

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2013

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

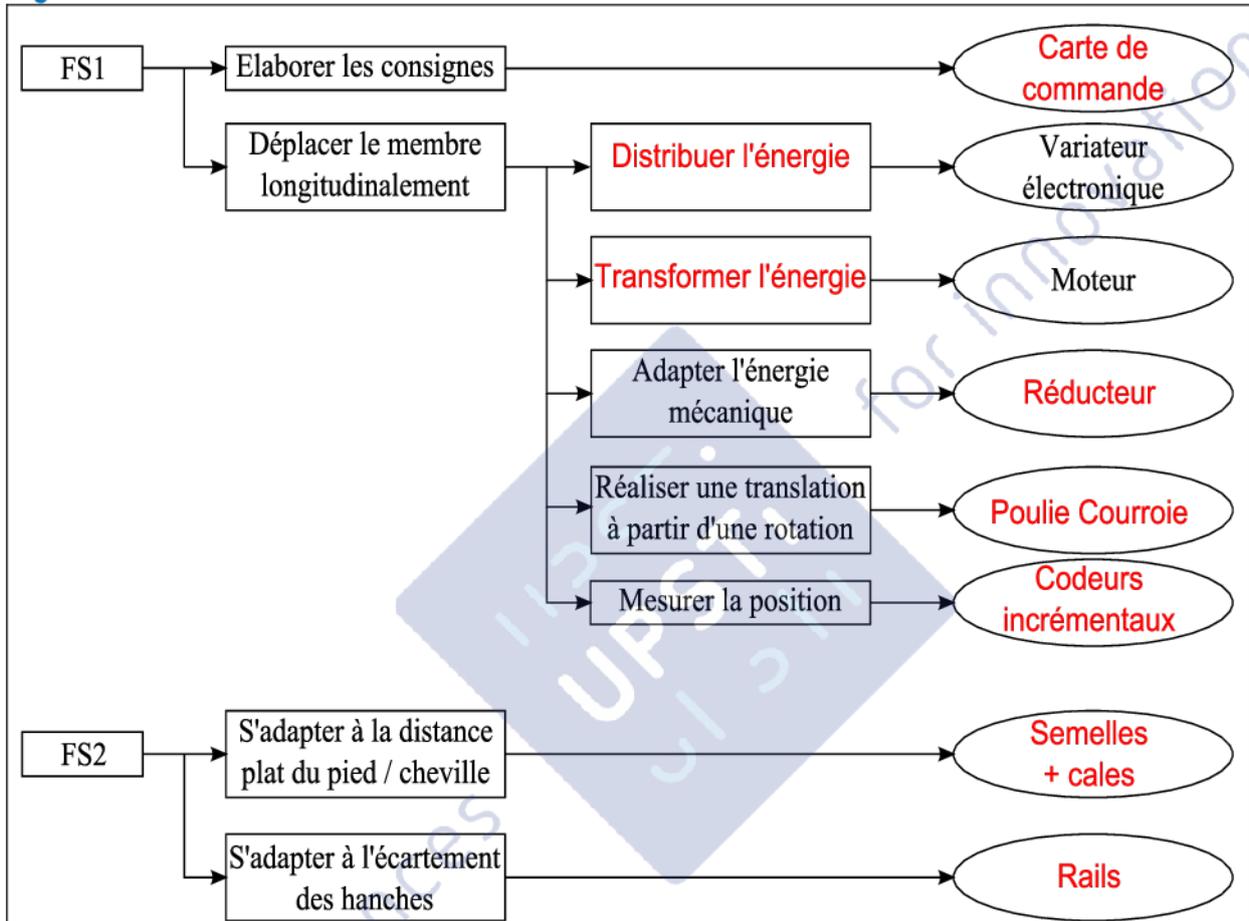
Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

## CORRIGE CCP 2013

### DESCRIPTION DU SYSTEME

#### Q1 : FAST



### MODELISATION MECANIQUE

#### Q2 - Q3 - Q4 : Liaison 1-2

Q2. Les torseurs des actions transmissibles des deux liaisons sont :

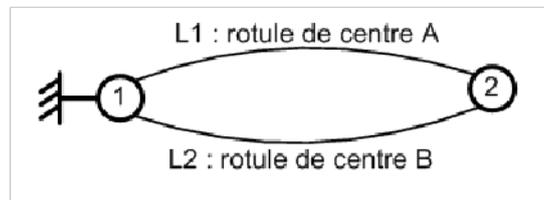
$$\{T_{1 \rightarrow 2}^1\} = \begin{Bmatrix} X_{12}^1 & 0 \\ Y_{12}^1 & 0 \\ Z_{12}^1 & 0 \end{Bmatrix}_{A, R_0} ; \{T_{1 \rightarrow 2}^2\} = \begin{Bmatrix} X_{12}^2 & 0 \\ Y_{12}^2 & 0 \\ Z_{12}^2 & 0 \end{Bmatrix}_{B, R_0} = \begin{Bmatrix} X_{12}^2 & -2d_2 Y_{12}^2 \\ Y_{12}^2 & 2d_2 X_{12}^2 \\ Z_{12}^2 & 0 \end{Bmatrix}_{A, R_0}$$

Les deux liaisons étant en parallèle, on somme leurs torseurs des actions transmissibles au même point et dans la même base.

Le torseur de la liaison équivalente en A est bien celui d'un pivot d'axe  $(A, z_0)$ .

$$\{\Gamma_{1 \rightarrow 2}^{\text{eq}}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12}^1 + X_{12}^2 & -2d_2 Y_{12}^2 \\ Y_{12}^1 + Y_{12}^2 & 2d_2 X_{12}^2 \\ Z_{12}^1 + Z_{12}^2 & 0 \end{array} \right\}_{A, R_0}$$

Q3. On applique la formule  $m-h = Nc - 6.\gamma$



Avec  $\gamma = 1$        $Nc = 3*2 = 6$        $m = m_u = 1$  (rotation de 2 autour de l'axe  $(A, \vec{z}_0)$ ). Nous avons donc  $h = 1 - 6 + 6*1 = 1$

Q4. Ce montage est plus rigide qu'un montage classique rotule + linéaire annulaire en parallèle.

Il nécessite une condition géométrique à respecter (distance entre les deux centres A et B le long de l'axe  $(A, \vec{z}_0)$ ).

