

Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2014

Filière : PT

Épreuve : Sciences Industrielles A

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

TRAIN D'ATERRISSAGE D'HELICOPTERE

Banque PT SIA 2014

Corrigé

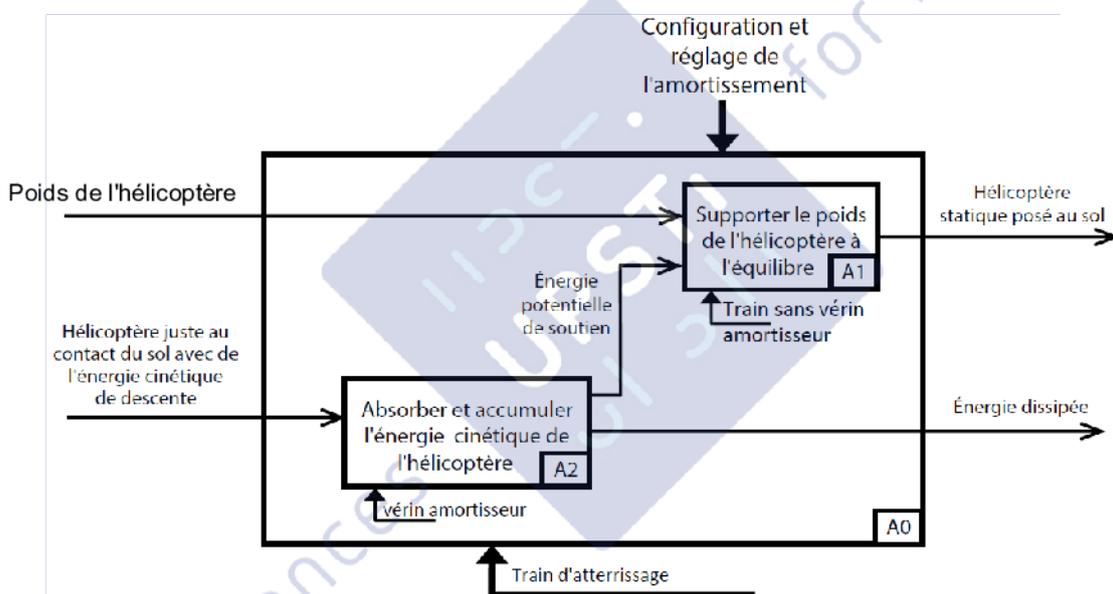
PARTIE A

ANALYSE FONCTIONNELLE ET STRUCTURELLE

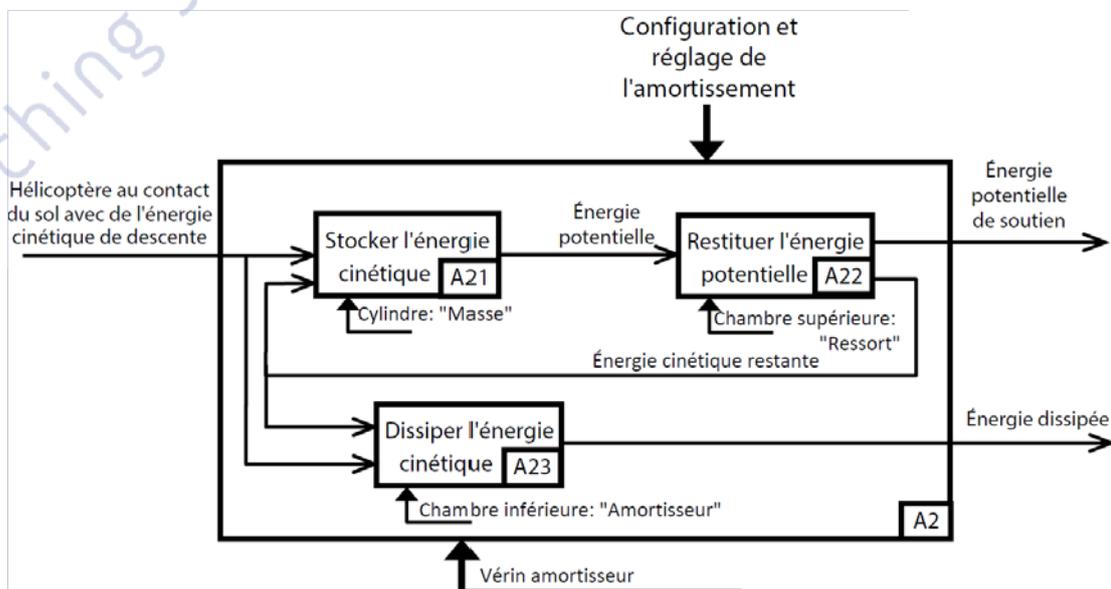
Question 1 Diagramme SADT de niveau A0

Deux solutions sont proposées pour les questions 1 et 2:

Première version, proche d'une décomposition "Masse-ressort-amortisseur" de type Bond Graph ou GIC (ressort = accumulateur d'énergie potentielle, etc.)

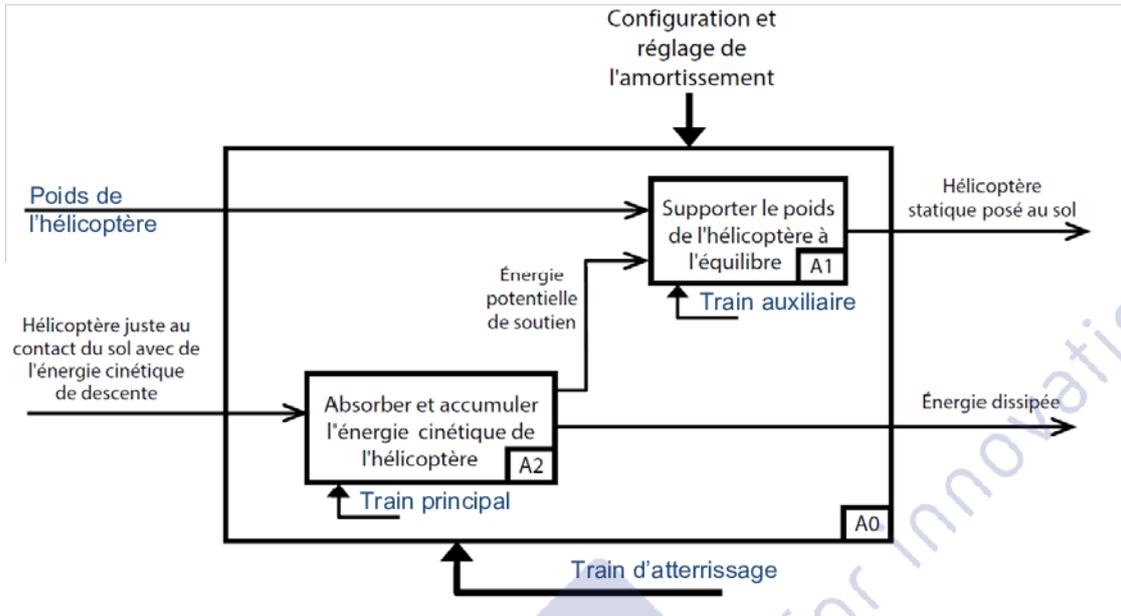


Question 2 Diagramme SADT de niveau A2

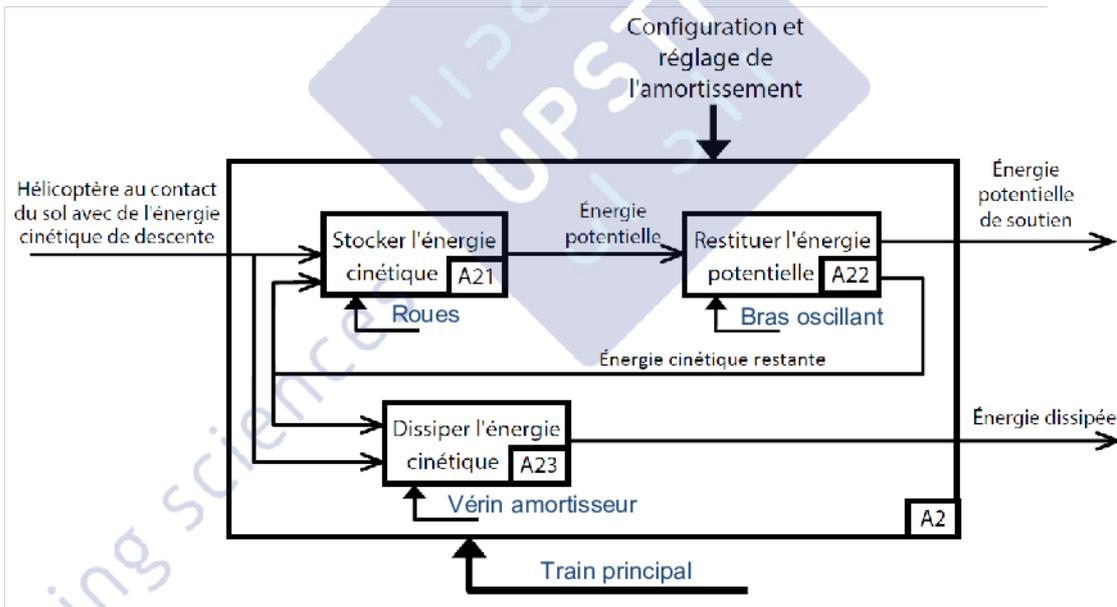


Deuxième version, proche d'une décomposition par sous-ensemble technique :

