teaching sciences UPSTI for innovation

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2015

Filière : TSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

CORRIGE MODELISATION CCP TSI 2015

I. Modélisation du générateur piézoélectrique

I.A Modèle d'excitation équivalent

Question I.1

On isole E = { S_p, m }.

Bilan des actions mécaniques extérieures

$$\{S_B \rightarrow E\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_{BP} & L_{BP} \\ Y_{BP} & M_{BP} \\ Z_{BP} & N_{BP} \end{Bmatrix}_{B_0} ;\{pesanteur \rightarrow E\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m\cdot g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \quad \left(B_0 = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})\right)$$

Question I.2

L'ensemble indéformable E est en translation.

$$\{D(E/S_R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} -m\cdot\gamma\cdot\overrightarrow{e_y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ m.\gamma & 0 \\ 0 & l\cdot m\cdot\gamma \end{Bmatrix}_{B_0}$$

Question I.3

$$\overrightarrow{M_O}(pesanteur \rightarrow E) = \vec{0} + \overrightarrow{OA} \wedge -m\cdot g\cdot\overrightarrow{e_y} = -l\cdot m\cdot g\cdot\overrightarrow{e_z}$$

Application du PFD à E :

$$\begin{aligned} X_{BP} &= 0 \\ Y_{BP} - m\cdot g &= m\cdot\gamma \\ Z_{BP} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_{BP} &= 0 \\ M_{BP} &= 0 \\ N_{BP} - l\cdot m\cdot g &= l\cdot m\cdot\gamma \end{aligned}$$

Au final : $\{S_B \rightarrow E\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ m.(g+\gamma) & 0 \\ 0 & l\cdot m\cdot(g+\gamma) \end{Bmatrix}_{B_0}$

Question I.4

On isole la poutre S_P

$$\{S_B \rightarrow S_P\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{B_0} ;\{f \rightarrow S_P\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \\ 0 & f\cdot l \end{Bmatrix}_{B_0}$$

Application du PFS :

$$\begin{aligned} X &= 0 \\ Y + f &= 0 \\ Z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L &= 0 \\ M &= 0 \\ N + f\cdot l &= 0 \end{aligned}$$

Question I.5

En imposant $f = -m\cdot(g+\gamma)$ et d'après le principe de Saint-Venant, le modèle statique est équivalent, du point de vue de l'application des efforts sur la poutre, au modèle dynamique

I.B Déformation et raideur équivalente de la poutre

Question I.6

$$\underset{G\in]O;A[}{T_{coh}} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \mathrm{f} & 0 \\ 0 & \mathrm{f}\cdot(\mathrm{l}-\mathrm{x}) \end{matrix}\right\}_{B_0} \; ; M_{fz} = f\cdot(l-x)$$

Question I.7

$$E\cdot I_{Gz}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}(x) = f\cdot(l-x)$$

$E\cdot I_{Gz}\cdot\frac{dv}{dx}(x) = f\cdot\left(l\cdot x-\frac{x^2}{2}\right)+C_1$ Or $\frac{dv}{dx}(0)=0$ (encastrement en 0) $\Rightarrow C_1=0$

$E\cdot I_{Gz}\cdot v(x) = f\cdot\left(l\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+C_2$ Or $v(0)=0$ (encastrement en 0) $\Rightarrow \mathrm{C}_2=0$

$$v(x)=\frac{f}{E\cdot I_{Gz}}\left(l\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)$$

Question I.8

$$v(l)=\frac{f\cdot l^3}{3\cdot E\cdot I_{Gz}} \Rightarrow k=\frac{f}{v(l)}=\frac{3\cdot E\cdot I_{Gz}}{l^3}$$

Application numérique : k=5,25N/mm

II. Modélisation mécanique simplifiée du générateur piézoélectrique

II.A Modèle d'excitation équivalent

Question II.1

L'équation (1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants homogène sur $[\tau,+\infty]$. On donne u(0) et $\dot{u}(0)$, donc (1) admet une unique solution sur $[\tau,+\infty]$.

