

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2016

Filière : TSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

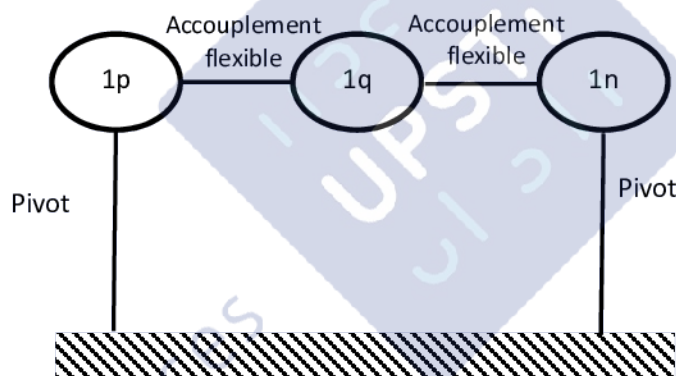
# Corrigé centrale TSI 2016

## Création de motifs sur de la poudre de maquillage

### Modélisation de la chaîne cinématique du déplacement du préhenseur suivant l'axe $\vec{x}$

- Q 1. Détermination du degré d'hyperstatisme du guidage de l'arbre 1  
Le guidage de l'arbre 1 par rapport au bâti 0 est assuré par 2 liaisons pivot => 10 inconnues de liaison.  
L'arbre 1 présente une mobilité.  
Il est possible d'isoler l'arbre 1 => 6 équations disponibles  
Bilan :  $h=Is-Es+m=10-6+1=5$   
Le guidage de l'arbre 1 est hyperstatique de degré 5

- Q 2. Graphe de liaisons après modification



- Q 3. Degré de mobilité du nouveau mécanisme  
Le mécanisme dispose d'un degré de mobilité de 6 avec :  
- 1 mobilité utile : Rotation de l'ensemble 1p, 1q, 1n /  $\vec{z}$   
- 5 mobilités internes de l'arbre intermédiaire 1q : 3 translations et 2 rotations. Seule la rotation autour de l'axe  $(P, \vec{u})$  est supprimée.

- Q 4. Degré d'hyperstatisme  
Le guidage de l'arbre 1 par rapport au bâti 0 est assuré par 2 liaisons pivot et les 2 soufflets élastiques => 12 inconnues de liaison.  
L'arbre 1 présente une mobilité utile et 5 mobilités internes  
Il est possible d'isoler 3 pièces =>  $6*3=18$  équations disponibles  
Bilan :  $h=Is-Es+m=12-18+6=0$   
Le guidage de l'arbre 1 est donc isostatique

Q 5. Conclusion

Les modifications apportées permettent de rendre le mécanisme isostatique et donc éliminer toutes contraintes dimensionnelles et d'orientation liées au modèle hyperstatique d'origine ainsi que de maîtriser l'ensemble des efforts.

### Validation de la sensibilité du capteur de position de l'axe $\vec{x}$

Q 6. Expression de  $v_2(t)$

En posant  $\theta = \omega \cdot t = \frac{2\pi \cdot N}{60} \cdot t$ , on peut alors exprimer

$$v_2(t) = mV_{rmax} \sin(2\pi f_r t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot N}{60} \cdot t\right)$$

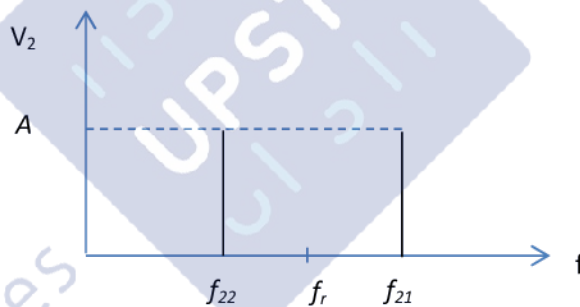
En utilisant :  $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ , on obtient :

$$v_2(t) = \frac{mV_{rmax}}{2} \left( \sin\left(2\pi\left(f_r + \frac{N}{60}\right)t\right) + \sin\left(2\pi\left(f_r - \frac{N}{60}\right)t\right) \right)$$