### Q5 - Q6 : liaison 0-1

Q5. Par fermeture géométrique de chaîne :  $L.\vec{x}_c + L.\vec{x}_j - x(t).\vec{x}_0 = \vec{0}$

Nous ne voulons pas faire apparaître l'angle  $\theta_{j0}$  :  $L.\vec{x}_j = x(t).\vec{x}_0 - L.\vec{x}_c$

$$L^2 = x(t)^2 + L^2 - 2.L.x(t).\cos\theta_{0c} \Leftrightarrow x(t).(x(t) - 2.L.\cos\theta_{0c}) = 0 \rightarrow \boxed{x(t) = 2.L.\cos\theta_{0c}}$$

La solution  $x(t) = 0$  ne convient évidemment pas.

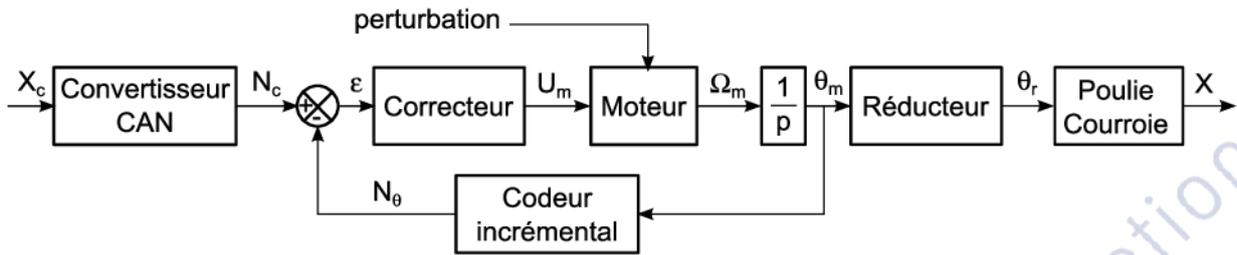
Q6.

Angle de flexion : $\beta + \theta_{0c}$	$\theta_{0c}$	$x(t)$	$\Delta x = 2 L$ . La course utile du composant étant de 1.3 m, cela implique $L \leq 0.65$ m. C'est largement suffisant quelle que soit la taille du patient.
Mini : $60^\circ$	$0^\circ$	$2 L$	
Maxi : $150^\circ$	$150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$	0	

*En pratique il me semble que l'on ne pourra pas obtenir l'angle de  $150^\circ$ , car cela signifierait que l'on amène le point  $O_2$  en  $O_0$  : l'articulation de cheville serait alors confondue avec celle de la hanche. Il faudra faire varier  $\beta$  pour obtenir l'amplitude maxi.*

## PILOTAGE ET DYNAMIQUE

### Q7 : schéma bloc



### Q8 : relation entre le couple et l'effort sur la courroie

On isole la poulie motrice : BAME (masse négligée)

$$\{T(0 \rightarrow \text{poulie})\} = \begin{Bmatrix} X_{0p} & L_{0p} \\ Y_{0p} & M_{0p} \\ Z_{0p} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} ; \{T(\text{courroie} \rightarrow \text{poulie})\} = \begin{Bmatrix} F_{cp} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} F_{cp} \cdot \vec{x}_0 \\ -r \cdot F_{cp} \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_0 ;$$

$$\{T(\text{réducteur} \rightarrow \text{poulie})\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{M1}(t) \\ \rho_1 \end{Bmatrix}_0 \cdot \vec{z}_0$$

On applique le TMD à la poulie, d'inertie négligée, au point O, en projection sur  $\vec{z}_0$ .

$$\boxed{0 = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1} - r \cdot F_{cp}}$$

On isole la courroie AB, de masse négligeable : BAME

$$\{T(\text{poulie} \rightarrow \text{courroie})\} = \begin{Bmatrix} -F_{cp} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A ; \{T(1 \rightarrow \text{courroie})\} = \begin{Bmatrix} F_{c1} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

On applique le TRD à la courroie, de masse négligée, en projection sur  $\vec{x}_0$ .

$$\boxed{-F_{cp} + F_{c1} = 0}$$

$$\text{Donc : } \boxed{C_{M1}(t) = r \cdot \rho_1 \cdot F_{c1}}$$

### Q9 : équation du mouvement (1+2+3)

On isole (1+2+3) : BAME

$$\{T(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} -M \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1} ; \{T(\text{pes} \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} -m \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_3} ; \{T(0 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{\forall M, B_0} ;$$

$$\{T(\text{patient} \rightarrow 3)\}_P = \begin{Bmatrix} F_p \cdot \vec{x}_0 \\ -C_p \cdot \vec{x}_2 \end{Bmatrix} ; \quad \{T(\text{courroie} \rightarrow 1)\}_B = \begin{Bmatrix} -F_{c1} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Remarque :

Les actions du patient sur 3 peuvent être modélisées par un seul torseur en P puisque le torseur couple est valable en  $O_2$  comme en P.

Théorème de la résultante dynamique sur  $\vec{x}_0$

$$-F_{c1} + F_p = (\vec{R}_{d1/0} + \vec{R}_{d2/0} + \vec{R}_{d3/0}) \cdot \vec{x}_0 = M \cdot \overset{\circ\circ}{x} + m \cdot \vec{\Gamma}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0$$

Avec  $\alpha = \text{constante}$

$$\vec{V}(G_3, 3/0) = \left( \frac{d(\overrightarrow{OG_3})}{dt} \right)_0 = \left( \frac{d(x \cdot \vec{x}_0 + h_2 \cdot \vec{y}_0 + h_4 \cdot \vec{x}_2 + h_3 \cdot \vec{y}_3)}{dt} \right)_0 = \overset{\circ}{x} \cdot \vec{x}_0 + h_3 \cdot \overrightarrow{\Omega}_{30} \wedge \vec{y}_3$$