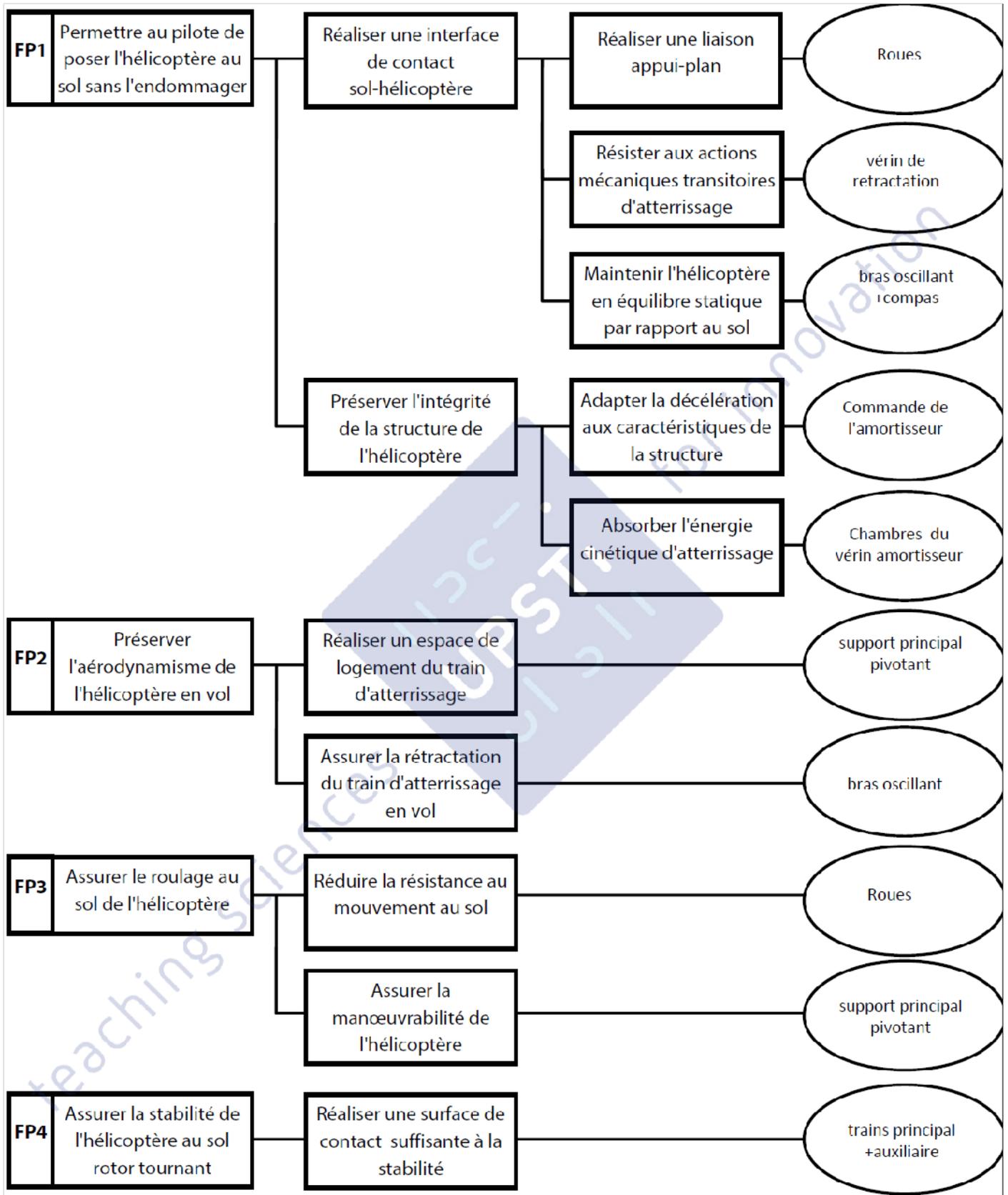
Question 1(bis) :



Question 2 (bis) :



Question 3 Diagramme FAST



Question 4 Degrés de mobilité et d'hyperstatisme de la structure d'une jambe du train principal

Si, on considère tout l'ensemble, il possède 2 degrés de mobilité utiles :

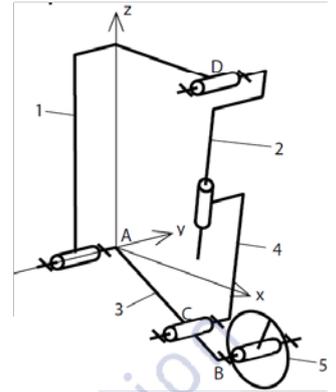
- ✓ la rotation de $5/3$ suivant l'axe (B, \vec{y}) qui permet à la roue de tourner;
- ✓ le mouvement de translation de $4/2$ suivant l'axe de la pivot glissant $4/2$, qui permet au train d'atterrissage d'accoster le sol en réduisant les chocs (rôle du vérin amortisseur).

Par ailleurs, il n'y a aucun degré de mobilité interne au système.

Le degré d'hyperstatisme $h = \text{Nbre des inconnues des actions mécaniques} - (\text{Nbre d'équations issues du PFS} - \text{Nbre de mobilités totales})$.

- ✓ Nbre des inconnues des actions mécaniques = $5+5+5+5+4$ (4 liaisons pivot et une liaison pivot glissant) = 24
- ✓ Nbre d'équations issues du PFS: $6 * (\text{Nbre pièces, bâti exclu}) = 6 * 4 = 24$
- ✓ Nbre de mobilités totales = 2

Le système est donc hyperstatique d'ordre 2.



Question 5 Modifications pour rendre le modèle isostatique

Le système est hyperstatique d'ordre 2 à cause de la présence des liaisons pivots qui imposent des contraintes de parallélisme entre les axes des pivots. En effet, dans la chaîne fermée 1-2-4-3, les deux équations de fermeture cinématique sur les vitesses angulaires, sont de type "0+0=0". Elles signifient qu'il manque 2 mobilités en rotation suivant ces axes.

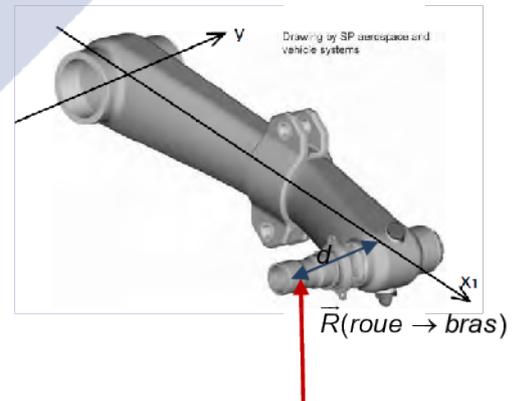
Par conséquent, pour rendre le système isostatique, il faut ajouter deux mobilités en rotation suivants des axes autres que des axes parallèles à la direction \vec{y} . Par exemple, on peut rendre le système isostatique, en remplaçant la liaison 1/3 par une liaison rotule de centre A. Rq: Cette solution n'introduit pas de mobilité interne. On peut également remplacer la liaison 1/2 par une liaison linéaire annulaire (sphère-cylindre) de centre D et d'axe (D, \vec{y}) . On ajoute alors une mobilité interne (rotation possible suivant l'axe de la liaison pivot glissant).