Q 7. Expression de A,  $f_{21}$  et  $f_{22}$

Par identification et en prenant  $N = N_{max}$ , on obtient :

$$A = \frac{mV_{rmax}}{2}; f_{21} = f_r + \frac{N_{max}}{60} \text{ et } f_{22} = f_r - \frac{N_{max}}{60}$$



Spectre de  $V_2(f)$  :

Q 8. Bande passante du filtre

Il suffira d'avoir un filtre Passe Bande, centré sur  $f_r$  et de bande passante  $\Delta f \geq \frac{N_{max}}{30}$

Conversion analogique numérique et calcul de la position

Q 9. Détermination des instants de prélèvement des échantillons

$v_r(t)$  est maximum lorsque  $\frac{2\pi t}{T_r} = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot k\pi$  soit  $t_k = \frac{T_r(1+4k)}{4}$

Q 10. Vérification du théorème de Shannon

La fréquence d'échantillonnage ( $f_r$ ) doit être au moins deux fois supérieure à la fréquence max du signal ( $\frac{N_{max}}{60}$ ). Or  $f_r \gg \frac{N_{max}}{60}$  donc le théorème de Shannon est bien respecté.

Q 11. Détermination des résolutions angulaires et axiales

On prélève  $2^{11}$  points par tours soit 2048 échantillons pour  $360^\circ$ , on en déduit alors

$\Delta\theta = \frac{360}{2048} = 0.175^\circ = 10'$  d'angle ce qui est inférieur à la résolution souhaitée de  $15'$  d'angle.

$$\Delta x = K_1 \cdot \Delta \theta = 1,4325 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0,175 \cdot \pi}{180} = 4,4 \cdot 10^{-6} m < \Delta x_{max}$$

Le choix du résolveur et du convertisseur CAN est adapté aux exigences de précisions souhaitées.

### Validation du choix de la motorisation permettant le déplacement de l'axe $\vec{x}$

Q 12. Détermination de  $\Omega_{max}$

On a  $V_{max} = \frac{\phi}{2} \cdot r \cdot \Omega_{max}$  d'où on tire  $\Omega_{max} = \frac{2V_{max}}{r\phi} = 314,1 \text{ rad/s}$

Q 13. Détermination de l'accélération maximale  $\dot{\Omega}_{max}$

Par dérivation, on obtient :  $\dot{\Omega}_{max} = \frac{2V_{max}}{r\phi} = 6980,8 \text{ rad/s}^2$

Q 14. Energie cinétique de l'ensemble mobile

L'ensemble mobile 2 est animé d'un mouvement de translation rectiligne. On en déduit

$$EC_{(ens2/0)} = \frac{M_2 V_{max}^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{M_2 r^2 \phi^2}{4} \Omega_{max}^2$$

On en déduit donc l'inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur :

$$J = \frac{M_2 r^2 \phi^2}{4} = 51 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ou en considérant toutes les pièces mobiles du système :

L'ensemble mobile 2 est animé d'un mouvement de translation rectiligne. On en déduit

$$EC_{(ens2/0)} = \frac{M_2 V_{max}^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{M_2 r^2 \phi^2}{4} \Omega_{max}^2$$

L'arbre 1 est en rotation donc on en déduit  $EC_{(arbre1/0)} = \frac{J_1 \Omega_1^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{J_1 r^2}{2} \Omega_{max}^2$

L'arbre moteur est aussi en rotation d'où  $EC_{(arbre\ moteur/0)} = \frac{J_m \Omega^2}{2} = \frac{1}{2} J_m \Omega_{max}^2$

On en déduit donc l'inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur :

$$J = J_m + J_1 r^2 + \frac{M_2 r^2 \phi^2}{4} = 12 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6} + 51 \cdot 10^{-6} = 6,7 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

A.N. donnée par la suite (juste avant la question 18)

Q 15. Expression du couple moteur maximal

Appliquons le théorème de l'énergie puissance à l'ensemble (moteur-transmission-mobile2)

Energies cinétiques :