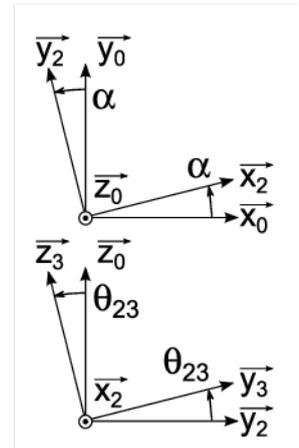
$$\vec{V}(G_3, 3/0) = \overset{\circ}{x} \cdot \vec{x}_0 + h_3 \cdot \overset{\circ}{\theta}_{23} \cdot \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_3 = \overset{\circ}{x} \cdot \vec{x}_0 + h_3 \cdot \overset{\circ}{\theta}_{23} \cdot \vec{z}_3$$

$$\text{Avec } m \cdot \vec{\Gamma}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = m \cdot \frac{d(\vec{V}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0)}{dt}$$

$$\left( \overset{\circ}{x} \cdot \vec{x}_0 + h_3 \cdot \overset{\circ}{\theta}_{23} \cdot \cos \theta_{23} \cdot \vec{z}_0 - h_3 \cdot \overset{\circ}{\theta}_{23} \cdot \sin \theta_{23} \cdot \vec{y}_2 \right) \cdot \vec{x}_0$$

$$\rightarrow \vec{V}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = \overset{\circ}{x} + h_3 \cdot \overset{\circ}{\theta}_{23} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta_{23}$$

$$m \cdot \vec{\Gamma}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = m \cdot \left( \overset{\circ\circ}{x} + h_3 \cdot \overset{\circ\circ}{\theta}_{23} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta_{23} + h_3 \cdot \overset{\circ^2}{\theta}_{23} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta_{23} \right)$$



Dans l'équation précédente :

$$-F_{c1} + F_p = (m + M) \cdot \overset{\circ\circ}{x} + m \cdot \left( h_3 \cdot \overset{\circ\circ}{\theta}_{23} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta_{23} + h_3 \cdot \overset{\circ^2}{\theta}_{23} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta_{23} \right)$$

Et avec la relation obtenue en Q8

$$\boxed{-\frac{C_{M1}}{r\rho_1} + F_p = (m + M) \cdot \overset{\circ\circ}{x} + m \cdot \left( h_3 \cdot \overset{\circ\circ}{\theta}_{23} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta_{23} + h_3 \cdot \overset{\circ^2}{\theta}_{23} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta_{23} \right)}$$

### Q10 : équation du mouvement de 3

On isole 3 :

$$\text{BAME : } \{T(\text{pes} \rightarrow 3)\}_{G_3} = \begin{Bmatrix} -m \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ; \quad \{T(2 \rightarrow 3)\}_{O_2} = \begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{Bmatrix}_{B_2} ;$$

$$\{T(\text{moteur2} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{M3}(t) \\ \rho_2 \end{array} \right\}_{G_3} \cdot \vec{x}_2 ; \{T(\text{patient} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \cdot \vec{x}_0 \\ -C_p \cdot \vec{x}_2 \end{array} \right\}_P$$

On applique le TMD à 3, en  $O_2$ , en projection sur  $\vec{x}_2$

A priori on ne le demande pas mais on rappelle que  $\vec{x}_2$  est fixe /  $R_0$  ce qui facilite un peu le calcul avec :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(O_2, 3/0) \cdot \vec{x}_2 &= \left( [I(O_2, 3)](\vec{\Omega}_{30}) \right) \cdot \vec{x}_2 + \left( m \cdot \vec{O}_2 G_3 \wedge \vec{V}(O_2, 3/0) \right) \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{\delta}(O_2, 3/0) \cdot \vec{x}_2 &= \frac{d(\vec{\sigma}(O_2, 3/0) \cdot \vec{x}_2)}{dt} + \left( m \cdot \vec{V}(O_2/0) \wedge \vec{V}(G_3, 3/0) \right) \cdot \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Et nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \left( \vec{O}_2 G_3 \wedge -m \cdot g \cdot \vec{y}_0 + \vec{O}_2 P \wedge F_p \cdot \vec{x}_0 \right) \cdot \vec{x}_2 &\rightarrow m \cdot g \cdot h_3 \cdot \sin \theta_{23} \cdot \cos \alpha \\ \frac{d \left( [I(O_2, 3)](\vec{\Omega}_{30}) + m \cdot \vec{O}_2 G_3 \wedge \vec{V}(O_2, 3/0) \right) \cdot \vec{x}_2}{dt} &\rightarrow J \cdot \overset{\circ\circ}{\theta}_{23} + m \cdot h_3 \cdot \sin \alpha \cdot \overset{\circ\circ}{x} \end{aligned}$$

### Q11 : couplage

Nous voyons que les accélérations  $\overset{\circ\circ}{x}$  et  $\overset{\circ\circ}{\theta}_{23}$  interviennent dans les deux équations. Ces équations font donc apparaître un couplage et les pilotages des paramètres  $\theta_{23}(t)$  et  $x(t)$  ne sont donc pas indépendants l'un de l'autre.

Elles ne sont par ailleurs non linéaires car font intervenir des termes au carré ainsi que des termes sinusoïdaux.

### Q12 : linéarisation de l'équation du mouvement (1+2+3)

On avait supposé  $\omega_{\text{poulie}} = \rho_1 \cdot \omega_{\text{moteur}}$ . D'après la figure 7 :  $\overset{\circ}{x} = -r \cdot \omega_{\text{poulie}}$ .

Nous arrivons donc à :  $\overset{\circ}{x} = r \cdot \rho_1 \cdot \omega_{\text{moteur}} \rightarrow \overset{\circ\circ}{x} = -r \cdot \rho_1 \cdot \overset{\circ}{\omega}_m$  et de même :  $\overset{\circ\circ}{\theta}_{23} = \rho_2 \cdot \omega_{m2}$

$$-\frac{C_{M1}}{r \cdot \rho_1} + F_p = \underbrace{-(m+M)r \cdot \rho_1 \cdot \overset{\circ}{\omega}_m}_{\text{dynamique du mouvement de translation}} + \underbrace{m \cdot h_3 \cdot \sin \alpha \cdot \rho_2 \cdot \left( \overset{\circ}{\omega}_2 \cdot \sin \theta_{23} + \rho_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos \theta_{23} \right)}_{\text{dynamique du mouvement de rotation 3/0}}$$

Si on considère que les accélérations angulaires des moteurs sont de même ordre, le facteur associé à la rotation est négligeable devant celui de la translation :

$$(m+M)r \cdot \rho_1 = 0,083 \quad \text{et} \quad m \cdot h_3 \cdot \sin \alpha \cdot \rho_2 = 0,0014$$