Question 6 Analyse des sollicitations du bras oscillant

L'action mécanique de la roue sur le bras $\vec{R}(\text{roue} \rightarrow \text{bras})$ est de direction \vec{z} , et ne s'applique pas directement sur l'axe (A, \vec{x}_1) (distance d)

Cette action mécanique va engendrer les sollicitations suivantes sur le bras :

- ✓ Traction ou compression suivant \vec{x}_1 quand l'axe (A, \vec{x}_1) n'est pas perpendiculaire à \vec{z}
- ✓ Effort tranchant suivant \vec{z}_1 et moment fléchissant suivant \vec{y} .
- ✓ Torsion suivant \vec{x}_1 due à la distance d , ($\vec{R}(\text{roue} \rightarrow \text{bras})$)



Question 7 Analyse de l'intérêt de l'hyperstatisme

Dans un système isostatique, les équations de la statique suffisent à déterminer les actions mécaniques transmises au niveau des liaisons mais les déformations des pièces sont relativement grandes. Dans un système hyperstatique, les déformations des pièces seront plus faibles mais tout "écart" de géométrie (tolérances de fabrication) provoque des efforts parasites.

Concernant le bras, si l'on souhaite réduire les déformations dues à la torsion, il serait plus judicieux de ne pas ajouter la mobilité en rotation suivant \vec{x}_1 évoquée en question 5. Par contre, il faudra augmenter la quantité de matière aux endroits où sont transmis les efforts parasites.

Question 8 Analyse des conceptions par bras oscillant ou tube coulissant

Lors de l'atterrissage, l'hélicoptère entre en contact avec le sol grâce au train principal. A cet instant, l'accélération angulaire du pylône de queue peut atteindre 3 rad/s^2 et la vitesse relative de l'hélicoptère par rapport au sol comporte une composante horizontale. Le nombre de sollicitations qui s'appliquent sur le train principal a peut être imposé au concepteur une solution par bras oscillant. Le train auxiliaire entre en contact avec le sol plus tardivement, les sollicitations qui s'y appliquent sont moins "extrêmes". Une solution par tube coulissant, de géométrie plus simple a pu être utilisée.

MODELISATION STRUCTURELLE ET COMPORTEMENTALE

B1 – MODÉLISATION DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DU MÉCANISME

Question 9 Relation liant \ddot{z} et $\ddot{\Psi}$

On a directement $z = e \cdot \tan(\Psi)$, soit pour $\Psi \ll 1$, $z = e \cdot \psi$. Au final : $\ddot{z} = e \cdot \ddot{\Psi}$.

Question 10 Théorème de la résultante dynamique

On isole l'hélicoptère = S.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

$$\checkmark \quad \{\text{pesanteur} \rightarrow \text{hélicoptère}\} = \begin{Bmatrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_g \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\checkmark \quad \{\text{sol} \rightarrow \text{hélicoptère}\} = \begin{Bmatrix} F \cdot \vec{z}_g \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K$$

Théorème de la résultante en projection sur \vec{z}_g :

$$M \cdot \ddot{z} = -M \cdot g + F \Leftrightarrow F = M \cdot g + M \cdot e \cdot \ddot{\Psi} \Leftrightarrow F = M \cdot (g + e \cdot \ddot{\Psi}) \quad (1)$$

Question 11 Théorème du moment dynamique au point G en projection suivant \vec{y}_g

$$\delta(G, S/R_g) \cdot \vec{y}_g = \sum \overline{M}_G(\vec{S} \rightarrow S) \cdot \vec{y}_g$$

Or nous avons : $\delta(G, S/R_g) \cdot \vec{y}_g = I_{yy} \cdot \ddot{\Psi}$; $\overline{M}_G(\text{pes} \rightarrow S) \cdot \vec{y}_g = 0$ et $\overline{M}_G(F \rightarrow S) \cdot \vec{y}_g = \cos(\Psi) \cdot e \cdot F \approx e \cdot F$

$$\text{Soit au final : } I_{yy} \cdot \ddot{\Psi} = e \cdot F \Leftrightarrow \ddot{\Psi} = \frac{e \cdot F}{I_{yy}} \quad (2)$$

Question 12 Masse réduite et valeur numérique

On combine les deux équations (1) et (2) obtenues précédemment : $F = M \cdot g + \frac{M \cdot e^2}{I_{yy}} \cdot F \Leftrightarrow (I_{yy} - M \cdot e^2) \cdot F = M \cdot I_{yy} \cdot g$

$$\text{Soit } F = m_1 \cdot g \text{ d'où : } m_1 = \frac{M \cdot I_{yy}}{I_{yy} - M \cdot e^2} \cdot \text{Application numérique : } m_1 = \frac{10^4 \times 8 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^4 - 10^4 \times 4} = \frac{8 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^4} = 20000 \text{ kg}$$

B2 – DÉTERMINATION DE LA RAIDEUR DU RESSORT DE RAPPEL DE LA LIAISON PIVOT 2/1

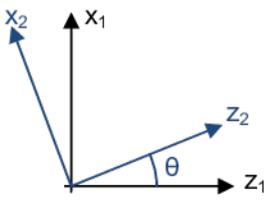
Question 13 Choix de l'équation

Si on isole le solide 2 seul, celui-ci est soumis aux actions mécaniques extérieures dues :

- ✓ à la pesanteur,
- ✓ au couple de rappel élastique
- ✓ à la liaison pivot d'axe (H ; \vec{y}_2) avec 1. Si cette dernière est supposée sans frottements, on écrira alors le théorème du moment dynamique au point H en projection suivant \vec{y}_2 , car $\overline{M}_H(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 = 0$.

Question 14 Expression de ω_0^2

La figure plane de rotation est la suivante :



$$\text{On a : } \vec{\delta}(H, 2/1) = m_2 \overrightarrow{HG_2} \wedge \vec{a}(G_2/1) = m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} \vec{y}_2$$

Le théorème du moment dynamique en H en projection sur \vec{y}_2 donne alors :

$$m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} = -C_{\theta} + m_2 \cdot g \cdot L = -C_{\theta 0} - k_{\theta} \cdot \theta + m_2 \cdot g \cdot L .$$

$$\text{Or à l'équilibre, on a : } C_{\theta 0} = m_2 \cdot g \cdot L , \text{ d'où au final : } \ddot{\theta} + \frac{k_{\theta}}{m_2 \cdot L^2} \theta = 0 .$$

$$\text{Avec : } \omega_0^2 = \frac{k_{\theta}}{m_2 \cdot L^2} .$$

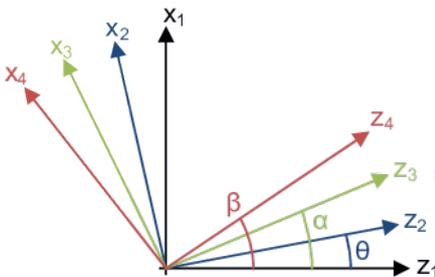
Question 15 Valeur numérique de la raideur k_{θ}

On en déduit : $k_{\theta} = \omega_0^2 \cdot m_2 \cdot L^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2 \cdot m_2 \cdot L^2 .$

Application numérique : $k_{\theta} \approx 4 \times 10 \times 50 \times 600 \times 16 \approx 1,9 \cdot 10^7 \text{ N.m/rad} .$

B3 – DETERMINATION DE LA VARIATION D'INCLINAISON DU VERIN AMORTISSEUR

Question 16 Equations de fermeture géométrique



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow c \vec{x}_g + d \vec{z}_g = a \vec{x}_3 + \ell(t) \vec{z}_3$$

On projette ensuite dans la base R_g :

$$\begin{cases} c = a \cdot \cos(\alpha) + \ell \cdot \sin(\beta) \\ d = -a \cdot \sin(\alpha) + \ell \cdot \cos(\beta) \end{cases}$$

Question 17 Expression de $\tan(\beta)$

$$\begin{cases} c - a \cdot \cos(\alpha) = \ell \cdot \sin(\beta) \\ d + a \cdot \sin(\alpha) = \ell \cdot \cos(\beta) \end{cases} \Rightarrow \tan(\beta) = \frac{c - a \cdot \cos(\alpha)}{d + a \cdot \sin(\alpha)} \approx \beta$$

Question 18 Calcul de $\Delta\beta$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} \approx \frac{a \cdot \sin(\alpha) \cdot (d + a \cdot \sin(\alpha)) - a \cdot \cos(\alpha) \cdot (c - a \cdot \cos(\alpha))}{(d + a \cdot \sin(\alpha))^2} = \frac{a^2 + a \cdot d \cdot \sin(\alpha) - a \cdot c \cdot \cos(\alpha)}{(d + a \cdot \sin(\alpha))^2}$$

Majorons « grossièrement » le terme de droite, pour $\alpha > 0$: $\frac{d\beta}{d\alpha} < \frac{a^2 + a \cdot d}{d^2} .$

On a alors : $\Delta\beta < \frac{a \cdot (a + d)}{d^2} \cdot \Delta\alpha .$ Application numérique : $\Delta\beta < \frac{600 \cdot (600 + 1800)}{1800 \times 1800} \cdot 45^\circ \approx \frac{4}{9} \cdot \frac{\pi}{4} = \pi/9 .$

→ Le débattement angulaire reste en effet faible, et l'hypothèse de négliger β dans la suite est légitime.