- Arbre moteur :  $EC_{(mot/0)} = \frac{1}{2} J_m \Omega_{max}^2$

- Arbre 1 :  $EC_{(1/0)} = \frac{1}{2} J_1 r^2 \Omega_{max}^2$

- Ensemble 2 :  $EC_{(ens2/0)} = \frac{1}{2} J \Omega_{max}^2$

=> Energie cinétique totale :  $EC_{(ens/0)} = \frac{1}{2} (J_m + J_1 r^2 + J) \Omega_{max}^2$

Bilan des puissances :

- Couple moteur :  $P_m = C_{max} \cdot \Omega_{max}$

- Frottement sec :  $P_{fs} = -C_r \cdot \Omega_{max}$

- Frottement visqueux :  $P_{fv} = -\mu \cdot \Omega_{max}^2$

Application du théorème de l'énergie puissance :

$$\frac{d}{dt} E_{C(Ens/Rg)} = P_g(Ext \rightarrow E) + P(inter)$$

$$(J_m + J_1 + J) \dot{\Omega}_{max} = C_{max} - C_r - \mu \Omega_{max}$$

Donc :  $C_{max} = (J_m + J_1 + J) \dot{\Omega}_{max} + C_r + \mu \Omega_{max} = 0,93 N.m$

Q 16. La puissance mécanique maximale délivrée par le moteur vaut :

$$P_{max} = C_{max} \cdot \Omega_{max} = 293W$$

Q 17. Validation du moteur :

La puissance maximale en phase d'accélération est de 293W et la puissance en régime établi à vitesse maximale est de 244,4W.

La vitesse nominale du moteur correspond à la vitesse maximale imposée par le cahier des charges.

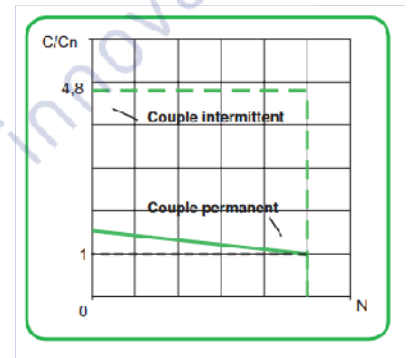
Le couple en régime intermittent délivré par la machine synchrone peut atteindre près de 5 fois le couple nominal ce qui permet une réserve de puissance importante dans les phases transitoires.

On peut donc conclure que le choix de la motorisation est validé.

Le moteur choisi est un moteur synchrone. Ce dernier offre un couple moteur quasi constant d'une vitesse nulle jusqu'à la vitesse nominale. Ainsi, ce dernier ne fournit qu'un couple moteur égale à :

$$C_{mot} = \frac{P_{nom}}{\Omega_{nom}} = \frac{470 * 30}{3000 * \pi} = 1,5 N.m$$

Cette valeur est proche de celle nécessaire, d'où l'intérêt pour ce moteur plus puissant.



### Comportement dynamique et réglage des correcteurs des boucles de vitesse et de position

Q 18. Application du PFD à l'arbre moteur

Bilan des actions mécaniques appliquées à l'arbre moteur :

- Le couple moteur :  $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{x}$

- L'action du guidage en rotation telle que  $\vec{M}_{P, guidage} \cdot \vec{x} = 0$

- Le couple de frottement visqueux :  $\vec{C}_{fv} = -\mu \Omega \cdot \vec{x}$

On applique le théorème du moment dynamique en P en projection sur  $\vec{x}$  :

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = C_m(t) - \mu \Omega(t)$$

Q 19. Application de la transformée de Laplace

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = C_m(t) - \mu \Omega(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} Jp\Omega(p) = C_m(p) - \mu \Omega(p)$$

En posant  $V(p) = K_1 \Omega(p)$ , on obtient :  $\frac{V(p)}{C_m(p)} = \frac{K_1}{Jp + \mu} = \frac{\frac{K_1}{\mu}}{Jp + 1}$  qui vérifie le schéma bloc proposé figure 18.

Q 20. On a  $x(t) = \int v(t)dt$  d'où par application de la transformée de Laplace  $X(p) = \frac{V(p)}{p}$   
 donc  $\frac{X(p)}{V(p)} = \frac{1}{p}$

Q 21. Mesure du temps de réponse

La boucle de vitesse non corrigée à une fonction de transfert d'ordre 1.