Nous avons donc finalement :  $\frac{C_{M1}}{r \cdot \rho_1} - F_p \approx (m+M)r \cdot \rho_1 \cdot \overset{\circ}{\omega}_m$

*Il y a vraisemblablement une erreur dans l'équation fournie dans l'énoncé :  $\omega_m$  au lieu de  $\dot{\omega}_m$*

### Q13 - Q14 : fonctions de transfert de l'actionneur

Équations du moteur dans le domaine de Laplace :

$$\frac{C_{M1} - F_p}{r\rho_1} = (m + M)r \cdot \rho_1 \cdot p \cdot \Omega_m(p) \rightarrow \Omega_m(p) = \frac{1}{(m + M)r^2 \cdot \rho_1^2 \cdot p} (C_{M1} - r \cdot \rho_1 \cdot F_p)$$

$$U_m(p) = E(p) + R \cdot I(p) \rightarrow I(p) = \frac{1}{R} (U_m(p) - E(p)) \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow C_{M1}(p) = \frac{k_t}{R} (U_m(p) - E(p)) \\ C_{M1}(p) = k_t \cdot I(p) \\ E(p) = k_e \cdot \Omega_m(p) \end{array} \right.$$

$$H_3(p) = \frac{1}{(m + M)r^2 \cdot \rho_1^2 \cdot p} ; K_9 = r \cdot \rho_1 ; K_2 = \frac{k_t}{R} ; K_7 = k_e$$

$$\Omega_m(p) = p \cdot \theta_m(p) \rightarrow \theta_m(p) = \frac{1}{p} \cdot \Omega_m(p) \rightarrow H_4(p) = \frac{1}{p}$$

### Q15 : gain du capteur

Sur chaque piste, nous mesurons 500 fronts montants et 500 fronts descendants par tour soit 1000 incréments. Les pistes étant décalées de un quart de fente nous voyons tous les fronts de chaque piste. Nous voyons donc 2000 incréments par

tour. D'où :

$$K_8(p) = \frac{2000}{2\pi} \approx 318,31 \text{ (incrément s/radian)}$$

### Q16 - Q17 - Q18 - Q19 - Q 20 : gain de la transmission mécanique

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \\ \frac{\omega_{0/3}}{\omega_{2/3}} = \frac{Z_2}{Z_0} \end{array} \right\} \omega_{0/3} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0} - \omega_{3/0}} = \frac{Z_1}{Z_0} \rightarrow \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1}$$

$\omega_{3/0} < \omega_{1/0}$  c'est donc 3 qui est lié à la poulie et 1 au moteur.

$$\rho_1 = \frac{1}{10} = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \text{ avec } Z_1 = 10 \rightarrow Z_0 = 90 \text{ Soit : } K_5 = \rho_1 = 0,1$$

Nous avons vu qu'avec le RSG :  $x = -r \cdot \omega_{poulie}$ . Nous nous affranchissons donc du signe qui ne joue aucun rôle :

$$K_6 = r = 0,0461 \text{ (m)}$$

**Q21 : cohérence du schéma bloc**

D'après le schéma bloc, nous aurons au niveau du comparateur :

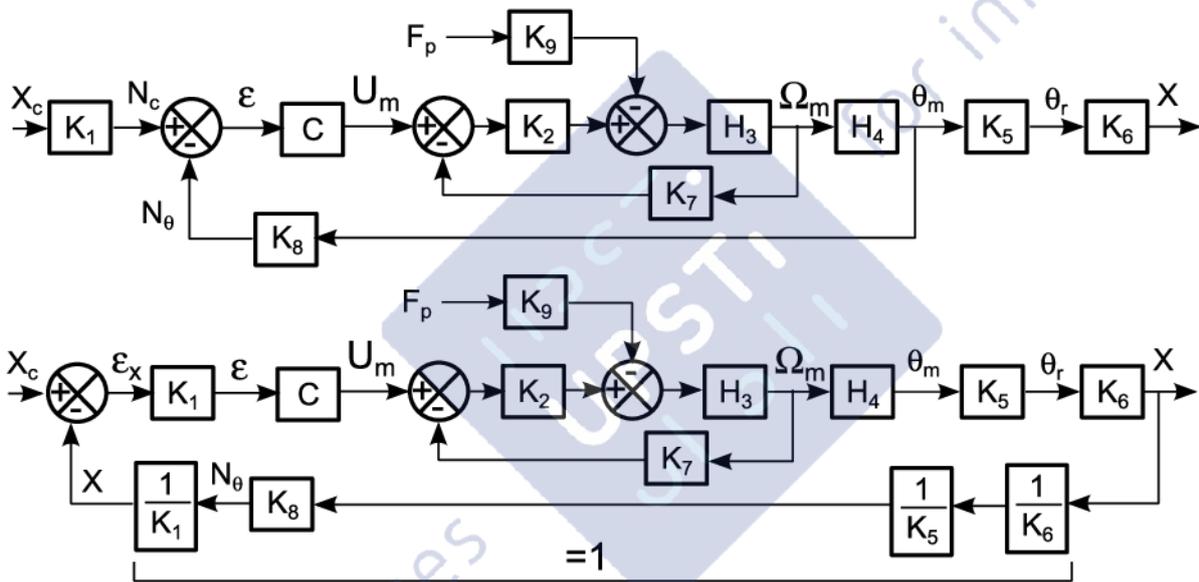
$$\varepsilon(p) = K_1 \cdot X_c(p) - K_8 \cdot \theta_m(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) = K_1 X_c(p) - \frac{K_8}{K_5 \cdot K_6} \cdot X(p)$$

Pour une question de cohérence, si on souhaite que les deux grandeurs soient comparables :

$$K_1 = \frac{K_8}{K_5 \cdot K_6} = \frac{1000}{\pi \cdot r \cdot \rho_1} \approx 69047,7 \text{ incréments /mètre}$$

**Q22 : Manipulation des schémas**

Nous passons sans difficulté du schéma bloc donné (fig 8) à un schéma bloc à retour unitaire compte tenu de la question précédente.