MODELISATION DU COMPORTEMENT DU TRAIN PRINCIPAL

C1 – DÉTERMINATION PRÉLIMINAIRE DES CARACTERISTIQUES DU VERIN RAMENÉES AU SOLIDE 1

Question 19 Expression de z en fonction de l, a, b, d, R et h

Fermetures géométriques : $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}$ et $\overline{OG_1} = \overline{OK} + \overline{KB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DG_1}$.

La première donne en projection sur \vec{z}_g : $\sin(\alpha) = \frac{\ell - d}{a}$.

La deuxième en projection suivant \vec{z}_g : $z = 0 + R + b \cdot \sin(\alpha) + \ell + h$.

On regroupe les deux fermetures, pour obtenir : $z = R + \ell + h + b \cdot \frac{\ell - d}{a} \Leftrightarrow z(t) = R + h - \frac{b \cdot d}{a} + \left(\frac{a + b}{a} \right) \cdot \ell(t)$

Question 20 Expression et valeur de la raideur équivalente k_{eq} d'un vérin

$F_r = -k \cdot (\ell - \ell_0)$ et on a de la question précédente : $\ell = \frac{a}{a+b} \left(z - R - h + \frac{b \cdot d}{a} \right) = \frac{a}{a+b} \cdot z + \frac{b \cdot d - a \cdot (R + h)}{a+b}$.

Soit : $F_r = -k \cdot \left(\frac{a}{a+b} \cdot z + \frac{b \cdot d - a \cdot (R + h)}{a+b} - \ell_0 \right) = -\frac{a \cdot k}{a+b} \left(z + \frac{b \cdot d - a \cdot (R + h)}{a} - \ell_0 \right)$. Ainsi : $k_{eq} = \frac{a \cdot k}{a+b}$.

Question 21 Expression et valeur du facteur d'amortissement équivalent λ_{eq}

Nous avons : $\dot{z} = \frac{a+b}{a} \dot{\ell} \Leftrightarrow \dot{\ell} = \frac{a}{a+b} \dot{z}$. Ainsi, $F_v = -\lambda \cdot \dot{\ell} = -\lambda \frac{a}{a+b} \dot{z}$. D'où : $\lambda_{eq} = \frac{a \cdot \lambda}{a+b}$

C2 – MODELE DE COMPORTEMENT DU SOLIDE 2

Question 22 Expression du moment dynamique au point H du solide 2 dans le repère R_g

$$\vec{\delta}(H, 2/R_g) = \vec{\delta}(G_2, 2/R_g) + \overline{HG_2} \wedge m_2 \vec{a}(G_2, 2/R_g)$$

$$\text{Or : } \vec{V}(G_2, 2/R_g) = \frac{d}{dt} \left(\overline{OG_1} + \overline{G_1H} + \overline{HG_2} \right) \Big|_{R_g} = \dot{z} \vec{z}_g + \vec{0} + L \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt} \Big|_{R_g}$$

$$\text{On a : } \frac{d\vec{x}_2}{dt} \Big|_{R_g} = \dot{\theta} \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_2 = -\dot{\theta} \vec{y}_2 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{R_g} = \dot{\theta} \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta} \vec{x}_2$$

$$\text{D'où : } \vec{V}(G_2/R_g) = \dot{z} \vec{z}_g - L \dot{\theta} \vec{z}_2 \quad \text{et} \quad \vec{a}(G_2/R_g) = \frac{d}{dt} \left(\vec{V}(G_2/R_g) \right) \Big|_{R_g} = \ddot{z} \vec{z}_g - L (\ddot{\theta} \vec{z}_2 + \dot{\theta}^2 \vec{x}_2)$$

Le moment dynamique en H vaut alors : $\vec{\delta}(H, 2/R_g) = \vec{0} + L \vec{x}_2 \wedge m_2 \left(\ddot{z} \vec{z}_g - L (\ddot{\theta} \vec{z}_2 + \dot{\theta}^2 \vec{x}_2) \right)$

$$\vec{\delta}(H, 2/R_g) = m_2 \cdot L \left(-\ddot{z} \cdot \cos(\theta) \vec{y}_g + L \ddot{\theta} \vec{y}_g \right) \simeq m_2 \cdot L \left(L \ddot{\theta} - \ddot{z} \right) \vec{y}_g, \text{ en considérant } \cos(\theta) = 1.$$

Question 23 Théorème du moment dynamique au point H, appliqué au solide 2 en projection sur \vec{y}_g

Bilan des actions mécaniques extérieures à 2 :

- ✓ Action de la liaison pivot avec 1, telle que : $\overline{M}_H(1 \rightarrow 2) \cdot \overline{y}_g = 0$,
- ✓ Pesanteur : $-m_2 \cdot g \cdot \overline{z}_g$ en G_2 ,
- ✓ Couples : $\overline{C}_v(1 \rightarrow 2)$ et $\overline{C}_r(1 \rightarrow 2)$.

Moment en H des actions de la pesanteur sur 2 : $\overline{M}_H(g \rightarrow 2) = L \cdot \overline{x}_2 \wedge (-m_2 \cdot g \cdot \overline{z}_g) = m_2 \cdot L \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot \overline{y}_g \approx m_2 \cdot L \cdot g \cdot \overline{y}_g$.

Théorème du moment dynamique en H en projection suivant \overline{y}_g : $m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} - m_2 \cdot L \cdot \ddot{z} = -k_\theta \cdot \theta - \lambda_\theta \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot L \cdot g$ (1)

C3 – MODELE DE COMPORTEMENT DU SOLIDE 1

Question 24 Expression de la puissance galiléenne développée par les actions mécanique extérieure à l'ensemble Σ

- ✓ $P(0 \rightarrow 6/R_g) = 0$, car on considère la roue fixe,
- ✓ $P(g \rightarrow 3 + 4 + 5 + 6/R_g) = 0$, car masses de 3, 4, 5 et 6 négligées,
- ✓ $P(g \rightarrow 1/R_g) = -m_1 \cdot g \cdot \dot{z}$
- ✓ $P(g \rightarrow 2/R_g) = -m_2 \cdot g \cdot \overline{z}_g \cdot (\dot{z} \cdot \overline{z}_g - L \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z}_2) = -m_2 \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \approx -m_2 \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta}$

Soit finalement : $P_{ext} \approx -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta}$

Question 25 Expression de la puissance développée par les interactions mécaniques internes à Σ

- ✓ $P(1 \leftrightarrow 2) = 0 - \lambda_\theta \cdot \dot{\theta}^2 - k_\theta \cdot \theta \cdot \dot{\theta}$
- ✓ $P(4 \leftrightarrow 5) = 0 - \lambda_{eq} \cdot \dot{z}^2 - k_{eq} \cdot (z - z_0) \cdot \dot{z}$

Les autres puissances intérieures sont nulles (liaisons parfaites et solides rigides).

Soit finalement : $P_{int} = -\dot{\theta} \cdot (\lambda_\theta \cdot \dot{\theta} + k_\theta \cdot \theta) - \dot{z} \cdot (\lambda_{eq} \cdot \dot{z} + k_{eq} \cdot (z - z_0))$. On a bien une puissance négative.