Les racines complexes de l'équation caractéristique sont : $r_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{i\sqrt{4km-\mu^2}}{2m}$

$$\alpha=+\frac{\mu}{2m} \text{ et } \beta=\frac{\sqrt{4km-\mu^2}}{2m}$$

Question II.2

$E_m=\int_0^{+\infty}f(t)\dot{u}(t)dt$. Cette intégrale est définie car il existe τ tq $\forall\, t>\tau, f(t)=0$ donc $E_m=\int_0^{\tau}f(t)\dot{u}(t)dt+\int_\tau^{+\infty}0\,dt$

$E_e=\int_0^{+\infty}(\dot{u}(t))^2dt$ et $\dot{u}(t)$ est majorée en valeur absolue par $Ke^{-\alpha t}$ où K est une constante. L'intégrale est donc convergente et E_e est donc bien définie.

Question II.3

$t\to\lambda_1\cos(\beta t)+\lambda_2\sin(\beta t)$ est une fonction bornée. $lim_{t\to\infty}e^{-\alpha t}=0$ donc $\lim_{t\to\infty}u(t)=0$

On montre de même que $\lim_{t\to\infty}\dot{u}(t)=0$

Question II.4

$$\begin{aligned}E_m &= \int_0^{+\infty}f(t)\dot{u}(t)dt=\int_0^{+\infty}[m\ddot{u}(t)+\mu\dot{u}(t)+ku(t)]\dot{u}(t)dt\\ &=\int_0^{+\infty}m\ddot{u}(t)\dot{u}(t)+\mu\dot{u}^2(t)+ku(t)\dot{u}(t)\,dt\\ &=\frac{m}{2}[\dot{u}^2(t)]_0^{+\infty}+\mu\int_0^{+\infty}\dot{u}^2(t)\,dt+\frac{k}{2}[u^2(t)]_0^{+\infty}\\ &=-\frac{m}{2}\dot{u}_0{}^2-\frac{k}{2}u_0^2+\frac{\mu}{\mu_e}E_e\end{aligned}$$

$E_m=-E_0+\frac{\mu}{\mu_e}E_e$ D'où : $\frac{E_e}{E_0+E_m}=\frac{\mu_e}{\mu}$

II.B Efficacité du générateur soumis à une excitation harmonique

Question II.5

Soient (u,v,w) $\in \varepsilon^3$ et a $\in \mathbb{R}$

- $< u, v > = < v, u >$ car $u(t)v(t) = v(t)u(t)\ \ \forall t \in \mathbb{R}$ donc $<\cdot,\cdot>$ est symétrique
- $< a\,u + v, w > = a \cdot < u, w > + < v, w >$ par linéarité de l'intégration donc $<\cdot,\cdot>$ est linéaire à gauche
- $< u, u > = \int_0^{+\infty} u^2(t)\,dt \geq 0$ car car $t \to u^2(t)$ est positive.
- $<u, u > = \int_0^{+\infty} u^2(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, \mathrm{u(t)} = 0$ car $t \to u^2(t)$ est continue et positive.

Donc $<\cdot,\cdot>$ est bilinéaire, symétrique et définie positive. Donc $<\cdot,\cdot>$ est bien un produit scalaire.

Question II.6

$$\begin{aligned}
< v, w > &= \frac{1}{T}\int_0^T V\sin(\omega t)\, W\cos(\omega t + \psi)\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T VW\ (sin(\omega t)cos(\omega t)cos(\psi) - sin^2(\omega t)sin(\psi))dt \\
&= \frac{1}{T}\,VW\left(\left[\frac{\sin^2(\omega t)}{2\omega}\right]_0^T \cos(\psi) - \left[-\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} + \frac{t}{\omega}\right]_0^T \sin(\psi)\right) \\
&= -\frac{VW}{2}\sin(\psi)
\end{aligned}$$

$$< w, w >= \frac{1}{T}\int_0^T W^2\cos^2(\omega t + \psi)\ dt\ = \frac{1}{T}\,W^2\left[\frac{1}{4\omega\ sin(2\omega t\ + 2\psi)} + \frac{t+\psi}{2}\right]_0^T = \frac{W^2}{2}$$