$t_{75\%}$  est obtenu pour une réponse indicielle ayant atteint 95% de la valeur finale soit  $v(3\tau) = 0,5586 \text{ m/s}$ .

Graphiquement on obtient :  $3\tau \approx 0,9\text{s} > 50\text{ms}$ . Le temps de réponse n'est pas compatible avec le cahier des charges.

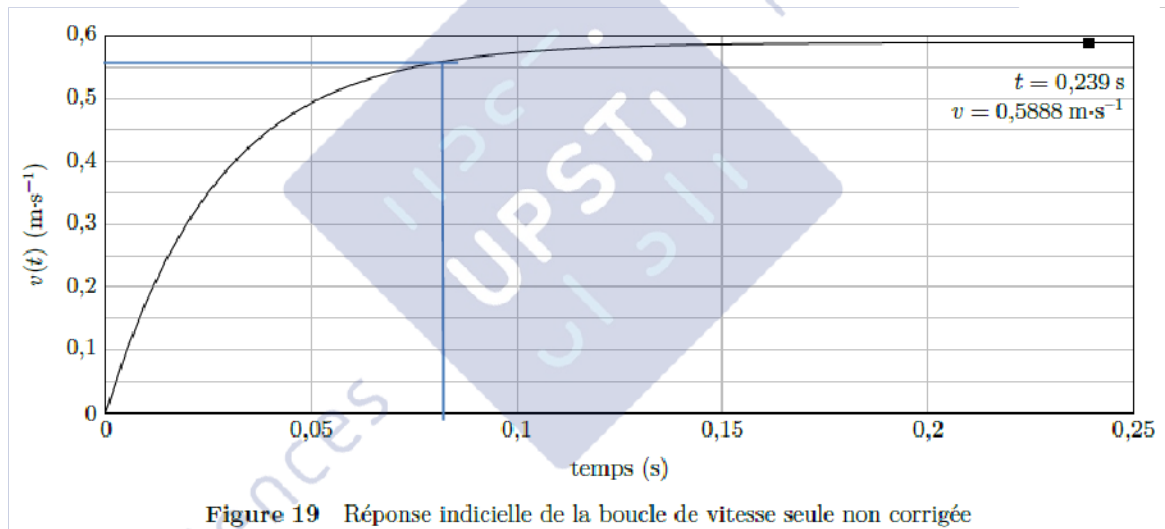


Figure 19 Réponse indicielle de la boucle de vitesse seule non corrigée

Q 22. Compensation du pôle dominant

Le pôle dominant est celui qui ralentit le plus le système car sa constante de temps est élevée.

Le compenser par un correcteur PI permet de gagner en rapidité

Q 23. Expression de  $BF_v(p)$

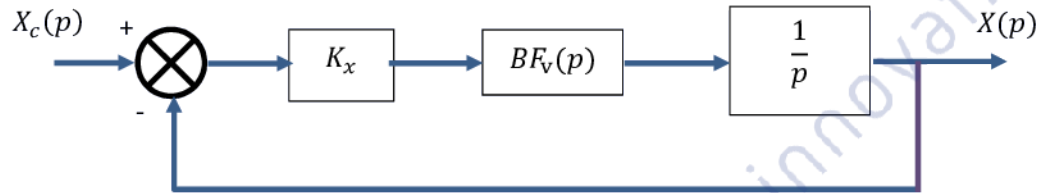
$$BF_v(p) = \frac{C_v(p) \cdot F_m(p)}{1 + C_v(p) \cdot F_m(p)} = \frac{k_v \cdot \frac{\tau p + 1}{\tau p} \cdot \frac{\frac{K_1}{\mu}}{\tau p + 1}}{1 + k_v \cdot \frac{\tau p + 1}{\tau p} \cdot \frac{\frac{K_1}{\mu}}{\tau p + 1}} = \frac{1}{1 + \frac{\tau \mu}{k_v K_1} p}$$

On souhaite avoir un temps de réponse à 5% inférieur à 50ms or la constante de temps de la boucle de vitesse peut s'exprimer :

$$\tau_v = \frac{\tau\mu}{k_v K_1} < \frac{50 \cdot 10^{-3}}{3} \text{ doù } k_v > \frac{3 \cdot \tau\mu}{50 \cdot 10^{-3} \cdot K_1} = 3,5$$