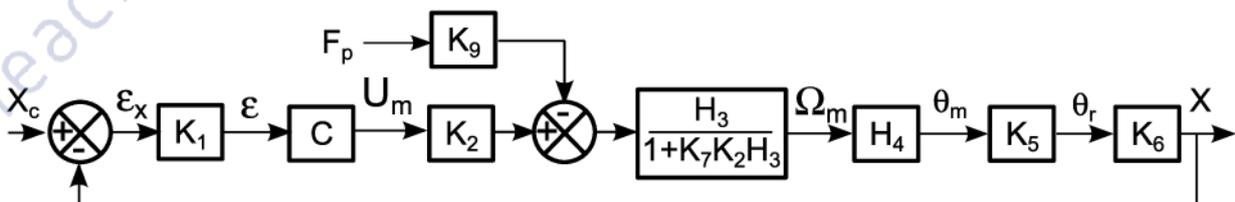


Le plus simple ensuite est de traiter séparément le bloc moteur :

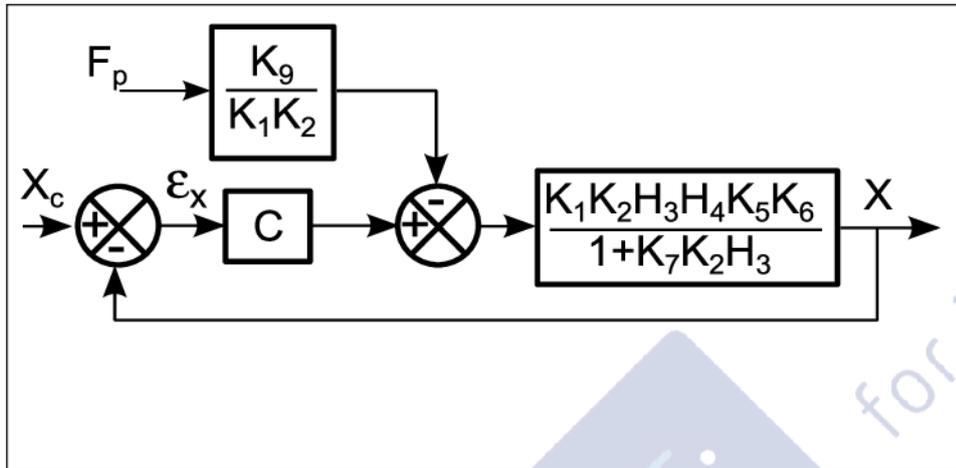
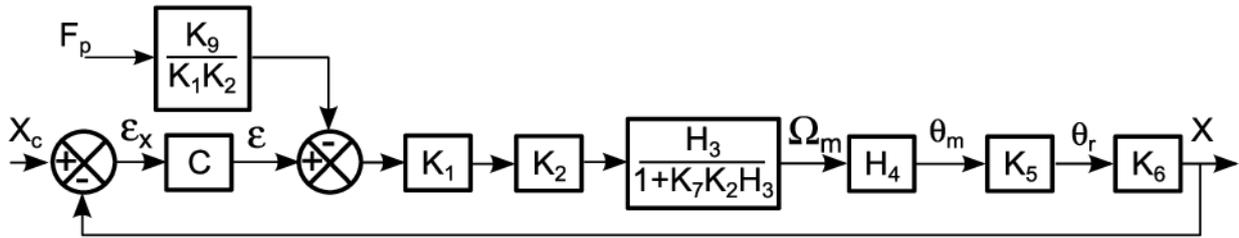
$$((U_m - K_7 \cdot \Omega_m) \cdot K_2 - K_9 \cdot F_p) \cdot H_3 = \Omega_m \Leftrightarrow U_m \cdot K_2 \cdot H_3 - K_7 \cdot K_2 \cdot H_3 \cdot \Omega_m - K_9 \cdot H_3 \cdot F_p = \Omega_m \Leftrightarrow$$

$$U_m \cdot K_2 \cdot H_3 - K_9 \cdot H_3 \cdot F_p = \Omega_m + K_7 \cdot K_2 \cdot H_3 \cdot \Omega_m \Leftrightarrow U_m \cdot \frac{K_2 \cdot H_3}{1 + K_7 \cdot K_2 \cdot H_3} - F_p \cdot \frac{K_9 \cdot H_3}{1 + K_7 \cdot K_2 \cdot H_3} = \Omega_m \Leftrightarrow$$

$$(U_m \cdot K_2 - F_p \cdot K_9) \cdot \frac{H_3}{1 + K_7 \cdot K_2 \cdot H_3} = \Omega_m$$



Reste alors une dernière mise en forme :



Remarque : il semble y avoir là encore une erreur dans l'énoncé : dans il y a un signe moins dans le sommateur interne.

$$\frac{K_9}{K_1 \cdot K_2} = \frac{K_9 \cdot K_5 \cdot K_6}{K_8 \cdot K_2} \rightarrow D = \frac{r^2 \cdot \rho_1^2 \cdot R}{K_8 \cdot k_t}$$

$$\frac{K_1 \cdot K_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \cdot K_5 \cdot K_6}{1 + K_7 \cdot K_2 \cdot H_3} = \frac{K_8 \cdot K_2 \cdot H_3}{1 + K_7 \cdot K_2 \cdot H_3} \cdot H_4 = \frac{K_8 \cdot \frac{k_t}{R} \cdot \frac{1}{(m+M)r^2 \cdot \rho_1^2 \cdot p}}{1 + k_e \cdot \frac{k_t}{R} \cdot \frac{1}{(m+M)r^2 \cdot \rho_1^2 \cdot p}} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\frac{\frac{K_8}{k_e}}{p \cdot \left(1 + \frac{R \cdot (m+M) \cdot r^2 \cdot \rho_1^2 \cdot p}{k_e \cdot k_t}\right)} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{K_8}{k_e} \\ B = \frac{R \cdot (m+M) \cdot r^2 \cdot \rho_1^2}{k_e \cdot k_t} \end{cases}$$

Nous retrouvons  $\frac{R \cdot J_{eq}}{k_e \cdot k_t}$  pour la constante de temps et  $\frac{1}{k_e}$  pour le gain statique du moteur.