Question II.7

$$m\,p^2\,U(p) + \mu p\,U(p)\ + k\,U(p)\ =\ F(p)$$

$$H(p) = \frac{U(p)}{F(p)} = \frac{1}{k + \mu p\ +\ m\,p^2}$$

Question II.8

$$\begin{aligned}
-m\,\omega^2\,A\,e^{i(\omega\,t+\varphi)}\ +\ i\,\mu\,\omega\,A\,e^{i(\omega\,t+\varphi)}\ +\ k\,A\,e^{i(\omega\,t+\varphi)} &= f_0\,e^{i(\omega\,t)} \\
(-m\,\omega^2 + i\,\mu\,\omega + k)\,A\,e^{i\,\varphi} &= f_0 \\
A\,e^{i\,\varphi} &= \frac{f_0}{k - m\omega^2 + i\,\mu\,\omega}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{f_0}{\sqrt{(k - m\omega^2) + \mu^2\,\omega^2}} \\
cos(\varphi) &= \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2) + \mu^2\,\omega^2}} \\
\sin(\varphi) &= -\frac{\mu\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2) + \mu^2\,\omega^2}}
\end{aligned}$$

Question II.9

$$P_m = < f, \dot{u} > = \int_0^T \omega A\,cos(\omega t\ + \varphi)\,f_0\sin(\omega t)\,dt = -\frac{\omega A f_0}{2}\,sin(\varphi)$$

$$P_e\ =\ \mu_e < u, \dot{u} > = \int_0^T (\omega A)^2\cos^2(\omega t + \varphi)dt\ \ = \frac{\mu_e\omega^2 A^2}{2}$$

Question II.10

$\varepsilon_{eff} = \frac{P_e}{P_m} = \frac{\mu_e}{\mu}$ (en injectant les résultats des question II-8 et II-9)

On retombe sur le résultat du II.4

Question II.11

$P_e = -\mu_e \frac{f_0}{2\left(\mu^2 - m + \frac{k}{\omega^2}\right)}$ cette quantité est bien maximale pour $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Application numérique : $m = \frac{k}{\omega^2} = 50\text{g}$

Question II.12

Une incertitude de $u(\omega) = 5\%$ sur la valeur de ω entraine une incertitude $u(m) = \sqrt{\left(\frac{dm}{d\omega}\right)^2 \cdot u^2(\omega)} = \frac{2k}{\omega^3} \cdot 0.005$ sur la masse m

Pour un élargissement à 95 %, le facteur d'élargissement est de 2, U(m) = 2*u(m)

$$\frac{U(m)}{m} = 2 \cdot \frac{2k}{\omega^2} \cdot 0{,}05 \cdot \frac{\omega}{k} = 20\ \%$$

III. Modélisation électromécanique couplée du générateur piézoélectrique

III.A Changement de variable

Question III.1

$$\frac{dY(s)}{ds} = K \cdot L \cdot X(\alpha s)$$

III.B Réduction de la matrice M

Question III.2

$$X(x) = \det(x.I_3 - M) = x^3 + 6\,x^2 + 28\,x + 40 = (x+2)(x^2 + 4x + 20)$$

Question III.3

X admet une seule racine réelle et deux racines complexes, donc n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

M est cependant diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

III.C Résolution du système différentiel homogène

Question III.4

$det(R) = 160 \neq 0$ donc R est inversible.

Question III.5

On vérifie bien que $\bar{Q}Q = I_3$, donc Q est inversible et $Q^{-1} = \bar{Q}$

Question III.6

$P = RQ$ étant le produit de 2 matrices inversibles, elle est inversible. $P^{-1} = Q^{-1}\,R^{-1}$

Question III.7

$$\frac{dZ}{ds} = D \cdot Z \Leftrightarrow \frac{dY}{ds} = P \cdot \frac{dZ}{ds} = P \cdot D \cdot Z = P \cdot P^{-1} \cdot M \cdot P \cdot Z = M \cdot Y \Leftrightarrow \frac{dY}{ds} = M \cdot Y$$

Question III.8

On pose alors $Z(s) = \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_3(s) \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} z_1'(s) = -2\,z_1(s) \\ z_{2(s)}' = (-2+4i)z_2(s) \\ z_{3(s)}' = (-2-4i)z_3(s) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} z_1(s) = z_{1,0}e^{-2s} \\ z_2(s) = z_{2,0}e^{(-2+4i)s} \\ z_3(s) = z_{3,0}e^{(-2-4i)s} \end{cases}$

donc $\exists Z_0 = \begin{pmatrix} z_{1,0} \\ z_{2,0} \\ z_{3,0} \end{pmatrix}$ tq $Z(s) = E_1(s)\,Z_0$