Q 24. Calcul de la fonction de transfert  $BF_x(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)}$

En utilisant le schéma bloc de la figure 18 et après absorption de la boucle de vitesse, on obtient la structure suivante :



$$BF_x(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K_x \cdot BF_v(p) \cdot \frac{1}{p}}{1 + K_x \cdot BF_v(p) \cdot \frac{1}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_x} p + \frac{\tau\mu}{K_x K_v K_1} p^2}$$

Q 25. Détermination de la valeur de  $K_x$

Le cahier des charges un temps de réponse minimal sans dépassement et sans erreur statique.

La fonction de transfert en boucle fermée est d'ordre 2 avec un gain statique de 1 donc l'écart statique sera nul en régime établi.

Pour obtenir la meilleure rapidité sans dépassement, il faut que le coefficient d'amortissement  $\zeta = 1$  or :

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{K_x} \text{ et } \omega_n^2 = \frac{K_x K_v K_1}{\tau\mu}$$

$$\text{On en déduit : } K_x = \frac{K_v K_1}{4\zeta^2 \tau\mu} = 12,8 \text{ V/m}$$

Q 26. Conclusion

Le diagramme d'exigence imposait une rapidité minimale de la boucle de vitesse et une précision de dépose. L'étude précédente permet de valider ces exigences en imposant les valeurs trouvées aux différents correcteurs.

Le gain statique de la boucle de position étant égal à 1, l'erreur statique sera donc nulle.

Enfin le temps de réponse mesuré sur la figure 20 est égale à 0,24ms (0,25 (0,95%VF) – 0,01 (retard à l'origine)). Ce temps est inférieur à 50ms.

Le cahier des charges est donc respecté.

## Influence des déformations sur la précision

Q 27. Détermination des actions mécaniques

On isole le chariot 2 et on applique le principe fondamental de la dynamique :

- Bilan des actions mécaniques extérieures à 2 :
  - Action de la glissière en H telle que :  $\vec{R}_{0 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} = 0$
  - Action de la pesanteur en  $G_2$  telle que :  $\vec{P} = -M_2 g \cdot \vec{y}$
  - Actions des courroies caractérisées par :  $\{T_{courroies \rightarrow 2}\} = \begin{pmatrix} X_c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(M,x,y,z)}$

En supposant que l'ordonnée  $y_M = 0$ , on en déduit en appliquant le PFD au chariot 2 :

- $\sum \vec{R}_{ext \rightarrow 2} = M_2 \vec{a}_{G_2, 2/0} \Rightarrow X_c = M_2 \gamma$  et  $\vec{R}_{0 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} = M_2 g$
- $\sum \vec{M}_{H, ext \rightarrow 2} = \vec{\delta}_{H, 2/0} \Rightarrow \vec{M}_{H, 0 \rightarrow 2} + \overline{HG_2} \wedge \vec{P} + \overline{HM} \wedge X_c \vec{x} = \overline{HG_2} \wedge M_2 \gamma \vec{x}$   
 En projection sur  $\vec{z}$ , on obtient :  $N_{0 \rightarrow 2} - M_2 g a = -M_2 \gamma b$   
 d'où :  $N_{0 \rightarrow 2} = M_2 g \left( a - \frac{\gamma b}{g} \right)$

Les actions du chariot 2 sur le support 0 peuvent donc s'écrire :

$$\{T_{2 \rightarrow 0}\} = \begin{pmatrix} -M_2 g & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -M_2 g a' \end{pmatrix}_{(H,x,y,z)}$$

Q 28. Expression du torseur de cohésion

Deux cas d'études sont à différencier :  $G \in (O, H)$  et  $G \in (H, A)$

- Calcul des actions aux appuis :
  - $\sum \vec{R}_{ext \rightarrow 0} = \vec{0} \Rightarrow Y_0 + Y_A - M_2 g = 0$
  - $\sum \vec{M}_{O, ext \rightarrow 0} = \vec{0} \Rightarrow -M_2 g a' - M_2 g h + Y_A L = 0$   
 D'où on tire :  $Y_0 = M_2 g \left( 1 - \frac{a'+h}{L} \right)$  et  $Y_A = M_2 g \left( \frac{a'+h}{L} \right)$

