

Proposition de corrigé

Concours : e3a - Polytech

Année : 2016

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Installation capacitaire pour découpe de boucliers de véhicules automobiles

CAHIER REPONSES

**Toutes les réponses seront portées sur ce cahier de réponses à
l'exclusion de toute autre copie.**

L'usage de calculatrices est autorisé.

Ne pas dégrafer

Tournez la page S.V.P.

1- Vérification de faisabilité de la solution par posage matriciel

Question 1 : Justifier, sans calcul, l'hyperstatisme du posage en vous appuyant sur la présentation du sujet.

Les boucliers sont en matière plastique de grande longueur et peu rigides. Le propre poids du bouclier suffit à provoquer une déformation élastique. Le posage doit proposer suffisamment de points de contact/maintien pour positionner et rigidifier la structure afin d'encaisser les efforts des opérations d'usinage.

Question 2 : Justifier les liaisons pivots indexables sur le prototype proposé.

Elles permettent de s'adapter aux différents boucliers pendant l'étude de faisabilité.

Elles permettent aussi d'assurer une rapidité du réglage de mise en position. De plus, pendant la phase de travail, les boucliers sont maintenus en position par obstacle.

Question 3 : Donner la (ou les) dispersion(s) prépondérante(s) pour le positionnement des trous à percer sur la zone centrale des boucliers.

Les dispersions Y véhicule et Z véhicule

Question 4 : Donner le modèle de véhicule le plus pénalisant pour la validation du critère répétabilité de posage. **Comparer** à l'intervalle de tolérance sur la position des trous à $\pm 0,5\text{mm}$.

Modèle 3

$6\sigma = 0,801$ en Y et $6\sigma = 0,798$ en Z.

Soit une dispersion de $\pm 0,4\text{ mm}$ dans le plan.

$\pm 0,4$

$\pm 0,4\text{ mm} < \pm 0,5\text{ mm}$

Question 5 : Conclure sur la faisabilité de la solution pour le projet de posage capacitaire. **Justifier**.

Une telle architecture permet de respecter la cotation.

$\pm 0,4\text{ mm}$ (dispersion posage) + $\pm 0,05\text{ mm}$ (robot) $\leq 1\text{ mm}$

ou $\pm 0,4\text{ mm}$ (dispersion posage) + $\pm 0,1\text{ mm}$ (robot) $\leq 1\text{ mm}$

2-1 Choix de la technologie de la transmission de puissance des axes X et Y

Question 6 : Donner l'expression de $V_{\max}$ pour chacune des solutions en fonction de la fréquence de rotation $N_{\max}$, du pas p et du rayon primitif de la poulie R_p . Préciser les unités. Choisir pour les 2 solutions la motorisation permettant d'atteindre $V_{\max} = 1 \text{ m/s}$.

Module à entraînement par vis à billes

$$V_{\max} = \frac{N_{\max}}{60} \cdot p$$

$$V_{\max} = \frac{N_{\max}}{60} \cdot p \quad [\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{tr} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}]$$

Module à entraînement par poulies-courroie

$$V_{\max} = R_p \cdot \omega_{\max} = R_p \cdot \frac{\pi \cdot N_{\max}}{30}$$

$$V_{\max} = R_p \cdot \frac{\pi \cdot N_{\max}}{30} \quad [\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m} \cdot \text{rd} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Choix motorisation entraînement vis à billes :

$$N = 6000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

Choix motorisation entraînement poulies-courroie :

$$N = 3000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

Si nécessaire choisir le rapport de réduction nécessaire du réducteur pour limiter la vitesse linéaire à $V_{\max} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Rapports disponibles : 3, 5, 8.

Choix réducteur entraînement vis à billes
Pas de réducteur

Choix réducteur entraînement poulies-courroie
 $R = 5$ pour obtenir $V_{\max} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Conclure sur le respect du critère reconfiguration en moins de 1s et **préciser** les éventuelles conditions.

Respect du critère reconfiguration car tous les déplacements sont $< 1 \text{ m}$ sous réserve qu'ils s'effectuent en interpolation linéaire.

Question 7 : Citer l'avantage prépondérant du codeur absolu par rapport au codeur incrémental et son inconvénient majeur.

Avantage prépondérant : La position est connue à la mise sous tension

Inconvénient majeur : Le prix, course limitée.

Calculer le nombre de pistes mini du codeur de l'axe X pour respecter la précision de 0,1 mm. **Expliquer** clairement votre démarche.

Pour un tour réducteur le module avance de 16.2π . Le moteur lui fait 5 tours. Par tour moteur le module avance de $16.2\pi/5 = 20 \text{ mm}$. $2^n > 20/0.1$ d'où $n > 7.68$. Le codeur doit donc posséder au moins 8 pistes.

Nombre de pistes mini = 8 pistes

Calculer le nombre de tours mini du codeur absolu multi-tours associé au moteur pour une course maxi du module de 500 mm.

Par tour moteur le

Par tour moteur le module avance de $16.2\pi/5=20\text{mm}$. Soit un codeur avec un nombre mini de tours de $500/20=25\text{tr}$

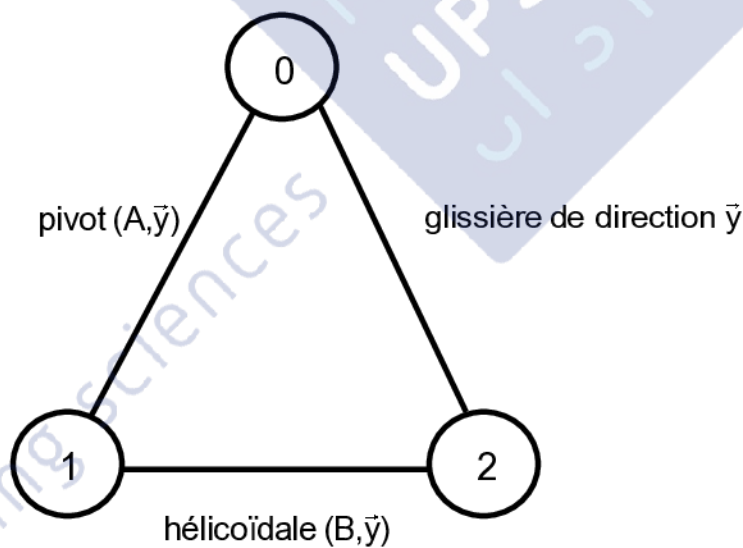
Nombre de tours mini codeur = 25 tours

Conclure sur les caractéristiques du codeur à choisir pour assurer la précision de 0,1mm sur une course de 500mm.