Question 26 Expression de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble Σ

- ✓ $E_c(3 + 4 + 5 + 6/R_g) = 0$, car masses de 3, 4, 5 et 6 négligées,
- ✓ $E_c(1/R_g) = \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{z}^2$,
- ✓ $E_c(2/R_g) = \frac{1}{2} m_2 \cdot (\dot{z} \cdot \overline{z}_g - L \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z}_2) \cdot (\dot{z} \cdot \overline{z}_g - L \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z}_2) = \frac{1}{2} m_2 \cdot (\dot{z}^2 + L^2 \cdot \dot{\theta}^2 - 2 \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{z})$

Soit finalement : $E_c(\Sigma/R_g) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_2 (L^2 \cdot \dot{\theta}^2 - 2 \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{z})$

Question 27 Théorème de l'énergie puissance appliqué à l'ensemble Σ

Théorème de l'énergie puissance : $\frac{d}{dt} E_c(\Sigma/R_g) = P_{ext} + P_{int}$; ce qui donne ici :

$$(m_1 + m_2) \cdot \dot{z} \cdot \dot{z} + m_2 \cdot L^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\theta} - m_2 \cdot L \cdot (\dot{\theta} \cdot \dot{z} + \dot{z} \cdot \dot{\theta}) = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot g \cdot L \cdot \dot{\theta} - \dot{\theta} \cdot (\lambda_\theta \cdot \dot{\theta} + k_\theta \cdot \theta) - \dot{z} \cdot (\lambda_{eq} \cdot \dot{z} + k_{eq} \cdot (z - z_0)) \quad (2)$$

Question 28 Combinaison des équations (1) et (2)

Rappel de l'équation (1) : $m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} + k_\theta \cdot \theta + \lambda_\theta \cdot \dot{\theta} = m_2 \cdot L \cdot \ddot{z} + m_2 \cdot L \cdot g$

En mettant dans l'équation (2) l'ensemble des termes facteurs de $\dot{\theta}$, on trouve :

$$\dot{\theta} \cdot [m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} + \lambda_\theta \cdot \dot{\theta} + k_\theta \cdot \theta - m_2 \cdot L \cdot \ddot{z} - m_2 \cdot g \cdot L] + (m_1 + m_2) \cdot \dot{z} \cdot \dot{z} + \dot{z} \cdot (\lambda_{eq} \cdot \dot{z} + k_{eq} \cdot (z - z_0)) = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{z}$$

Or d'après l'équation (1), l'ensemble de ce qui est facteur de $\dot{\theta}$ est nul, on trouve alors l'équation (3) :

$$(m_1 + m_2) \cdot \dot{z} \cdot \dot{z} + \dot{z} \cdot (\lambda_{eq} \cdot \dot{z} + k_{eq} \cdot (z - z_0)) = -(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \dot{z} + m_2 \cdot L \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{z}$$

Et en simplifiant par \dot{z} : $(m_1 + m_2) \ddot{z} + (\lambda_{eq} \dot{z} + k_{eq} (z - z_0)) = m_2 L \ddot{\theta} - (m_1 + m_2) g$ (3)

C4 – DESCRIPTION DE MODÈLE DE COMPORTEMENT SOUS LA FORME D'UN SCHÉMA BLOC

Question 29 Relation autour de la position d'équilibre

A l'équilibre statique, $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \dot{z} = \ddot{z} = 0$. Ce qui donne dans l'équation (1) : $0 = -k_\theta \theta + m_2 L g$.

Soit finalement : $\theta_0 = \frac{m_2 L g}{k_\theta}$.

Le résultat demandé est immédiat, en remplaçant dans (1) : $m_2 L^2 \ddot{\theta} + \lambda_\theta \dot{\theta} + k_\theta (\theta - \theta_0) = m_2 L \ddot{z}$ (1')

Question 30 Equations dans le domaine de Laplace

On a $\dot{z} = z^* - V_0$; $z = z^* - V_0 t + z_0$ et $\theta = \theta^* + \theta_0$

On calcule les transformées de Laplace des équations (1') et (3) :

$$m_2 L^2 \dot{\theta}^*(p) + \lambda_\theta \dot{\theta}^*(p) + k_\theta \theta^*(p) = m_2 L \ddot{z}^*(p)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{z}^*(p) + \lambda_{eq} \left(\dot{z}^*(p) - \frac{V_0}{p} \right) + k_{eq} \left(z^*(p) - \frac{V_0}{p^2} \right) = m_2 L \ddot{\theta}^*(p) - \frac{(m_1 + m_2) g}{p}$$

Remarque : Il semble y avoir une erreur dans l'équation fournie, car le facteur $\frac{a}{a+b}$ est déjà intégré dans k_{eq} et λ_{eq} .

Question 31 Mise en forme des équations et expression par un schéma bloc

$$m_2 L^2 \dot{\theta}^*(p) = m_2 L \ddot{z}^*(p) - \left(\frac{\lambda_\theta}{p} + \frac{k_\theta}{p^2} \right) \ddot{\theta}^*(p) \text{ On en déduit : } H_{12}(p) = \left(\frac{k_\theta + \lambda_\theta \cdot p}{p^2} \right) \ddot{\theta}^*(p)$$

De même :

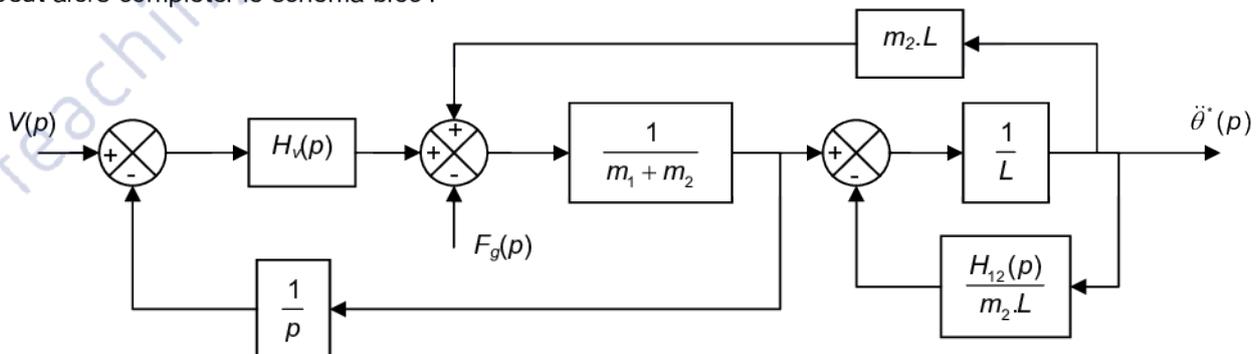
$$(m_1 + m_2) \ddot{z}^*(p) = m_2 L \ddot{\theta}^*(p) - \frac{(m_1 + m_2) g}{p} - \left(\lambda_{eq} + \frac{k_{eq}}{p} \right) \dot{z}^*(p) + \left(\lambda_{eq} + \frac{k_{eq}}{p} \right) V(p), \text{ en remplaçant } \frac{V_0}{p} \text{ par } V(p). \text{ On en}$$

$$\text{déduit : } F_g(p) = \frac{(m_1 + m_2) g}{p} \text{ et } H_{45}(p) = H_v(p) = \left(\frac{k_{eq} + \lambda_{eq} \cdot p}{p} \right).$$

Réécriture des transformées de Laplace en vue d'écrire le schéma bloc correspondant :

$$\ddot{z}^*(p) = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[m_2 L \ddot{\theta}^*(p) - F_g(p) + H_v(p) \cdot (V(p) - \dot{z}^*(p)) \right] \text{ et } \ddot{\theta}^*(p) = \frac{1}{L} \left[\ddot{z}^*(p) - \frac{H_{12}(p)}{m_2 L} \ddot{\theta}^*(p) \right]$$

On peut alors compléter le schéma bloc :



Question 32 Analyse des résultats

Le cahier des charges n'est pas satisfait, dans la mesure où l'accélération angulaire maximale vaut environ 7rad/s², ce qui est plus de deux fois supérieur à l'accélération maximale du cahier des charges : 3,2 rad/s².

