

Proposition de corrigé

Concours : **ATS**

Année : **2015**

Filière : **ATS**

Épreuve : **Sciences Industrielles pour l'Ingénieur**

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Laveuse autoportée

Partie 1 : opération de déchargement de la laveuse

Q1. Torseur des actions mécaniques transmissibles :

$$\{T_{sol \rightarrow Roue\ avant}\} = \begin{Bmatrix} Z_{I_a} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_a} \quad (\text{pas de freinage sur la roue avant})$$

$$\{T_{pesanteur \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} -M_S g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\{T_{sol \rightarrow Roue\ arriere}\} = \begin{Bmatrix} Z_{I_{gd}} \vec{z}_L \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_{gd}} \quad (\text{action tangentielle de la rampe sur les roues arrières négligée}).$$

Q2. L'ensemble S est en mouvement de translation rectiligne $\overline{\Omega(S/R_0)} = \vec{0}$, donc $\overline{\sigma_G(S/R_0)} = \vec{0}$

Par conséquent,
$$\overline{\delta_G(S/R_0)} = \left[\frac{d\overline{\sigma_G(S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} = \vec{0}$$

Q3. Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à S au point G :

$$\{T_{sol \rightarrow Roue\ avant}\}_G + \{T_{sol \rightarrow Roue\ arriere}\}_G + \{T_{pesanteur \rightarrow S}\}_G = \{D(S/R_0)\}_G$$

Soit $\overline{a(G \in S/R_0)} = \gamma_d \overline{y}_L$ donc $\overline{R_d(S/R_0)} = M_S \gamma_d \overline{y}_L$

$$\{T_{pesanteur \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} -M_S g \sin \varphi \overline{y}_L - M_S g \cos \varphi \overline{z}_L \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à S en projection sur \overline{y}_L : $M_S \gamma_d = -M_S g \sin \varphi$

Donc : $\gamma_d = -g \sin \varphi$ A.N. : $\gamma_d = -1,55 \text{ m.s}^{-2}$

Q4. Mouvement uniformément accéléré :

$$\begin{cases} a(t) = \gamma_d \\ v(t) = \gamma_d t + v_0 \\ \lambda(t) = \frac{1}{2} \gamma_d t^2 + v_0 t + \lambda_0 \end{cases}$$

A $t = 0$: $\begin{cases} a(0) = \gamma_d \\ v(0) = v_0 = 0 \\ \lambda(0) = \lambda_0 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a(t) = \gamma_d \\ v(t) = \gamma_d t \\ \lambda(t) = \frac{1}{2} \gamma_d t^2 \end{cases}$ A $t = t_{rampe}$: $\begin{cases} a(t_{rampe}) = \gamma_d = -1,55 \text{ m.s}^{-2} \\ v(t_{rampe}) = \gamma_d t_{rampe} \\ \lambda(t_{rampe}) = \frac{1}{2} \gamma_d t_{rampe}^2 = -5 \end{cases}$

Donc $t_{rampe} = \sqrt{\frac{-10}{\gamma_d}}$ et donc $v(t_{rampe}) = \sqrt{-10 \times \gamma_d} = \sqrt{-10 \times (-1,55)}$ d'où : $v(t_{rampe}) = 3,94 \text{ m.s}^{-1}$

Q5. Calcul du temps de début de freinage : $t_{rampe} = \sqrt{\frac{-10}{\gamma_d}}$ donc $t_{rampe} = 2,54 \text{ s}$

La laveuse se situe maintenant sur le sol, la roue avant est bloquée et glisse sur le sol. Durant cette phase, le mouvement est décéléré.

Principe fondamental de la dynamique appliqué à S au point G :

$$\{T_{sol \rightarrow Roue\ avant}\}_G + \{T_{sol \rightarrow Roue\ arri\ere}\}_G + \{T_{pesanteur \rightarrow S}\}_G = \{D(S / R_0)\}_G = \begin{Bmatrix} M_S \gamma_f \overline{y_L} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\{T_{sol \rightarrow Roue\ avant}\}_G = \begin{Bmatrix} Y_{I_a} \overline{y_L} + Z_{I_a} \overline{z_L} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_a} \quad \text{avec } Y_{I_a} = f Z_{I_a}$$

$$\overline{M}_{G(sol \rightarrow Roue\ avant)} = \overline{M}_{I_a(sol \rightarrow Roue\ avant)} + \overline{GI_a} \wedge \overline{R}_{(sol \rightarrow Roue\ avant)} = (b \overline{y_L} - H \overline{z_L}) \wedge (f Z_{I_a} \overline{y_L} + Z_{I_a} \overline{z_L}) = (b + Hf) Z_{I_a} \overline{x_L}$$

$$\{T_{sol \rightarrow Roue\ arri\ere}\}_G = \begin{Bmatrix} Z_{I_{gd}} \overline{z_L} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_{gd}}$$

$$\overline{M}_{G(sol \rightarrow Roue\ arri\ere)} = \overline{M}_{I_{gd}(sol \rightarrow Roue\ arri\ere)} + \overline{GI_{gd}} \wedge \overline{R}_{(sol \rightarrow Roue\ arri\ere)} = (-a \overline{y_L} - H \overline{z_L}) \wedge Z_{I_{gd}} \overline{z_L} = -a Z_{I_{gd}} \overline{x_L}$$

$$\{T_{pesanteur \rightarrow S}\}_G = \begin{Bmatrix} -M_S g \overline{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -M_S g \overline{z_L} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