Codeur avec au moins 8 pistes pour assurer la précision et au moins 5 pistes pour mesurer la course

2-2 Etude de la structure mécanique de l'axe motorisé Y

Question 8 : Donner le graphe des liaisons du mécanisme.
Nommer et **caractériser** toutes les liaisons



Question 9 : Ecrire le torseur des actions transmissibles pour chacune des liaisons

$$\{T(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{02} & L_{02} \\ 0 & M_{02} \\ Z_{02} & N_{02} \end{array} \right\}_{\forall P}$$

$$\{T(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{array} \right\}_{\forall P, (A, \dot{y})}$$

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{\forall P, (B, \dot{y})}$$

Donner pour le torseur $\{T(1 \rightarrow 2)\}$, la relation liant M_{12} à Y_{12} et p .

$$M_{12} = \pm \frac{p}{2.\pi} Y_{12} \text{ en fonction du sens de l'hélice.}$$

$$M_{12} = \pm \frac{p}{2.\pi} Y_{12}$$

Question 10 : Donner l'expression du degré d'hyperstaticité h du mécanisme en fonction de m , E_s et I_s . Faire l'application numérique.

$$m=1$$

$$E_s = 6.(N-1) \text{ avec } N \text{ le nombre de pièces bâti inclus.}$$

$$E_s = 12$$

$$I_s = 5+5+5 = 15$$

AN :

$$h = m + I_s - E_s$$

$$h = 4$$

Question 11 : Conclure sur la nature des contraintes à mettre en place si le modèle n'est pas modifié. Préciser en un mot la principale qualité d'un système hyperstatique et son principal défaut.

Contraintes dimensionnelles et/ou angulaires

2 contraintes angulaires de parallélisme :

- Axe hélicoïdal colinéaire à axe glissière dans la pièce 2
- Axe pivot colinéaire à axe glissière dans la pièce 0

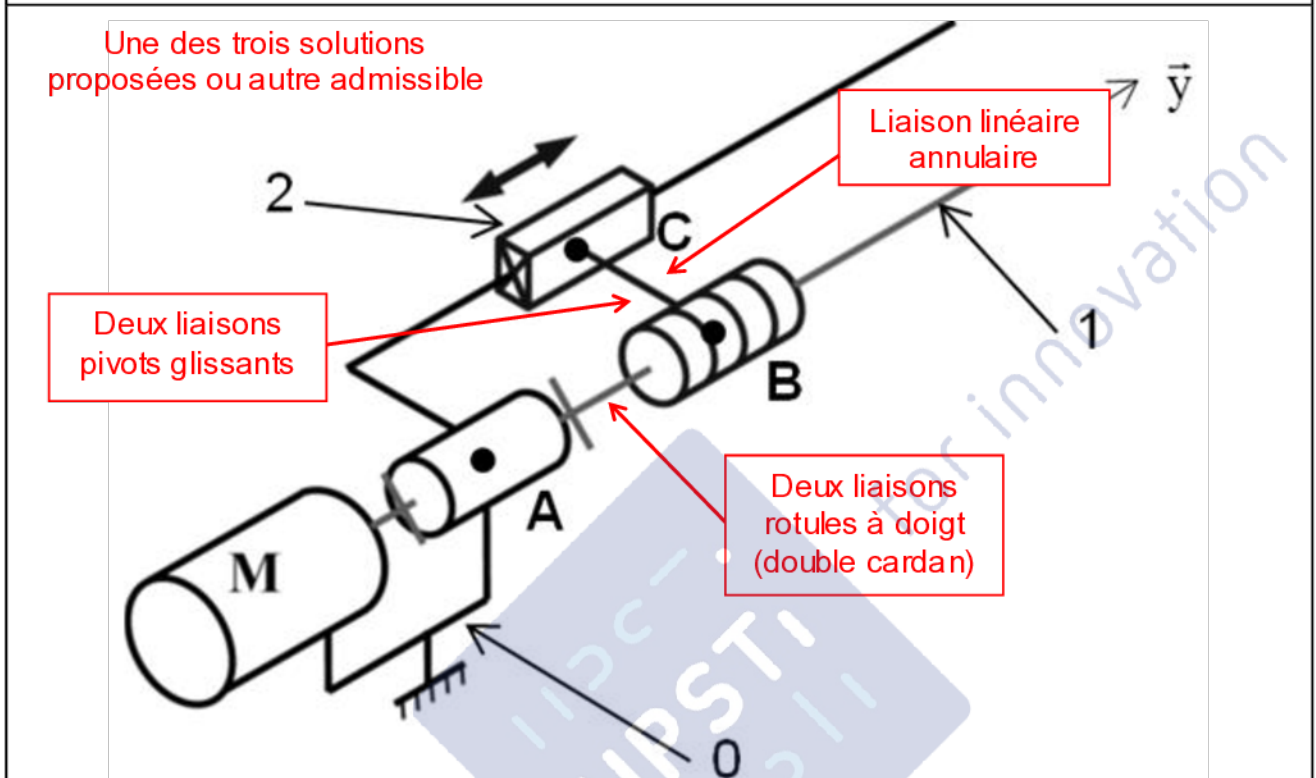
2 contraintes dimensionnelles :

- Suivant x : AC de la pièce 0 doit être égale à CB de la pièce 2
- Suivant z : AB de la pièce 1 doit être égale à AC de la pièce 0

Principale qualité : Rigidité

Principal défaut : le montage de l'ensemble demande une réalisation précise pour respecter les contraintes géométriques précédentes, donc plus coûteux

Question 12 : Proposer sur le document réponse l'ajout d'une ou deux liaisons supplémentaires permettant de lever l'hyperstatisme. Nommer et situer cette ou ces liaisons sur la figure ci-dessous.