MODELISATION DE LA COMMANDE SEMI-ACTIVE

D1 – DÉTERMINATION D'UN MODÈLE DE COMPORTEMENT POUR L'ACTIONNEUR SEMI-ACTIF

Question 33 Constante de temps

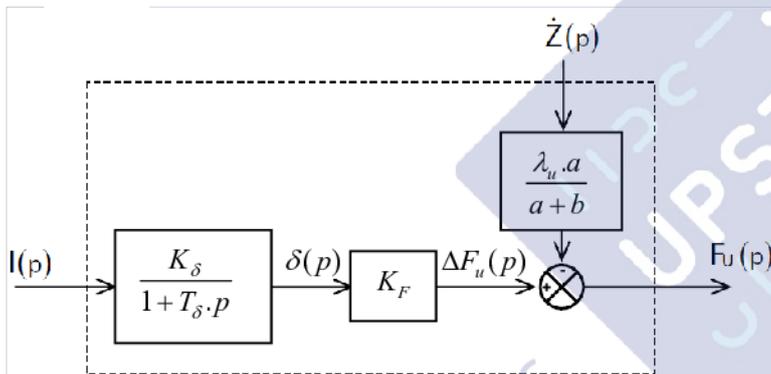
Pour un système du 1er ordre, la constante de temps $T_\delta = \frac{1}{\omega_\delta} = \frac{1}{2\pi \cdot f_\delta}$. En prenant la fréquence de coupure à -3dB sur la courbe à 100%, on relève une fréquence de 26Hz, soit 6 millisecondes.

Question 34 Gain statique.

Le gain correspond à la pente de la droite liant le déplacement à l'intensité, converti en USI.

$$K_\delta = \frac{9 \cdot 10^{-3}}{600 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m / A}$$

Question 35 Schéma-bloc de l'amortisseur pilote



D2 – STRUCTURE DE LA COMMANDE ASSERVIE DE L'AMORTISSEUR SEMI-ACTIF

Question 36 Fonction de transfert

En passant l'équation donnée dans le domaine de Laplace, on obtient:

$$m_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta}^*(p) + \lambda_\theta \cdot \frac{\dot{\theta}^*(p)}{p} + k_\theta \cdot \frac{\theta^*(p)}{p^2} = m_2 \cdot L \cdot \ddot{Z}(p)$$

$$H_\theta(p) = \frac{\ddot{\theta}^*(p)}{\ddot{Z}(p)} = \frac{(m_2 \cdot L / k_\theta) \cdot p^2}{1 + (\lambda_\theta / k_\theta) \cdot p + (m_2 \cdot L^2 / k_\theta) \cdot p^2}$$

Question 37 Stabilité de la queue en réponse à une décélération constante de la cabine

D'après le théorème de la valeur finale, $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\theta}^*(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \ddot{\theta}^*(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H_\theta(p) \cdot \ddot{Z}(p)$ avec $\ddot{Z}(p) = \frac{A_0}{p}$, $H_\theta(0) = 0$ donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\theta}^*(t) = 0$$

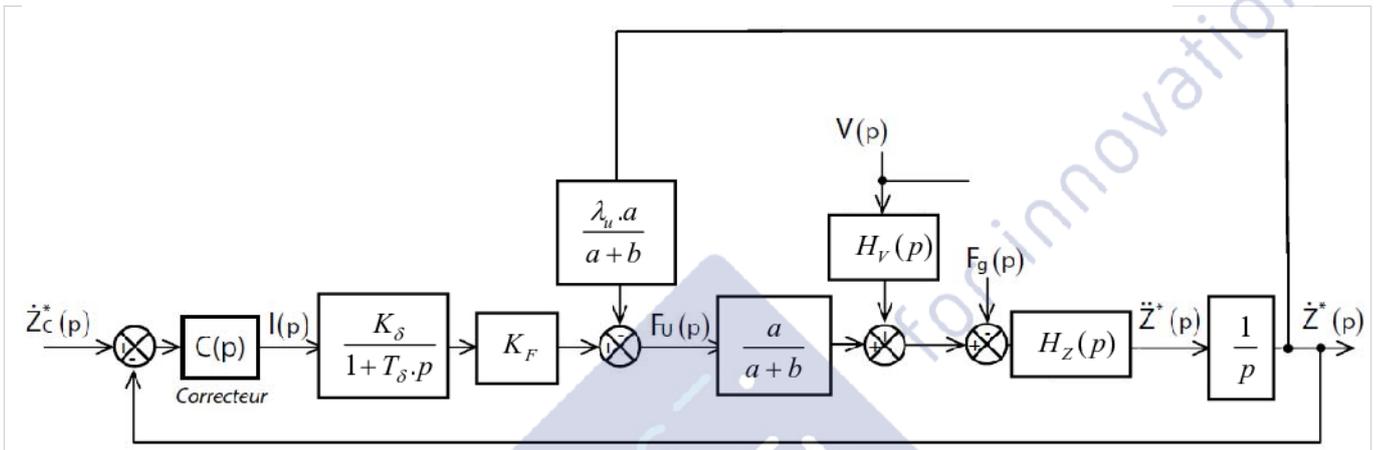
Question 38 Accélération maximale de la queue et validation choix constructeur

D'après le théorème de la valeur initiale, $\ddot{\theta}_{\max} = \lim_{t \rightarrow 0} \ddot{\theta}^*(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \ddot{\theta}^*(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot H_{\theta}(p) \cdot \ddot{Z}(p)$ avec $\ddot{Z}(p) = \frac{A_0}{p}$, $\lim_{p \rightarrow \infty} H_{\theta}(p) = \frac{1}{L}$ donc $\ddot{\theta}_{\max} = \frac{A_0}{L}$. L'accélération maxi de la queue $\ddot{\theta}_{\max}$, dépend de la décélération de la cabine et de la longueur de la queue L, qui est difficilement modifiable. Il est donc cohérent de chercher à contrôler la décélération de la cabine pour maîtriser l'accélération de la queue.

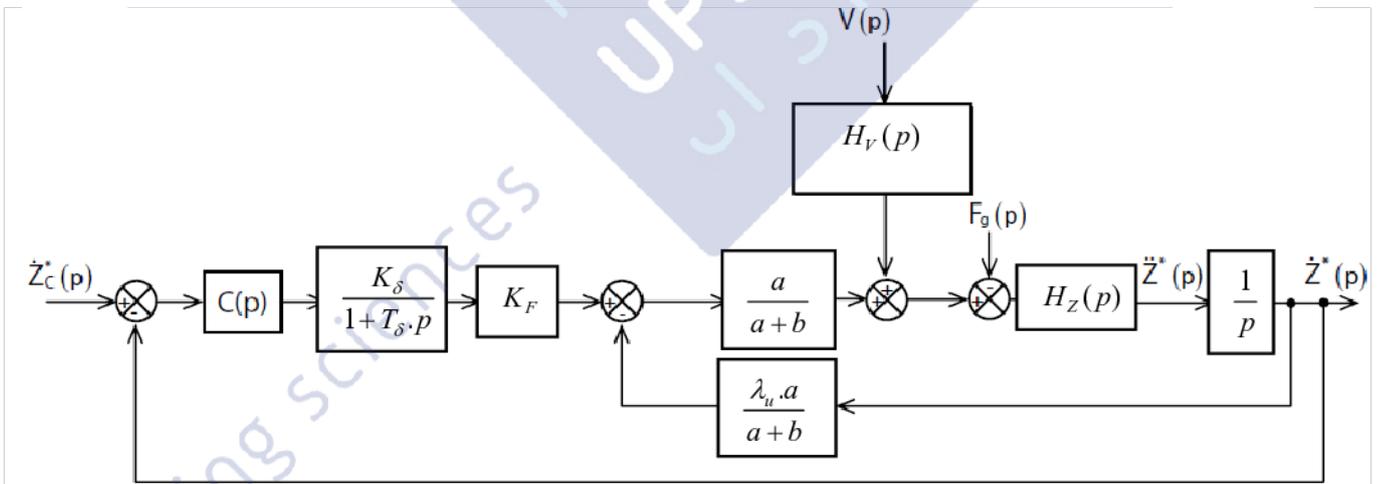
Question 39 Décélération maximale de cabine

L'accélération maxi de la queue ne doit pas dépasser $3rd/s^2$, la longueur $L=4m$, d'où $A_{0max}=12 m/s^2$.

Question 40 Schéma-bloc de la commande semi-active



Question 41 Schéma-bloc simplifié de la commande semi-active



D3 – SIMPLIFICATION DU MODELE DE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DU TRAIN

Question 42 Pôles instables de $H_z(p)$.

Un système est stable si la fonction de transfert qui le caractérise ne possède que des pôles dont la partie réelle est négative. Les 4 pôles de $H_z(p)$ sont tous à partie réelle négative. Il n'y a donc pas de risque d'instabilité.

