$)
- dépassements semblables

Il semble donc que le modèle proposé soit convenable.

Q26. Valeur de la constante de temps de filtrage :

Le cahier des charges stipule moins de 5 oscillations en dehors de la bande $\pm 5\%$ autour de la courbe gabarit. On peut considérer que cela correspond à $\pm 5\%$ de la valeur finale, soit $\pm 0,1 \text{ m.s}^{-2}$. Cette condition est juste vérifiée pour $\tau_1 \geq 0,1 \text{ s}$.

On constate un effet antagoniste entre la satisfaction de la fonction FS2 et de la fonction FS3. En effet plus τ_1 croît, moins il est possible de récupérer d'énergie (figure 10 du sujet).

Q27. Stabilité du système non asservi :

Tous les pôles proposés sont à partie réelle strictement négative, c'est une condition de stabilité.

En utilisant la forme classique d'expression des pôles complexes, on peut écrire :

$$-1,96 \pm j.40 = -\xi_6 . \omega_{06} \pm j \sqrt{(1-\xi_6^2)} . \omega_{06} \quad \text{ce qui donne} \quad \xi_6 = \frac{1,96^2}{(40^2 + 1,96^2)} \approx 0,049 < 0,3$$

Cette valeur ne respecte pas le cahier des charges.

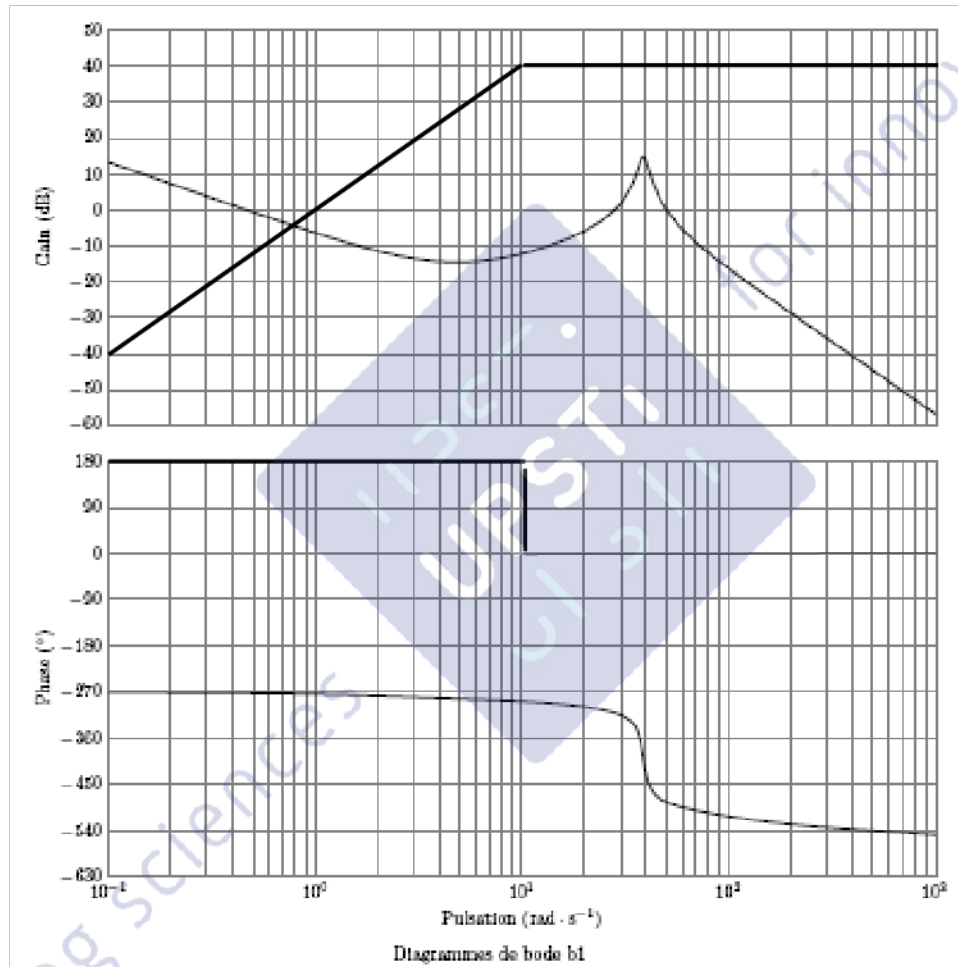
Remarque : ces deux pôles complexes conjugués sont les pôles dominants de la fonction de transfert proposée.

Q28. Diagramme asymptotique de Bode du correcteur :

la fonction de transfert du correcteur $C(p) = K \cdot \frac{p^2}{(1 + \tau_2 p)^2}$ comprend un terme en p^2 au numérateur soit un comportement asymptotique en 0 pour le gain de la forme

$20 \log K + 40 \log \omega$ donc une pente de 40 dB/dec . A partir de la valeur $\frac{1}{\tau_2}$ une pente

nulle, car le 1er ordre au carré donne une pente de $-40\text{dB}/\text{dec}$. L'asymptote est donc une horizontale située à la valeur 40dB . Pour la phase, $+180^\circ$ jusqu'à $\frac{1}{\tau_2}$ puis 0° .



Q29. Marge de Gain :

Pour respecter la marge de gain de 20dB, il faut décaler la courbe de -38dB . Dans ce cas on obtient une marge suffisante au point A et large en B.

Une valeur possible du gain est donc : $20\log K = -38\text{dB}$, soit $K = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ N.m/(rad.s}^{-1})$

Q30. Commande réglée :

d'après le signe des parties réelles des pôles il y a stabilité. On vérifie les valeurs de $\xi_6 = 0,37$ et $\xi_7 = 0,707$ qui respectent le minimum du cahier des charges. Les critères pour la fonction FS3 sont vérifiés.

Q31. Vérification du cahier des charges pour FS3 :

On voit que la correction permet de répondre à tous les critères du cahier des charges :

- premier dépassement : valeur juste égale à 50%, critère respecté.
- Oscillations : moins de cinq oscillations et valeur finale de -2 m.s^{-2} .

Q32. Synthèse de la démarche :

sur quel type de séquence d'utilisation du véhicule est-il pertinent de récupérer l'énergie ?

Quelle quantité d'énergie peut-on espérer récupérer en regard de ce qui est dépensé ?

Peut-on se satisfaire d'un seul freinage par machine électrique ?

Comment commander efficacement les deux types de freinage, électrique et par friction ?