2-3 Vérification du dimensionnement de la motorisation de l'axe X

Question 13 : Donner l'expression littérale du moment d'inertie total équivalent J_{Teq} .

$$E_c(\text{axe X}) = \frac{1}{2} J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r \cdot \omega_m^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} J_p \cdot \omega_p^2 + \frac{1}{2} M \cdot V^2$$

$$E_c(\text{axe X}) = \frac{1}{2} \left(J_m + J_r + 2 \cdot J_p \cdot \frac{1}{n^2} + M \cdot \frac{R_p^2}{n^2} \right) \cdot \omega_m^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\text{Teq}} \cdot \omega_m^2$$

En identifiant

$$J_{\text{Teq}} = J_m + J_r + 2 \cdot J_p \cdot \frac{1}{n^2} + M \cdot \frac{R_p^2}{n^2}$$

Faire l'application numérique.

$$J_{\text{Teq}} = 6,644 \cdot 10^{-4} \text{ Kg.m}^2$$

Question 14 : Donner la relation liant la puissance maxi $P_{\max}$ à C_m et ω_m pendant la phase d'accélération

En l'absence d'efforts résistants le couple C_m sera constant dans le cas d'une rampe et nul à vitesse constante

$$P_{\max} = C_m \cdot \omega_m$$

Question 15 : Donner l'expression de V en fonction de ω_m , R_p et n

$$V = R_p \cdot \frac{\omega_m}{n}$$

Ecrire l'expression du couple moteur C_m requis en phase d'accélération en fonction de J_{Teq} , n , R_p et γ .

TEC sur l'ensemble des pièces en mouvement

$$P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = dE_c/dt \text{ avec } P_{\text{int}}=0 \Rightarrow C_m \cdot \omega_m = J_{\text{Teq}} \cdot \omega_m \cdot \frac{d\omega_m}{dt}$$

$$C_m = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{d\omega_m}{dt} = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma$$

$$C_m = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma$$

Montrer que $P_{\max}$ peut s'écrire $P_{\max} = A \cdot \frac{X^2}{t_a \cdot (T - t_a)^2}$.

Donner l'expression de A .

$$P_{\max} = C_m \cdot \omega_{m \max} = C_m \cdot \frac{V_{\max} \cdot n}{R_p} \text{ avec } C_m = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma_{\max}$$

$$P_{\max} = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma_{\max} \cdot \frac{V_{\max} \cdot n}{R_p} = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n^2}{R_p^2} \cdot \gamma_{\max} \cdot V_{\max}$$

Durant l'accélération $\gamma_{\max} = \frac{V_{\max}}{t_a}$

$$P_{\max} = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n^2}{R_p^2} \cdot \frac{V_{\max}^2}{t_a}$$

Le déplacement parcouru (aire du trapèze) est $X = V_{\max} \cdot (T - t_a)$

$$P_{\max} = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n^2}{R_p^2} \cdot \frac{X^2}{t_a (T - t_a)^2}$$

$$A = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n^2}{R p^2}$$

Question 16 : Ecrire l'expression de la dérivée de P_{max} par rapport à t_a . Donner la (ou les) valeur(s) de t_a qui minimise(nt) P_{max} .

$$\frac{dP_{\text{max}}}{dt_a} = \frac{d}{dt_a} \left[J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n^2}{R p^2} \cdot \frac{X^2}{t_a(T-t_a)^2} \right] = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n^2}{R p^2} \cdot X^2 \cdot \frac{d}{dt_a} \left[\frac{1}{t_a(T-t_a)^2} \right]$$

La dérivée s'annule si $\frac{d}{dt_a} \left[\frac{1}{t_a(T-t_a)^2} \right] = 0$

Forme $\left(\frac{1}{u} \right)' = \frac{-u'}{u^2}$ $u = t_a \cdot (T^2 - 2T \cdot t_a + t_a^2) = T^2 \cdot t_a - 2T \cdot t_a^2 + t_a^3$

Il vient $\frac{d}{dt_a} \left[\frac{1}{t_a(T-t_a)^2} \right] = \frac{-3t_a^2 + 4Tt_a - T^2}{t_a^2(T-t_a)^4}$

t_a ne pouvant être $\geq T$, le dénominateur est toujours positif et l'expression s'annule si

$$-3t_a^2 + 4Tt_a - T^2 = 0$$

Deux racines réelles :

$t_a = T$, solution impossible

$t_a = T/3$, solution retenue

$$\frac{dP_{\text{max}}}{dt_a} = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n^2}{R p^2} \cdot X^2 \cdot \frac{-3t_a^2 + 4Tt_a - T^2}{t_a^2(T-t_a)^4}$$

valeur(s) de t_a qui minimise(nt) P_{max} .

$$t_a = T/3$$

Conclure. Le profil de vitesse en trapèze à puissance minimale consiste bien à répartir le déplacement en 1/3 accélération, 1/3 vitesse constante et 1/3 décélération (cycle équilibré).

Question 17 : donner l'expression littérale du couple résistant C_r ramené à l'arbre moteur en fonction de M , g , R_p et n .

Hypothèse : Rendement=1 : les frottements sont négligés

$$C_r = M.g.\frac{R_p}{n}$$

$$C_r = M.g.\frac{R_p}{n}$$

donner l'expression littérale du couple électromécanique C_m à fournir par le moteur pour les 3 zones du trapèze lors de la montée de l'axe vertical en fonction de M , g , R_p , J_{Teq} , n et γ en complétant le tableau.