- Etude du cas 1 :  $G \in (O, H)$

$$\{T_{coh}\} = -\{T_{ext \rightarrow I}\} = \begin{pmatrix} 0 & - \\ -Y_0 & - \\ - & Y_0 x \end{pmatrix}_{(G,x,y,z)}$$

- Etude du cas 2 :  $G \in (H, A)$

$$\{T_{coh}\} = \{T_{ext \rightarrow II}\} = \begin{pmatrix} 0 & - \\ Y_A & - \\ - & Y_A(L-x) \end{pmatrix}_{(G,x,y,z)}$$



Q 29. Expression de la déformée

On rappelle l'équation de la déformée d'une poutre plane :  $v''(x) = \frac{Mf_z(x)}{EI_{Gz}}$

- Pour  $G \in (O, H)$  :

$$v''(x) = \frac{Mf_z(x)}{EI_{Gz}} = \frac{Y_0 x}{EI_{Gz}} \text{ d'où : } EI_{Gz} v'(x) = \frac{Y_0 x^2}{2} + c_1 \text{ et } EI_{Gz} v(x) = \frac{Y_0 x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

- Pour  $G \in (H, A)$  :

$$v''(x) = \frac{Mf_z(x)}{EI_{Gz}} = \frac{Y_A(L-x)}{EI_{Gz}}$$

$$\text{d'où : } EI_{Gz} v'(x) = Y_A(Lx - \frac{x^2}{2}) + c_3 \text{ et } EI_{Gz} v(x) = Y_A(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + c_3 x + c_4$$

Q 30. Détermination des constantes d'intégration:

On souhaite déterminer 4 constantes d'intégration. Il est donc nécessaire d'avoir 4 conditions :

- L'appui en O impose  $v(0)=0$
- L'appui en A impose  $v(L)=0$
- La continuité de la poutre en H impose  $v_1(h) = v_2(h)$  et  $v'_1(h) = v'_2(h)$

Q 31. Déplacement du point B

On utilise les propriétés du torseur des petits déplacements :

$\{\delta\} = \{\delta\theta; \overrightarrow{dB}\}_B$ , on peut alors exprimer le petit déplacement  $\overrightarrow{dB} = \overrightarrow{dH} + \overrightarrow{BH} \wedge \delta\theta$

Soit :  $\overrightarrow{dB} = v_H \cdot \vec{y} + \delta\theta \cdot \vec{z} \wedge (a \cdot \vec{x} + c \cdot \vec{y}) = -c \cdot \delta\theta \cdot \vec{x} + (v_H + a \cdot \delta\theta) \cdot \vec{y}$

Q 32. Norme du déplacement au point B

$$\|\overrightarrow{dB}\| = \sqrt{c^2 \cdot \delta\theta^2 + (v_H + a \cdot \delta\theta)^2}$$

En considérant que l'influence de la déformation de rotation est prépondérante devant les autres, on obtient :

$$\|\overrightarrow{dB}\| \approx \sqrt{(c^2 + a^2) \delta\theta^2} \approx 58 \mu m$$

## Synthèse

Q 33. Les différents éléments étudiés influant sur le positionnement de la buse sont les suivants :

- a. Précision du capteur de position
- b. Précision de l'asservissement en position de l'axe  $\vec{x}$
- c. Influence des déformations de la structure de guidage

Q 34. Conclusion

Le cahier des charges impose une précision minimale de 0,08mm caractérisée par l'exigence 1.1.

- L'étude du capteur de position a permis de déterminer une erreur de position de  $4,4 \mu m$
- L'erreur statique pour l'asservissement de position est nulle.
- L'influence des déformations dues aux quantités dynamiques liées à l'accélération de la buse entraîne un déplacement de la buse de  $58 \mu m$

<b>« requirement »</b> <b>Précision de dépose</b>
id = '1.1' text = 'La dépose doit se faire à 0,08 mm près'

On peut donc conclure que la précision du système de positionnement est satisfaisante vis-à-vis de l'exigence du cahier des charges.

for innovation



teaching sciences