### Q23 – Q24 : correction proportionnelle

Q23.  $\varepsilon_X = X_c - X$  et en BF :  $(\varepsilon_X \cdot C(p) - D \cdot F_p) \cdot \frac{A}{p \cdot (1 + B \cdot p)} = X$

$$\varepsilon_X = X_c - (\varepsilon_X \cdot C(p) - D \cdot F_p) \cdot \frac{A}{p \cdot (1 + B \cdot p)} \Leftrightarrow p \cdot (1 + B \cdot p) \cdot \varepsilon_X = p \cdot (1 + B \cdot p) \cdot X_c - \varepsilon_X \cdot A \cdot C(p) + D \cdot A \cdot F_p \Leftrightarrow$$

$$(p \cdot (1 + B \cdot p) + A \cdot C(p)) \cdot \varepsilon_X = p \cdot (1 + B \cdot p) \cdot X_c + D \cdot A \cdot F_p$$

$$D'où : \varepsilon_X = \frac{p \cdot (1 + B \cdot p)}{p \cdot (1 + B \cdot p) + A \cdot C(p)} \cdot X_c + \frac{D \cdot A}{p \cdot (1 + B \cdot p) + A \cdot C(p)} \cdot F_p$$

Avec  $C(p) = K_c$ , il vient :

$$\varepsilon_x = \frac{p.(1+B.p)}{p.(1+B.p) + A.K_c} . X_c + \frac{D.A}{p.(1+B.p) + A.K_c} . F_p$$

Q24. En supposant un échelon de consigne et d'effort :

$$\varepsilon_x = \frac{X_0}{p} . \left( \frac{p.(1+B.p)}{p.(1+B.p) + A.K_c} \right) + \frac{F_0}{p} . \left( \frac{D.A}{p.(1+B.p) + A.K_c} \right)$$

Avec le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p . \varepsilon_x(p) = F_0 . \left( \frac{D}{K_c} \right) = \frac{6.F_0}{K_c}$$

Le cahier des charges n'est pas respecté puisque l'écart statique n'est pas nul.

### Q25 - Q26 : correction proportionnelle intégrale

Q25.  $C(p) = K_i \left( 1 + \frac{1}{T_i.p} \right) = K_i \left( \frac{1+T_i.p}{T_i.p} \right)$

$$\varepsilon_x = \frac{p.(B.p+1)}{A.K_i \left( \frac{1+T_i.p}{T_i.p} \right) + p.(B.p+1)} . X_c + \frac{A.D}{A.K_i \left( \frac{1+T_i.p}{T_i.p} \right) + p.(B.p+1)} . F_p$$

Q26.  $\varepsilon_x(p) = \frac{p.(B.p+1)}{A.K_i \left( \frac{1+T_i.p}{T_i.p} \right) + p.(B.p+1)} . \frac{X_0}{p} + \frac{A.D}{A.K_i \left( \frac{1+T_i.p}{T_i.p} \right) + p.(B.p+1)} . \frac{F_0}{p}$

Avec le théorème de la valeur finale :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p . \varepsilon_x(p) = 0$

Le cahier des charges est respecté.

Q27.  $FTBO(p) = \frac{A}{p.(B.p+1)} . K_i . \frac{1+T_i.p}{T_i.p} = \frac{6700}{p.(0,01.p+1)} . K_i . \frac{1+T_i.p}{T_i.p}$

### Q28 - Q29 - Q30 : Détermination des paramètres du correcteur

Q28. On souhaite une phase à  $-135^\circ$  à la pulsation 50 rd/s.