Zone	Couple moteur
①	$C_m = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma + M.g.\frac{R_p}{n}$
②	$C_m = M.g.\frac{R_p}{n}$
③	$C_m = -J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma + M.g.\frac{R_p}{n}$

Question 18 : Ecrire l'expression de l'accélération maximale théorique γ_{max} de l'axe. Faire l'application numérique.

L'accélération maximale est fonction du couple maxi fourni par le moteur

$$\gamma_{\text{max}} = \left[C_{m \text{ max}} - M.g.\frac{R_p}{n} \right] \cdot \frac{R_p}{n} \cdot \frac{1}{J_{\text{Teq}}} = \left[4,2 - 10,9,81 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-3}}{5} \right] \cdot \frac{16 \cdot 10^{-3}}{5} \cdot \frac{1}{6,644 \cdot 10^{-4}} = 18,7 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\gamma_{\text{max}} = \left[C_{m \text{ max}} - M.g.\frac{R_p}{n} \right] \cdot \frac{R_p}{n} \cdot \frac{1}{J_{\text{Teq}}}$$

$$\gamma_{\text{max}} = 18,7 \text{ m.s}^{-2}$$

Ecrire l'expression de la vitesse maximale V_{max} atteignable en tenant compte des choix techniques sur l'axe X. Faire l'application numérique.

$$V_{\text{max}} = N_{\text{max}} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot \frac{R_p}{n} = 3000 \cdot \frac{\pi}{30} \cdot \frac{16 \cdot 10^{-3}}{5} = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

$$V_{\text{max}} = N_{\text{max}} \cdot \frac{\pi}{30} \cdot \frac{R_p}{n}$$

$$V_{\text{max}} = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

Question 19 : Montrer que l'on peut l'exprimer

sous la forme : $X_{\min} = \frac{2.V_{\max}^2}{\gamma_{\max}}$

$$X = X_a + X_b + X_c = \frac{V_{\max} \cdot t_a}{2} + V_{\max} \cdot t_a + \frac{V_{\max} \cdot t_a}{2} = 2.V_{\max} \cdot t_a$$

avec $t_a = \frac{V_{\max}}{\gamma_{\max}}$

$$X_{\min} = \frac{2.V_{\max}^2}{\gamma_{\max}}$$

Calculer $X_{\min}$ en prenant les valeurs numériques suivantes :

$$\gamma_{\max} = 19 \text{ m.s}^{-2} ; V_{\max} = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

$$X_{\min} = 0,105 \text{ m}$$

Question 20 : Calculer γ réelle pour une course de 200 mm supérieure à $X_{\min}$.

$$X_{\min} = \frac{2.V_{\max}^2}{\gamma_{\max}} \quad \text{d'où} \quad \gamma_{\text{réelle}} = \frac{2.V_{\max}^2}{X} = \frac{2.1^2}{0,2} = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\gamma_{\text{réelle}} = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

En **déduire** la valeur du couple électromécanique C_m à fournir par le moteur à l'accélération et à la décélération

$$C_m = J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma + M \cdot g \cdot \frac{R_p}{n} = 6,644 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{5 \cdot 10}{16 \cdot 10^{-3}} + 10,9,81 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-3}}{5} = 2,39 \text{ Nm}$$

$$C_m = -J_{\text{Teq}} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma + M \cdot g \cdot \frac{R_p}{n} = -6,644 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{5 \cdot 10}{16 \cdot 10^{-3}} + 10,9,81 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-3}}{5} = -1,76 \text{ Nm}$$

$$C_m \text{ accélération} = 2,39 \text{ Nm}$$

$$C_m \text{ décélération} = -1,76 \text{ Nm}$$

Question 21 : Calculer V_{att} et donner γ réelle pour une course de 50mm.

Pour $X < X_{mini}$ le système ne va pas atteindre V_{max} mais l'accélération sera maxi avec $t_a = T/3$

$$\gamma_{max} = 19 \text{ m.s}^{-2} \quad \text{on a alors } V_{att} = \sqrt{\frac{X \cdot \gamma_{max}}{2}} = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 19}{2}} = 0,69 \text{ m.s}^{-1}$$

$$V_{att} = 0,69 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\gamma \text{ réelle} = 19 \text{ m.s}^{-2}$$

En **déduire** la valeur du couple électromécanique C_m à fournir par le moteur à l'accélération et à la décélération

$$C_m = J_{Teq} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma + M \cdot g \cdot \frac{R_p}{n} = 6,644 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{5 \cdot 19}{16 \cdot 10^{-3}} + 10,9,81 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-3}}{5} = 4,26 \text{ Nm}$$

$$C_m = -J_{Teq} \cdot \frac{n}{R_p} \cdot \gamma + M \cdot g \cdot \frac{R_p}{n} = -6,644 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{5 \cdot 19}{16 \cdot 10^{-3}} + 10,9,81 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-3}}{5} = -3,63 \text{ Nm}$$

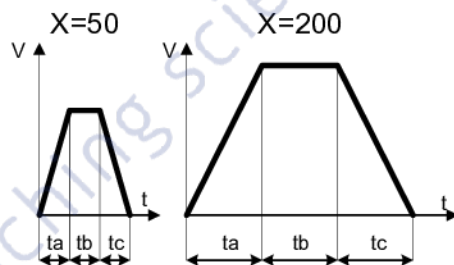
$$C_m \text{ accélération} = 4,26 \text{ Nm}$$

$$C_m \text{ décélération} = -3,63 \text{ Nm}$$

Question 22 : Pour conclure l'étude, **comparer** la loi de mouvement équirépartie ($t_a = t_b = t_c$) à la loi de Mouvement Rectiligne Uniformément Varié (MRUV) en complétant le tableau.

$$\gamma_{max} = 19 \text{ m.s}^{-2} ; \quad V_{max} = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

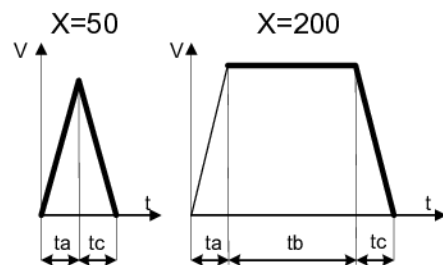
Loi de vitesse équirépartie - règle des 1/3



Avantage(s) : - puissance minimale
- durée vie moteur augmentée
- mouvement plus doux.