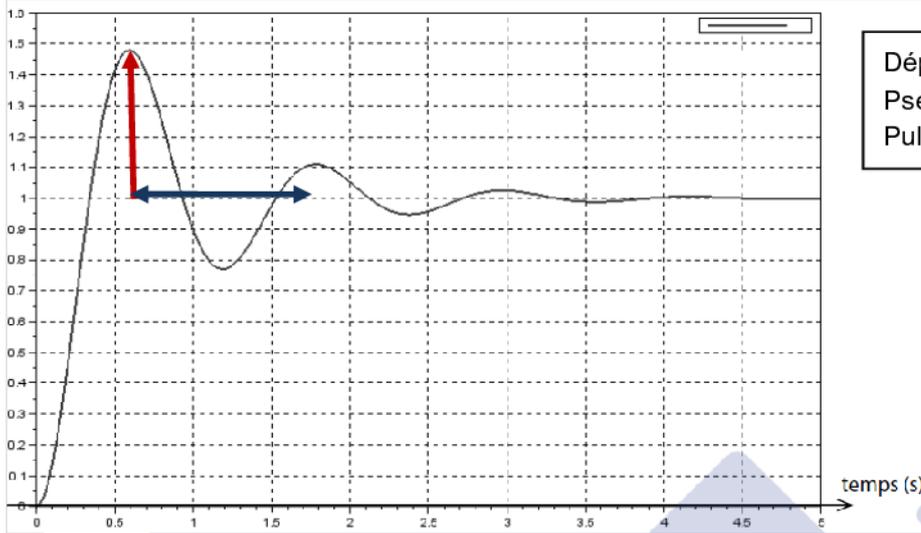
Question 43 Validation du modèle simplifié et gain statique

Les deux zéros z_1 et z_2 , ont des valeurs très proches des pôles p_1 et p_2 . On peut donc simplifier la modélisation en considérant que les zéros se simplifient avec les pôles p_1 et p_2 . On obtient ainsi la forme simplifiée de la fonction

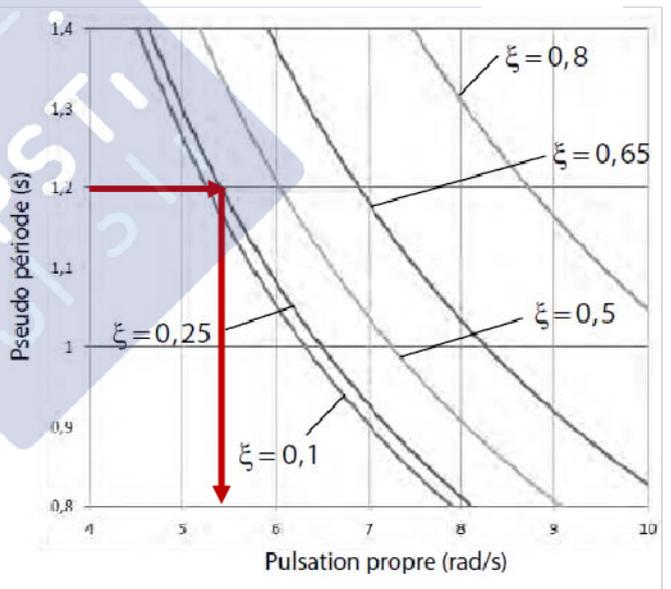
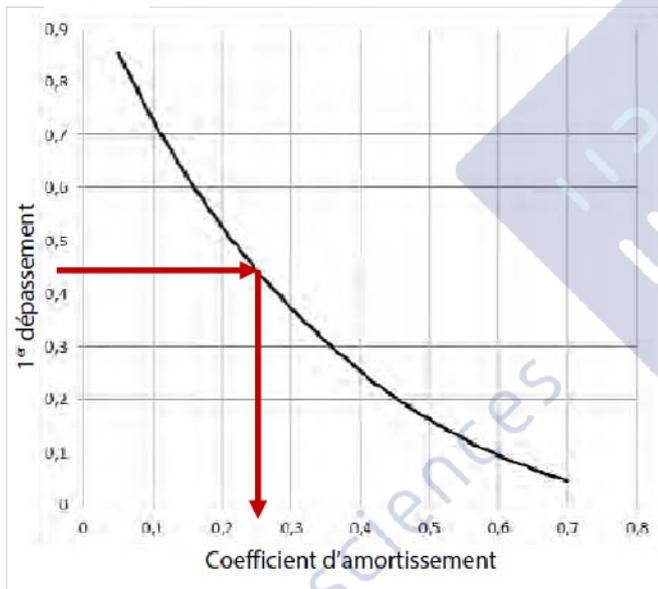
$$H_z(p) . \text{ Cette fonction aura pour gain } K_z = \frac{k_{\theta}}{q_0} = \frac{(a + b)^2}{a^2 \cdot k}$$

Question 44 Identification des paramètres du modèle simplifié

La fonction tracée correspond à $\frac{H_z(p)}{K_z \cdot p^2}$ or, elle s'identifie parfaitement par un second ordre. Cela valide donc la réponse faite en Q43.



Dépassement de 0.45, donc $\xi_z = 0.25$
 Pseudo-période : $1.8 - 0.6 = 1.2$ s
 Pulsation propre: $\omega_z = 5.5 \text{ rad/s}$

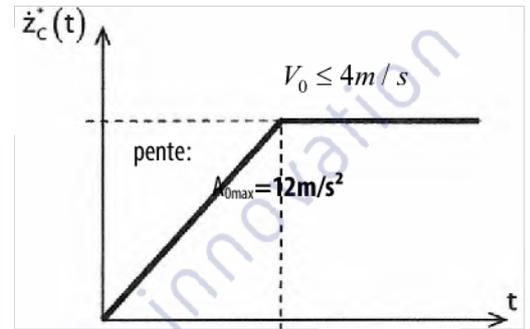


OPTIMISATION DU CORRECTEUR DE LA COMMANDE DE L'AMORTISSEUR

E1 – FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE OUVERTE NON CORRIGEE

Question 45 Forme de la consigne

On souhaite contrôler l'accélération de la queue en fonction de la décélération de la cabine. Cette dernière ne doit pas dépasser une valeur maxi $A_{0max}=12 \text{ m/s}^2$ déterminée en question 39 et la vitesse d'impact au sol ne doit pas dépasser 4m/s. Par conséquent, il est cohérent d'étudier la réponse de l'accélération de la queue pour un entrée ci-contre.