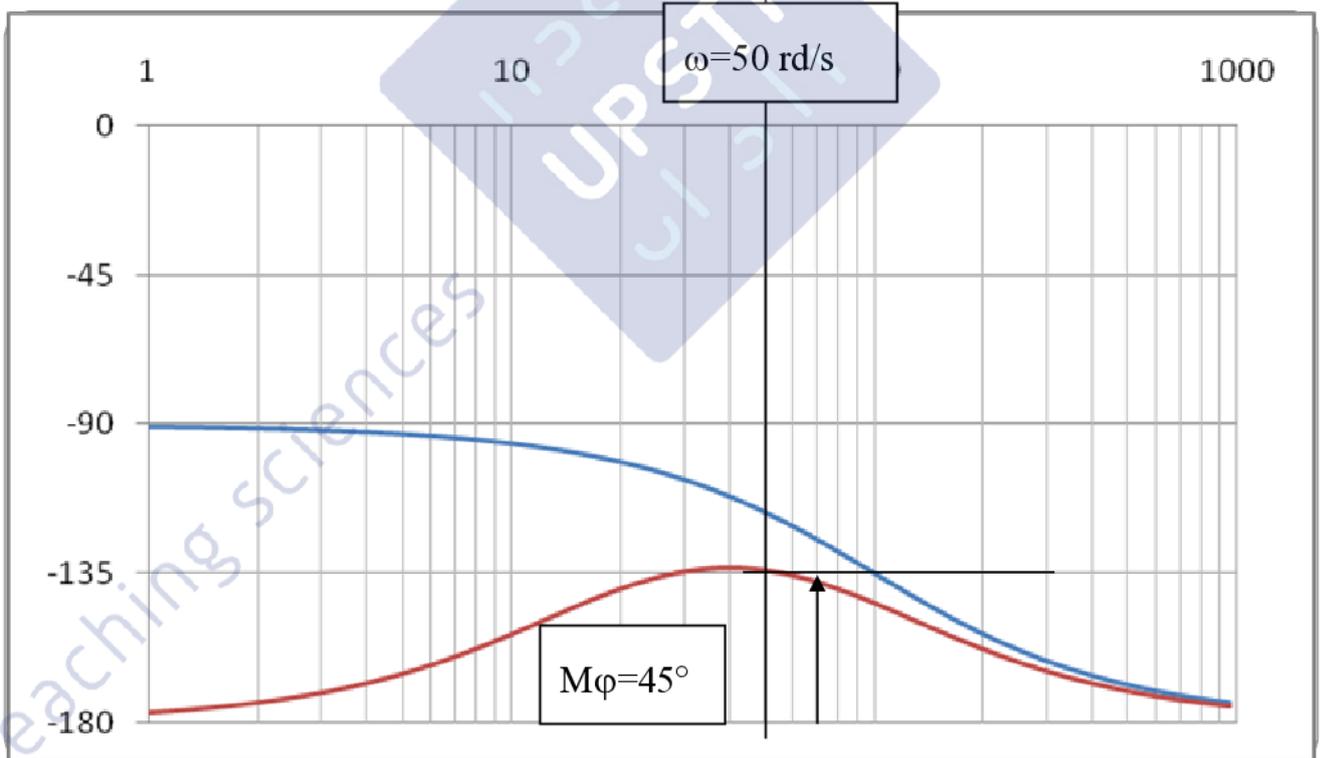
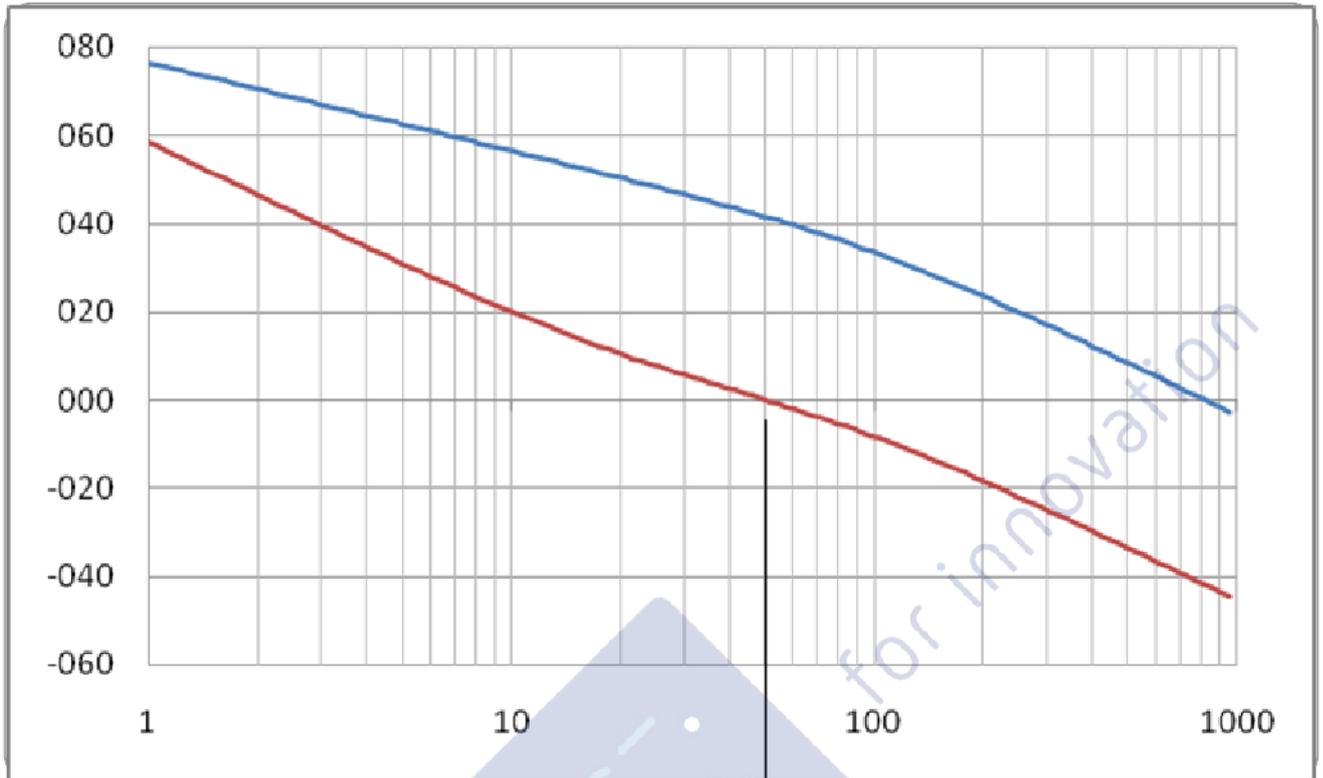
Soit  $-180 - \arctan(0,01.\omega) + \arctan(T_i.\omega) = -135$  pour  $\omega = 50$  rd/s

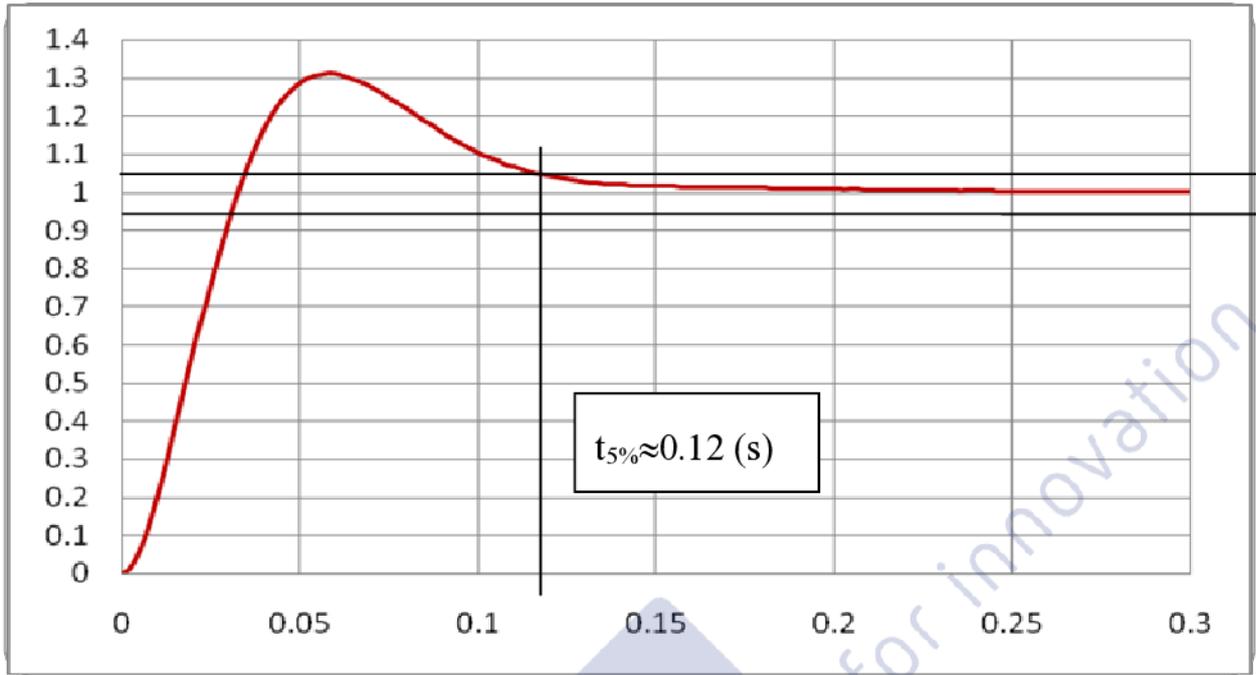
donc  $\arctan(T_i.50) = 73,6 \rightarrow T_i = 0,068(\text{s})$