Inconvénient(s) : temps de déplacement plus long

Loi de vitesse MRUV

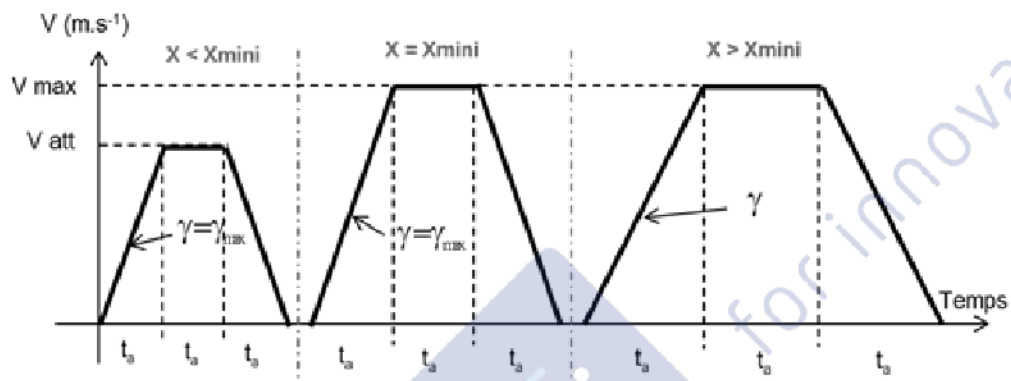


Avantage(s) : temps de déplacement minimal

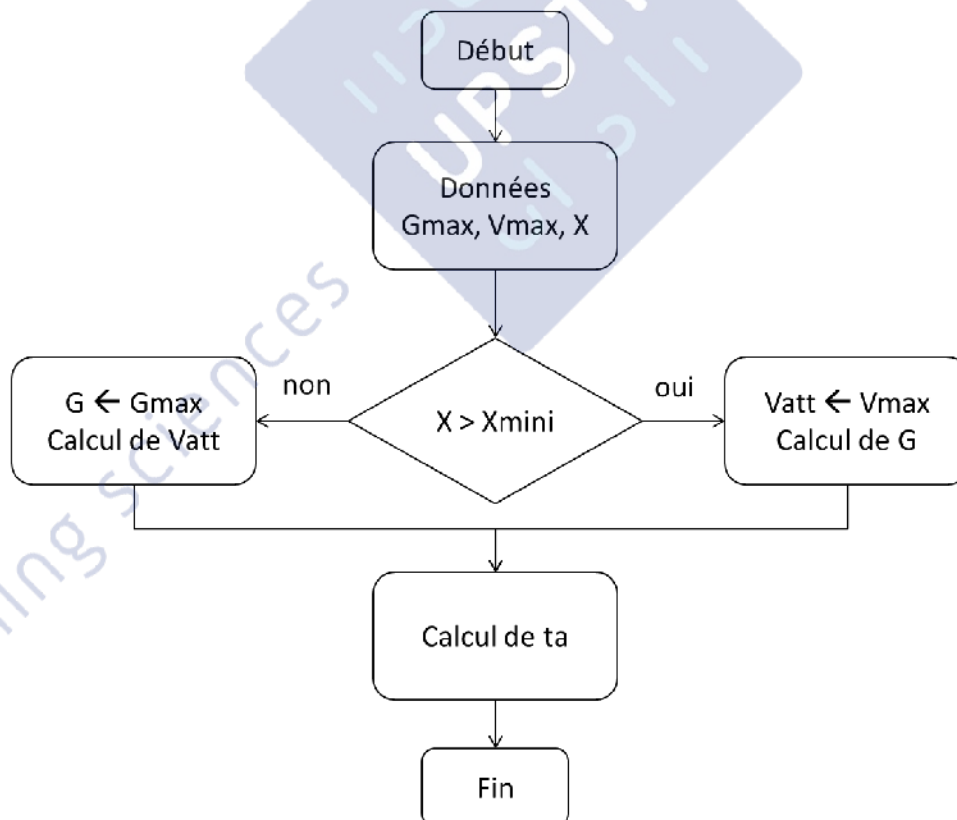
Inconvénient(s) : mouvement avec A-coups

2-4 Programme de génération de trajectoire

Question 23 : Proposer une structure algorithmique permettant le calcul des valeurs de t_a , γ et V_{att} en fonction de γ_{max} , V_{max} et X . Vous tiendrez compte des différents cas présentés à la figure 17.



On note l'accélération G



Question 24 : Exprimer la relation entre X , ta et γ . ta est à présent remplacée par sa valeur arrondie t_{ae} . En déduire une adaptation de l'expression de γ afin de garantir la précision du positionnement.

$$V_{att} = ta \cdot \gamma$$

$$X = 2 \cdot (V_{att} \cdot ta / 2) + V_{att} \cdot ta = 2 \cdot V_{att} \cdot ta$$

$$\Rightarrow X = 2 \cdot \gamma \cdot t_{ae}^2$$

$$\Rightarrow \gamma = X / (2 \cdot t_{ae}^2)$$

Question 25 : Le choix de la fonction arrondi se porte sur la fonction « ceil ». Justifier ce choix en considérant l'impact de ce dernier sur les limitations cinématiques.

Par ce choix, l'accélération maximale ne peut être dépassée (cf. équation précédente).

Question 26 : Ecrire une fonction $[t_{ae}, G, V_{att}] = \text{Loi_equirepartie}(G_{max}, V_{max}, X, X_{mini}, T_e)$. Cette fonction est réalisée en langage python ou scilab en employant les notations G et G_{max} pour γ et γ_{max} . Indiquer lisiblement le langage choisi.