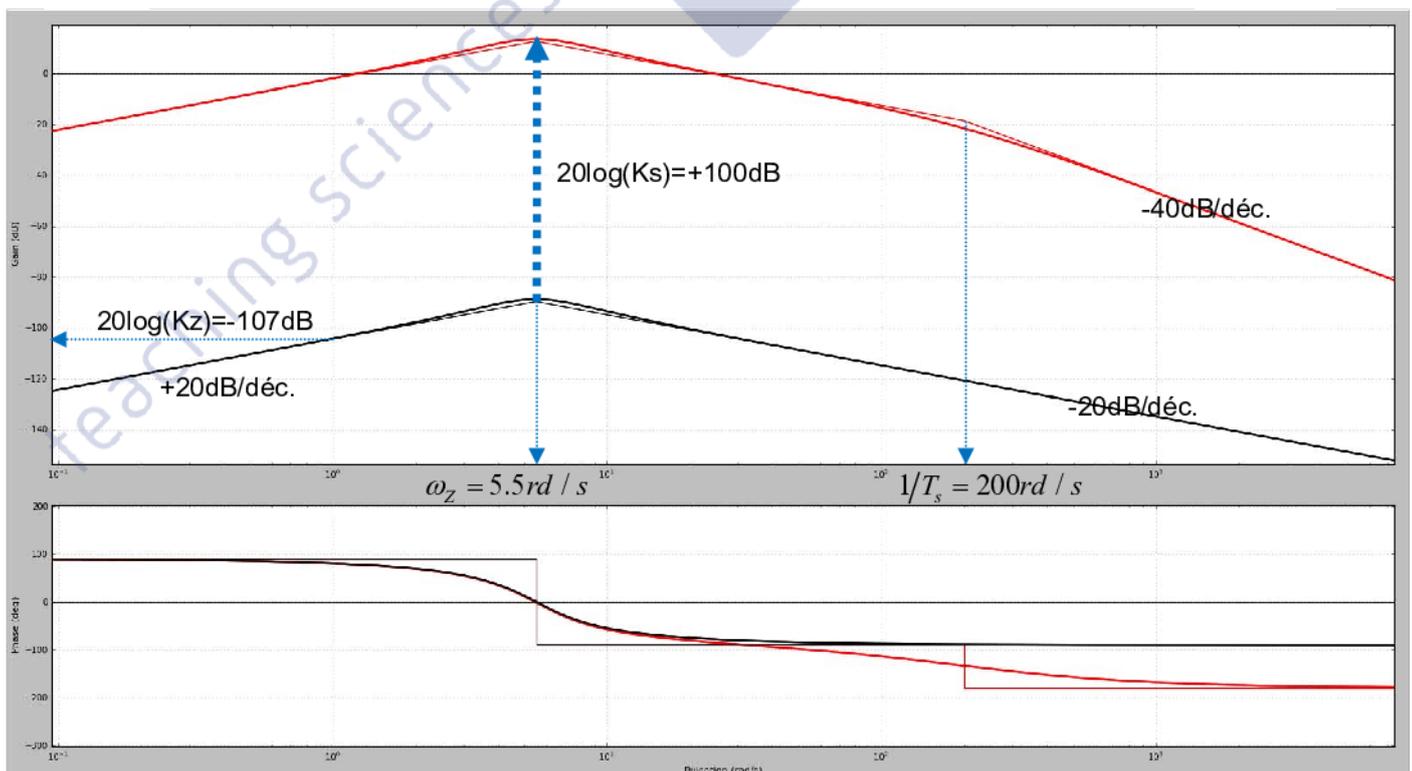
Question 46 Fonction de transfert

$$H_F(p) = \frac{\dot{Z}^*(p)}{F_{eq}(p)} = \frac{H_z(p) / p}{1 + \lambda_a \cdot H_z(p) / p} = \frac{K_z \cdot p}{1 + (2 \cdot \frac{\xi_z}{\omega_z} + K_z \cdot \lambda_a) p + \frac{1}{\omega_z^2} \cdot p^2}$$

Question 47 Fonction de transfert

$$H_{BONC}(p) = H_S(p) \cdot H_F(p) = \frac{K_S}{1 + T_S \cdot p} \frac{K_z \cdot p}{1 + (2 \cdot \frac{\xi_z}{\omega_z} + K_z \cdot \lambda_a) p + \frac{1}{\omega_z^2} \cdot p^2}$$

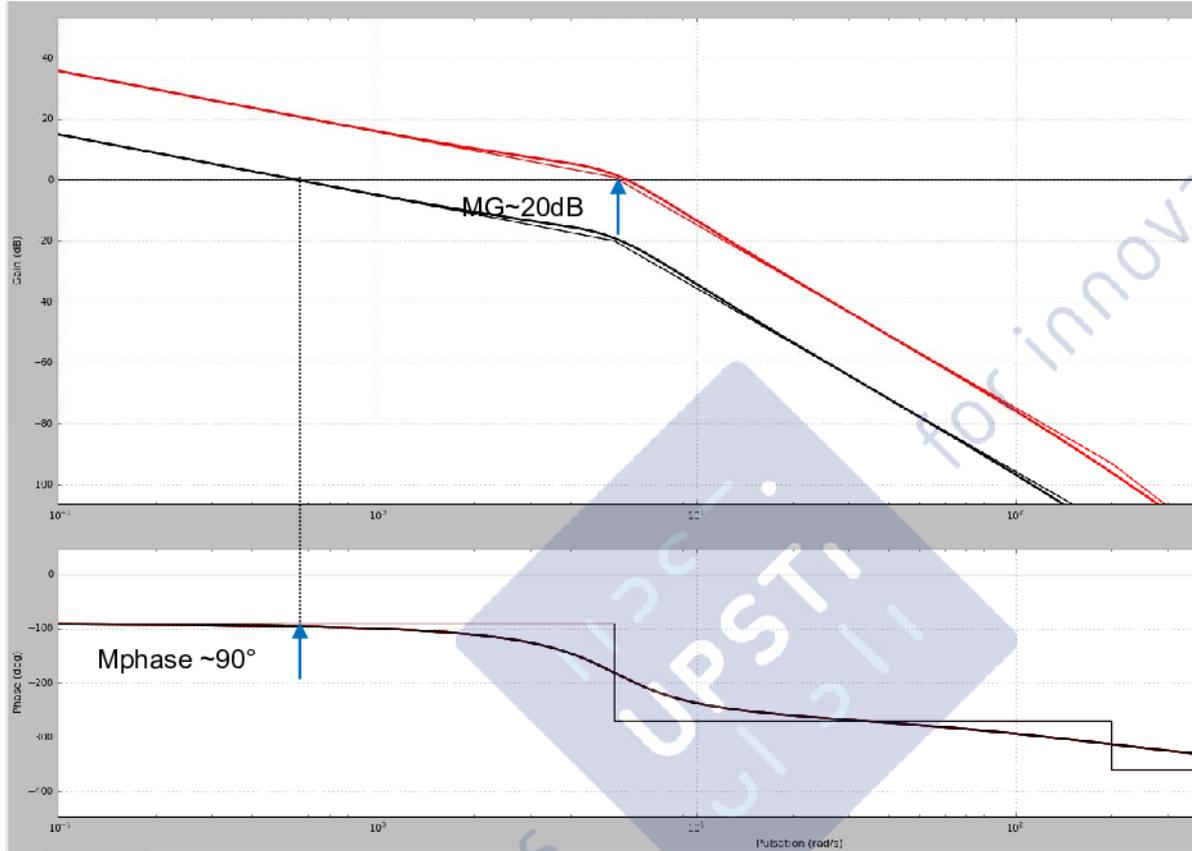
Question 48 Diagramme de Bode de HF(p) et HBONC(p)



Question 49 Classe minimale du correcteur

Pour que l'erreur statique (à une entrée de type échelon) soit nulle, il faut que la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte soit supérieure ou égale à 1. Or, $H_{BOND}(p)$ est de classe (-1). Pour que le système corrigé ait une erreur statique nulle, il faut donc que le correcteur $C(p)$ soit au moins de classe 2.

Question 50 Performances avec $C(p)=KP/p^2$



Avec $K_p=1$ (courbes noires), le système respecte les marges de stabilité mais ne respecte pas la pulsation de coupure à 0dB à $\omega_{odB} = 6rad / s$. Avec $K_p=10$ (en rouge), le système respecte la pulsation de coupure à 0dB pour $\omega_{odB} = 6rad / s$ mais les marges de stabilité ne sont plus assurées.

Question 51 Appellation de la correction complémentaire

Ce correcteur peut d'ajouter une phase φ_{max} à une pulsation $\frac{1}{\sqrt{\mu.T}}$. On dit que ce correction apporte une action à avance de phase.

Question 52 Réglage du correcteur

On souhaite une pulsation de coupure à 0dB pour $\omega_{odB} = 6rad / s$. Sans correction, la courbe de phase vaut -195° pour $\omega_{odB} = 6rad / s$. Pour avoir une marge de phase $M\Phi = 45^\circ$, il faut remonter la courbe de phase de 60°. D'après les documents en annexe 8, il faut donc un coefficient : $\mu = 14$; où $\sqrt{\mu} = 3.75$

Question 53 Réglage du correcteur (suite) et performances en précision

Il faut ensuite caler cette avance de phase sur la pulsation 6rd/s. D'après l'annexe 8, il faut donc $\frac{1}{\sqrt{\mu.T}} = 6rd / s$ d'où $T = 44$ ms.

On a vu en question 50 que si $K_p=10$, le système respecte la pulsation de coupure à 0dB pour $\omega_{odB} = 6rad / s$. L'ajout de la partie "avance de phase au correction" va modifier légèrement la valeur de K_p .

D'après l'annexe 8, il faut maintenant que : $20\log(K_p) + \left[\frac{20\log(\mu.K_p) - 20\log(K_p)}{2} \right] = 20.\log(\sqrt{\mu}.K_p) = +20dB$ d'où:

$$\sqrt{\mu}.K_p = 10 \text{ et } K_p = 2,6$$

Le critère de précision sera validé car le correcteur est de classe 2 (cf. : Q49)

Question 54 Validation du cahier des charges

Pour la vitesse d'impact de 4m/s, on lit sur la réponse temporelle que l'accélération de la queue reste inférieure à 3rd/s². Le critère 2, de la FP1 est validé.