Q29. Le gain à 50 rad/s doit être unitaire :  $\left| \frac{K_i . 6700}{0,068} . \frac{\sqrt{1+0,068^2 . 50^2}}{50^2 . \sqrt{1+0,01^2 . 50^2}} \right| = 1$

$\rightarrow K_i = 0,008$

Q30. Il semble que le réglage soit correct puisque l'on retrouve la courbe donnée en la traçant (BO non corrigée en bleu et BO corrigée en rouge) :





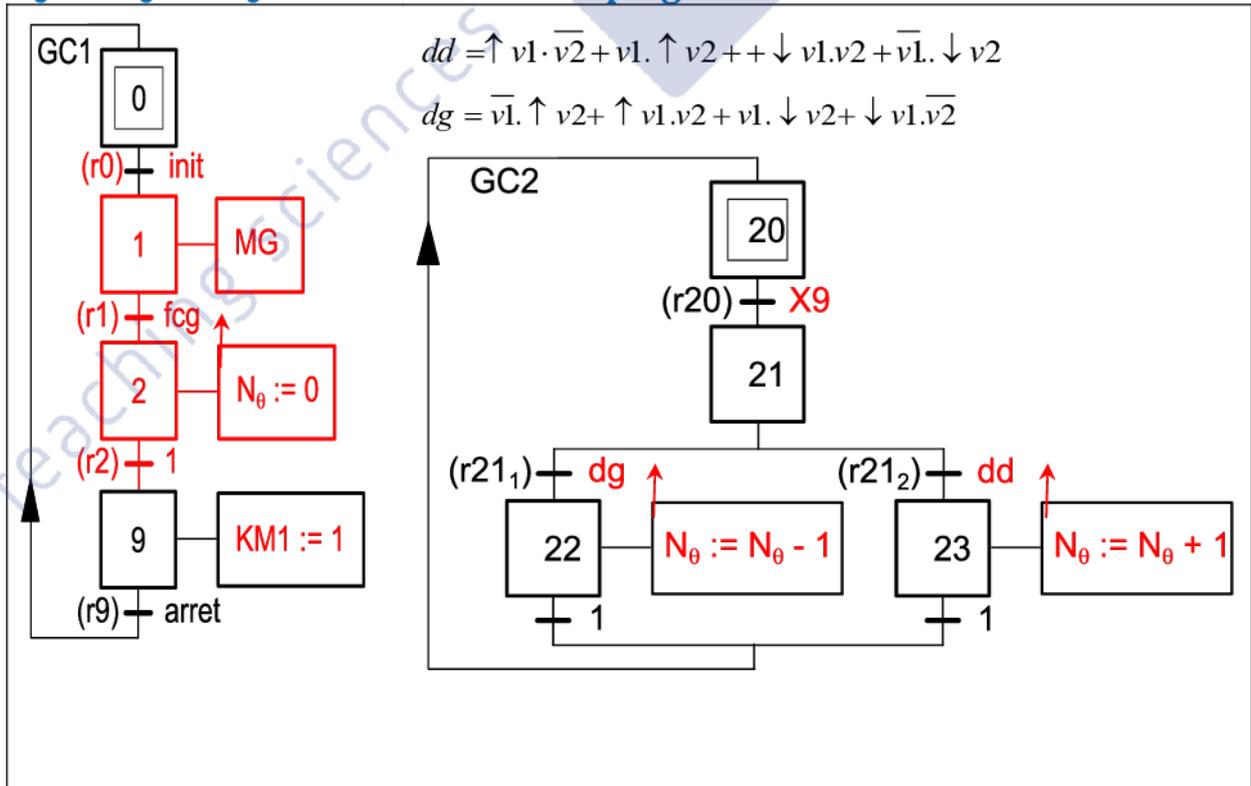
La marge de phase est bien de  $45^\circ$  à  $50$  rd/s. La marge de gain est infinie ( $>$  à  $7$  dB) puisque le phase ne descend pas au dessous de  $-180^\circ$ .

L'erreur statique est nulle et nous avons bien un temps de réponse  $0.12 \text{ s} < 0.2 \text{ s}$

Le cahier des charges est donc respecté.

### CONCEPTION DE LA COMMANDE

#### Q33 - Q34 - Q35 : conduite et comptage



### Q36 : pris en compte des capteurs

$$(r9) = \text{arrêt} + \uparrow \text{fcg} + \uparrow \text{fcd}$$

En mode asservi, l'amplitude du mouvement est fixée par la consigne donnée ( $X_{\min}$ ,  $X_{\max}$ ) et correspond à l'amplitude acceptable pour le patient en fonction de sa taille et de l'évolution de sa rééducation.

Nous réglons alors les capteurs gauche (fcg) et droite (fcd) de façon à ce qu'ils signalent respectivement une position un peu inférieure à  $X_{\min}$  ou un peu supérieure à  $X_{\max}$  (par rapport à la figure 3 de l'énoncé).

Ainsi, le système sort du mode asservi et s'arrête si l'un des capteurs fin de course est atteint lors du fonctionnement en mode automatique (ce qui serait anormal et risquerait de forcer le patient à aller au-delà de ses possibilités).

Une solution par butée mécanique de fin de course est aussi envisageable, mais présenterait l'inconvénient de bloquer le moteur (risque de surchauffe ou de déformation du banc).

## SYNTHESE

### Q37 : démarche

L'analyse fonctionnelle interne permet de mettre en évidence les composants qui contribuent à satisfaire les deux fonctions techniques principales du banc.

Le modèle mécanique proposé permet ensuite de déterminer la loi entrée sortie principale ainsi que les équations des mouvements associées aux deux chaînes fonctionnelles motorisées. Nous sommes ainsi en mesure de valider l'architecture choisie et le choix des actionneurs.

L'équation du mouvement principale est ensuite exploitée et linéarisée pour modéliser l'asservissement de position du chariot longitudinal et déterminer le correcteur nécessaire.

Le fonctionnement de la machine (modes de marche, sécurité et comptage) est modélisé par des grafjets, le mode asservi étant associé à une étape.

L'ensemble de la démarche visait à évaluer les performances du système, à les valider vis-à-vis du cahier des charges, et valider le choix de motorisation associés à la chaîne fonctionnelle principale.