En Scilab :

```
function [ tae, G, Vatt ] = Loi_equirepartie
(Gmax, Vmax, x, xmini, Te)
if (x > xmini) then
    Vatt = Vmax
    G = 2*Vmax^2/x
else
    Vatt = sqrt(x*Gmax/2)
    G = Gmax
end
ta = Vatt / G
tae = Te*ceil( ta / Te )
G = x/(2*tae^2)
endfunction
```

En Python :

```
def Loi_equirepartie (Gmax, Vmax, x, xmini,
Te) :
    if (x > xmini) :
        Vatt = Vmax
        G = (2*Vmax**2)/x
    else:
        Vatt = sqrt(x*Gmax./2)
        G = Gmax
    ta = Vatt./ G
    tae = Te*ceil( ta./ Te )
    G = x./(2*tae**2)

    return tae, G, Vatt
```

3-1 Analyse de la précision statique

Question 27 : En vous appuyant sur le paramétrage donné à la figure 19, **Expliciter** les relations entre les positions articulaires du robot et la position de l'outil C_o dans le repère de base du robot sous la forme : $x_c = f(\theta_2, \theta_3)$, $z_c = g(\theta_2, \theta_3)$.

$$\overrightarrow{O_0 C_o} = L_1 \overrightarrow{x_1} + L_2 \overrightarrow{x_2} = L_1 (\cos\theta_2 \overrightarrow{x_0} + \sin\theta_2 \overrightarrow{z_0}) + L_2 (\cos(\theta_2 + \theta_3) \overrightarrow{x_0} + \sin(\theta_2 + \theta_3) \overrightarrow{z_0})$$

$$x_c = L_1 \cos\theta_2 + L_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$z_c = L_1 \sin\theta_2 + L_2 \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

Question 28 : Calculer numériquement les coordonnées du centre de l'outil pour la configuration angulaire définie par $\theta_2 = 45^\circ$, $\theta_3 = 45^\circ$ (A.N exprimées en mm avec 2 chiffres après la virgule).

$$x_c = 777,82 \text{ mm}$$

$$z_c = 1577,82 \text{ mm}$$

Question 29 : Retrouver, à partir des équations trouvées à la question 27, l'expression analytique donnée pour la relation inverse $\theta_3 = g'(x_c, z_c)$.

On élève les équations de la question 27 au carré

$$x_c^2 = L_1^2 \cos^2 \theta_2 + L_2^2 \cos^2 (\theta_2 + \theta_3) + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 \cos (\theta_2 + \theta_3)$$

$$z_c^2 = L_1^2 \sin^2 \theta_2 + L_2^2 \sin^2 (\theta_2 + \theta_3) + 2L_1 L_2 \sin \theta_2 \sin (\theta_2 + \theta_3);$$

On additionne

$$x_c^2 + z_c^2 - L_1^2 - L_2^2 = 2L_1 L_2 (\sin \theta_2 \sin (\theta_2 + \theta_3) + \cos \theta_2 \cos (\theta_2 + \theta_3))$$

$$\sin A \sin B + \cos A \cos B = \cos(A - B)$$

$$\Rightarrow x_c^2 + z_c^2 - L_1^2 - L_2^2 = 2L_1 L_2 \cos \theta_3$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \pm \arccos \left(\frac{x_c^2 + z_c^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2} \right)$$

Question 30 : Justifier le fait que pour une position donnée de l'outil, il puisse exister deux configurations articulaires du robot. Proposer une méthode simple garantissant l'unicité de la solution lors de l'exploitation du robot.

Cf. signe des équations précédentes : pour un couple $(x_c; z_c)$ il existe 2 solutions de signe opposé de θ_3 . Pour pallier à ce problème il faut tout simplement fixer le signe de l'angle θ_3 , soit une configuration type dans le programme, soit, si l'on est en mouvement, on conserve le signe des positions précédentes.

Question 31 : En considérant la configuration articulaire théorique définie par $\theta_2 = 45^\circ$, $\theta_3 = 45^\circ$, calculer l'erreur maximale admissible sur l'angle réel θ_3 afin de respecter le critère de précision pour l'opération, c'est-à-dire un décalage de z_c compris entre $\pm 0,05$ mm.

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{x_c^2 + (z_c \pm 0,05 \times 10^{-3})^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}\right) \quad \text{avec les longueurs en mètre.}$$

Dans l'équation déterminée à la question 29, on impose x_c et z_c égale aux valeurs numériques trouvées à la question 28 en considérant $z_c = z_c \pm 0,05$ mm, ce qui conduit à un angle θ_3 compris entre 44.9922° et 45.0067° , donc une erreur maximale de l'ordre de $7,8 \cdot 10^{-3}^\circ$ ($1,36 \cdot 10^{-4}$ rad)

Erreur maxi admissible sur $\theta_3 = 7,8 \cdot 10^{-3}^\circ$ ($1,36 \cdot 10^{-4}$ rad)

Question 32 : Sachant que le réducteur de l'axe 3 à un rapport de réduction $n = 180$ et que le codeur utilisé, placé sur l'arbre moteur, dispose de 4096 points par tour, vérifier numériquement que, indépendamment de toute erreur géométrique, le codeur est capable de garantir la précision voulue. Conclure quant à l'objectif.