Question III.9

$$E_{1(s)} = \frac{e^{-2s}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{4is}+e^{-4is} & i(e^{-4is}-e^{4is}) \\ 0 & i(e^{4is}-e^{-4is}) & e^{4is}+e^{-4is}\end{pmatrix} = \frac{e^{-2s}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos(4s) & 2\sin(4s) \\ 0 & -2\sin(4s) & 2\cos(4s)\end{pmatrix}$$

$E_1(s)$ est bien à coefficients réels

Question III.10

$Y(s) = P\cdot Z(s) = P\,E_2(s)\,Z_0 = P\,Q^{-1}E_1(s)\,Q\,P^{-1}Y_0 = R\,Q\,Q^{-1}E_1(s)Q\,Q^{-1}R^{-1}Y_0 = R\,E_1(s)R^{-1}Y_0 = N(s)Y_0$

Question III.11

$$\overline{Y}(s) = Y(s) \Leftrightarrow \overline{N(s)Y_0} = N(s)Y_0 \Leftrightarrow \overline{N(s)}\overline{Y_0} = N(s)Y_0 \Leftrightarrow N(s)\overline{Y_0} = N(s)Y_0 \Leftrightarrow \overline{Y_0} = Y_0$$

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de (4) est $Y(s) = N(s)Y_0$ avec $Y_0 \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

III.D Efficacité du générateur et lien avec le modèle simplifié

Question III-12

$$Y(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta}u(\alpha s) \\ v(\alpha s) \\ \frac{\alpha}{\beta}\dot{u}(\alpha s)\end{pmatrix} = N(s)Y_0 = N(s)\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta}u_0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4\cos(4s)+3\cos(4s) \\ 5\cos(4s)-5 \\ 10\cos(4s)-20\sin(4s)-10\end{pmatrix}\frac{e^{-2s}}{8\beta}u_0$$

Question III-13

$$v(t) = \frac{5}{8}\left(\cos\left(\frac{4t}{\alpha}\right)-1\right)e^{-\frac{2t}{\alpha}}u_0$$

Question III-14

$t \to (5\cos(4t)-5)^2$ est bornée et donc $t \to e^{-\frac{4t}{\alpha}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est bien définie

Question III-15

$$\int_0^\infty e^{-at}\cos(bt)\,dt = \left[\left(-\frac{a\cos(bt)}{b^2+a^2}+\frac{b\sin(bt)}{b^2+a^2}\right)e^{-at}\right]_0^\infty = \frac{a}{b^2+a^2}$$

Autre méthode :

$$\int_0^\infty e^{-at}\cos(bt)\,dt = Re\left(\int_0^\infty e^{(-a+bi)t}dt\right) = Re\left(\frac{-1}{-a+bi}\right) = \frac{a}{b^2+a^2}$$

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{R}\int_0^\infty\left(\frac{5}{8\beta}e^{-\frac{2t}{\alpha}}\left(\cos\left(\frac{4t}{\alpha}\right)-1\right)u_0\right)^2 dt \\ &= \frac{25u_0^2}{64R\beta^2}\int_0^\infty\left(\cos^2\left(\frac{4t}{\alpha}\right)-2\cos\left(\frac{4t}{\alpha}\right)+1\right)e^{-\frac{4t}{\alpha}}dt \\ &= \frac{25u_0^2}{64R\beta^2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{8t}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}-2\cos\left(\frac{4t}{\alpha}\right)+1\right)e^{-\frac{4t}{\alpha}}dt \\ &= \frac{25u_0^2}{64R\beta^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{20}-2\frac{\alpha}{8}+\frac{3\alpha}{8}\right) \\ &= \frac{25u_0^2}{64R\beta^2}\cdot\frac{3\alpha}{20}\end{aligned}$$

$$E_e = \frac{15}{256}\cdot\frac{u_0^2\alpha}{R\beta}$$

Question III-16

$$\varepsilon_{eff} = \frac{\frac{15\alpha}{256}\cdot\frac{u_0^2}{R\beta^2}}{\frac{1}{2}ku_0^2} = \frac{15}{128}\cdot\frac{1}{kR\beta^2} = 0.47$$

D'où $\mu_e = \mu\varepsilon_{eff} = 0.68\,N.m^{-1}.s$