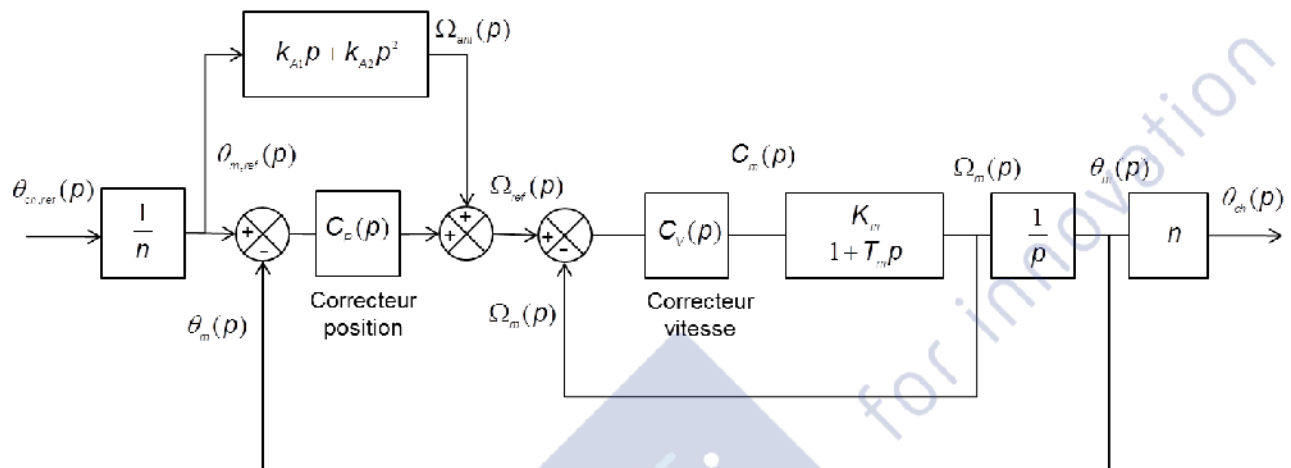
résolution Codeur moteur $= 360^\circ / 4096 = 88 \cdot 10^{-3}^\circ / \text{inc}$

résolution sur $\theta_3 = 88 \cdot 10^{-3} / 180 = 4,88 \cdot 10^{-4}^\circ / \text{inc} << 7,8 \cdot 10^{-3}$ erreur max admissible sur θ_3

Donc le codeur est capable de garantir la précision voulue. ($\theta_3 = 1/180 \times 4096 = 8 \cdot 10^{-6}$ rad. OK car $<< 1,36 \cdot 10^{-4}$ rad)

3-2 Réglage de la précision dynamique par la commande

Question 33 : Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert de la boucle fermée de vitesse $\Omega_m(p)/\Omega_{ref}(p)$.



$$\frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{k_v k_m (1 + T_{ip})}{T_{ip}(1 + T_{mp}) + k_v k_m (1 + T_{ip})} = \frac{1 + T_{ip}}{1 + \left(\frac{T_i}{k_v k_m} + T_i \right) p + \frac{T_i T_m}{k_v k_m} p^2}$$

$$\frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{1 + Tip}{1 + \left(\frac{Ti}{k_v k_m} + Ti \right) p + \frac{Ti T_m}{k_v k_m} p^2}$$

Question 34 : On procède au réglage suivant de la constante de temps intégrale $T_i = T_m$.

Montrer que l'ordre de la fonction de transfert précédente est réduit en tenant compte de ce réglage. **Justifier** l'intérêt pratique du réglage proposé.

$$T_i = T_m$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{k_v k_m (1 + T_m p)}{T_m p (1 + T_m p) + k_v k_m (1 + T_m p)} = \frac{k_v k_m}{T_m p + k_v k_m}$$

$$\frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{T_m}{k_v k_m} p}$$

Simple 1er ordre, pas de dépassement, temps de réponse facilement réglable grâce au gain proportionnel k_m . C'est plutôt k_v qui est réglable. k_m dépend des caractéristiques du moteur

Question 35 : **Montrer** que la fonction de transfert de la commande en position de l'axe

$$\theta_{ch}(p) / \theta_{ch,ref}(p) \text{ peut se mettre sous la forme : } \frac{\theta_{ch}(p)}{\theta_{ch,ref}(p)} = \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2}{1 + b_1 p + b_2 p^2}.$$

Exprimer les paramètres de cette fonction de transfert en fonction de k_p , k_{A1} , k_{A2} et τ

$$\frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \theta_m(p) = \Omega_m(p) \cdot \frac{1}{p} \quad \theta_{ch}(p) = \frac{1}{n} \cdot \theta_m(p) \Rightarrow \Omega_m(p) = \theta_{ch}(p) \cdot n \cdot p$$

$$\Omega_{ref}(p) = (k_{A1} p + k_{A2} p^2) \cdot \theta_{ch,ref}(p) \cdot n + C_p(p) (n \cdot \theta_{ch,ref}(p) - \theta_m(p))$$

$$\Omega_m(p) \cdot (1 + \tau p) = n \cdot (k_{A1} p + k_{A2} p^2 + C_p(p)) \cdot \theta_{ch,ref}(p) - n \cdot C_p(p) \cdot \theta_{ch}(p)$$

$$(1 + \tau p) \cdot \theta_{ch}(p) \cdot n \cdot p = n \cdot (k_{A1} p + k_{A2} p^2 + C_p(p)) \cdot \theta_{ch,ref}(p) - n \cdot C_p(p) \cdot \theta_{ch}(p)$$

$$\theta_{ch}(p) (p(1 + \tau p) + C_p(p)) = (k_{A1} p + k_{A2} p^2 + C_p(p)) \cdot \theta_{ch,ref}(p)$$

$$\frac{\theta_{ch}(p)}{\theta_{ch,ref}(p)} = \frac{C_p(p) + k_{A1} p + k_{A2} p^2}{C_p(p) + p + \tau p^2} = \frac{k_p + k_{A1} p + k_{A2} p^2}{k_p + p + \tau p^2} = \frac{1 + \frac{k_{A1}}{k_p} p + \frac{k_{A2}}{k_p} p^2}{1 + \frac{1}{k_p} p + \frac{\tau}{k_p} p^2}$$

$$a_1 = k_{A1} / k_p$$

$$a_2 = k_{A2} / k_p$$

$$b_1 = 1 / k_p$$

$$b_2 = \tau / k_p$$

Question 36 : Déterminer l'expression littérale de la valeur des paramètres d'anticipation k_{A1} et k_{A2} permettant de garantir une erreur de position nulle à tout instant, c'est-à-dire un suivi de trajectoire parfait.

On résout : $\frac{\theta_{ch}(p)}{\theta_{ch,ref}(p)} = 1$

$$k_{A1} = 1$$

$$k_{A2} = \tau$$

Question 37 : Expliciter la contrainte de continuité qu'impose la mise en œuvre des anticipations sur la définition géométrique de la trajectoire de référence $\theta_{ch,ref}(t)$ et **conclure** sur l'objectif de précision dynamique.

Le domaine de validité du modèle utilisé pour répondre à la question précédente est valable pour un système linéaire continu invariant. Donc précision du suivi de trajectoire pour les anticipations précédentes est théoriquement parfaite dans le cas où la trajectoire $\theta_{ch,ref}(t)$ est continue de classe C2 car dérivée 2 fois (au moins par partie). La limite de ce réglage viendra majoritairement de la limite de validité du modèle et donc des phénomènes dynamiques négligés. Ceux-ci étant essentiellement après le réducteur.

3-3 Adaptation de la trajectoire aux déformations

Question 38 : Exprimer l'équation différentielle régissant la dynamique de la position angulaire de la charge θ_{ch} en fonction de la position angulaire de l'arbre moteur θ_m (cf. figure 21).

Par application du PFD en rotation en isolant J_{ch} : $J_{ch} \ddot{\theta}_{ch} = K_{ch} (\theta_m - \theta_{ch})$

$$J_{ch} \ddot{\theta}_{ch} = K_{ch} \left(\frac{\theta_m}{n} - \theta_{ch} \right)$$

Question 39 : Donner la fonction de transfert $\theta_{ch}(p)/\theta_m(p)$.

$$J_{ch}\ddot{\theta}_{ch} = K_{ch}\left(\frac{\theta_m}{n} - \theta_{ch}\right)$$

$$J_{ch}\theta_{ch}(p)\cdot p^2 = K_{ch}\left(\frac{\theta_m(p)}{n} - \theta_{ch}(p)\right)$$

$$\theta_{ch}(p)(J_{ch}\cdot p^2 + K_{ch}) = \frac{K_{ch}}{n}\theta_m(p) \Rightarrow \frac{\theta_{ch}(p)}{\theta_m(p)} = \frac{\frac{K_{ch}}{n}}{(J_{ch}\cdot p^2 + K_{ch})} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{J_{ch}}{K_{ch}}\right)p^2}$$

$$\frac{\theta_{ch}(p)}{\theta_m(p)} = \frac{K_{ch}/n}{J_{ch}p^2 + K_{ch}} = \frac{1/n}{1 + (J_{ch}/K_{ch})p^2}$$

Question 40 : Expliciter littéralement la pulsation de résonance de l'axe, notée ω_0 et donner les pôles de la fonction de transfert précédente.

$$\omega_0 = \sqrt{K_{ch}/J_{ch}}$$

$$\text{pôles} = \pm j\omega_0$$

Question 41 : En vous appuyant sur le paramétrage de la figure 22, **donner** l'expression de la position articulaire de référence, notée $\theta_{ch,ref}(p)$, en fonction de l'accélération angulaire maximale, notée $\ddot{\theta}_{max}$, lors de la phase de montée en accélération, c'est-à-dire pour $0 \leq t < (T_j + T_a)$. On donne la transformée de Laplace suivante pour une fonction translatée dans le temps : Soit $f(t-T)$ une fonction retardée d'un instant T à valeur réelle positive, sa transformée de Laplace est donnée par : $L(f(t-T)) = e^{-pT} L(f(t)) = e^{-pT} F(p)$

Pour $0 \leq t < (T_j + T_a)$

$0 \leq t < T_j$: Une rampe de pente $\ddot{\theta}_{max} / T_j$

Puis $T_j \leq t < T_a$) on lui soustrait la même rampe retardée de T_j

$$\ddot{\theta}_{ch,ref}(p) = \frac{\ddot{\theta}_{max} / T_j}{p^2} - \frac{\ddot{\theta}_{max} / T_j}{p^2} \cdot e^{-pT_j}$$

avec les conditions initiales nulles

on intègre 2 fois $\Rightarrow \theta_{ch,ref}(p) = \frac{\ddot{\theta}_{max}}{T_j p^4} (1 - e^{-pT_j})$

$$\theta_{ch,ref}(p) = \frac{\ddot{\theta}_{max}}{T_j p^4} (1 - e^{-pT_j})$$

Question 42 : On considère que la dynamique vibratoire du robot est influencée par deux pôles complexes conjugués $p_0 = \pm j\omega_0$ (associés à une pulsation de résonance non-amortie). **Déterminer** la condition sur la durée T_j permettant de respecter le principe de compensation des pôles de l'axe du robot.

$$\theta_{ch,ref}(\pm j\omega_0) = 0 \Leftrightarrow (1 - e^{\pm j\omega_0 T_j}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(1 - e^{\pm j\omega_0 T_j}) = -\cos(\omega_0 T_j) = 0 \\ \operatorname{Im}(1 - e^{\pm j\omega_0 T_j}) = \sin(\omega_0 T_j) = 0 \end{cases} \Rightarrow T_j = \frac{2k\pi}{\omega_0}, k \in N^*$$

$$T_j = \frac{2k\pi}{\omega_0}, k \in N^*$$

Question 43 : Conclure quant à l'influence du réglage précédent sur la précision dynamique des mouvements du robot.

La dynamique vibratoire sera annulée (absence de vibration) à chaque fin de rampe d'accélération, donc notamment durant la phase à vitesse constante, ainsi qu'à la fin du mouvement. La précision du positionnement dynamique du système en sera améliorée puisque l'annulation intervient au moment des discontinuités d'accélération.

Remarque : On notera que la référence de trajectoire étant C2, les anticipations étudiées dans la partie précédente garantissent un suivi parfait de l'arbre moteur et donc l'hypothèse $\theta_m(p) = n\theta_{ch,ref}(p)$ utilisée suite à la question 37 est vérifiée.