On en déduit les 3 équations scalaires issues du PFD :

$$\begin{cases} f Z_{I_a} = M_S \gamma_f \\ Z_{I_a} + Z_{I_{gd}} - M_S g = 0 \\ (b + Hf) Z_{I_a} - a Z_{I_{gd}} = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$Z_{I_{gd}} = \frac{(b + Hf)}{a} Z_{I_a}$$

$$Z_{I_a} = M_S g - Z_{I_{gd}} = M_S g - \frac{(b + Hf)}{a} Z_{I_a} \quad \text{donc } Z_{I_a} = \frac{a M_S g}{a + b + Hf}$$

$$\gamma_f = \frac{f}{M_S} Z_{I_a} \quad \text{donc } \gamma_f = \frac{a g f}{a + b + Hf}$$

$$\text{A.N. avec } f = 0,85 : \gamma_f = 3,55 \text{ m.s}^{-2}$$

Mouvement uniformément décéléré :

$$\begin{cases} a(t) = -\gamma_f \\ v(t) = -\gamma_f t + v_0 \\ \lambda(t) = -\frac{1}{2} \gamma_f t^2 + v_0 t + \lambda_0 \end{cases}$$

A $t = 0$:

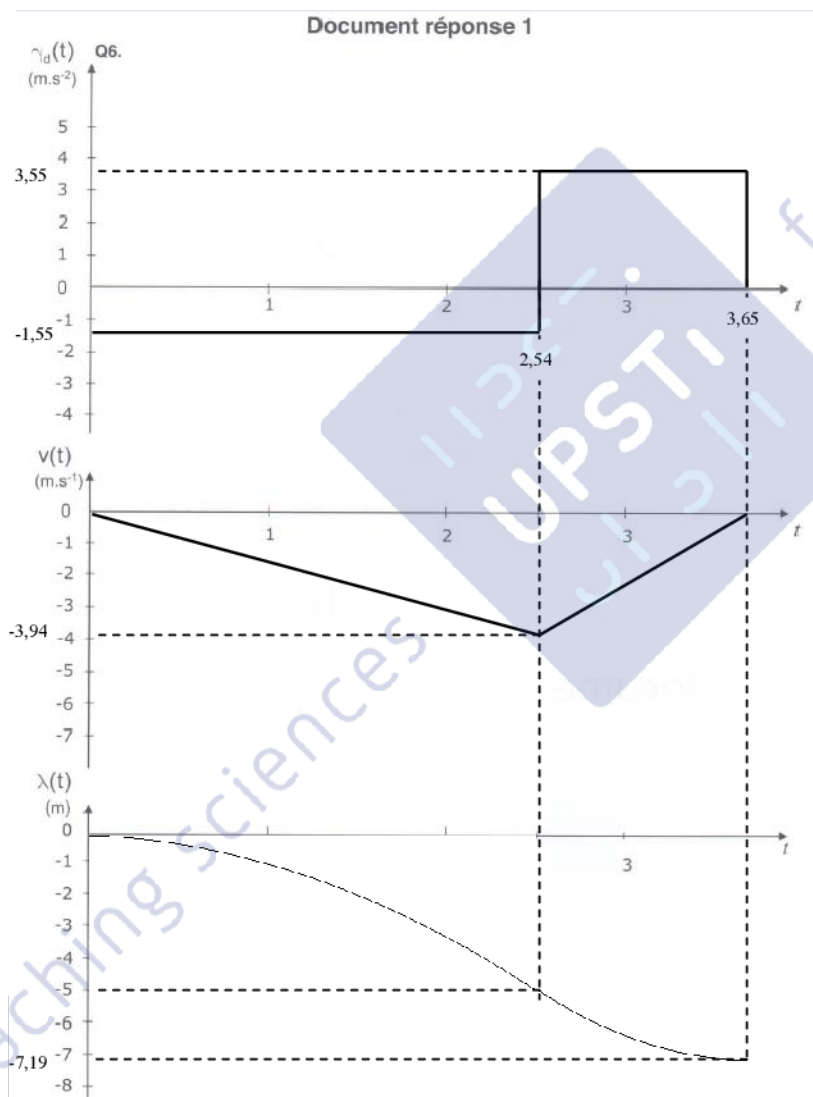
$$\begin{cases} a(0) = -\gamma_f \\ v(0) = v_0 = 3,94 \\ \lambda(0) = \lambda_0 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} a(t) = -\gamma_f \\ v(t) = -\gamma_f t + v_0 \\ \lambda(t) = -\frac{1}{2} \gamma_f t^2 + v_0 t \end{cases}$$

$$\text{A } t = t_{\text{arrêt}} : \begin{cases} a(t_{\text{arrêt}}) = -\gamma_f = 3,55 \text{ m.s}^{-2} \\ v(t_{\text{arrêt}}) = -\gamma_f t_{\text{arrêt}} + v_0 = 0 \\ \lambda(t_{\text{arrêt}}) = -\frac{1}{2} \gamma_f t_{\text{arrêt}}^2 + v_0 t_{\text{arrêt}} \end{cases}$$

Calcul du temps d'arrêt : $t_{\text{arrêt}} = \frac{v_0}{\gamma_f} = \frac{3,94}{3,55}$ donc $t_{\text{arrêt}} = 1,11 \text{ s}$

Calcul de la distance de freinage : $\lambda(t_{\text{arrêt}}) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\gamma_f}$ donc $\lambda(t_{\text{arrêt}}) = 2,19 \text{ m}$

Q6.



Q7. La distance de freinage maximale en cas d'urgence imposée est de 2m. Or dans ces conditions, la distance de freinage est de 2,19 m : ce critère n'est pas respecté.

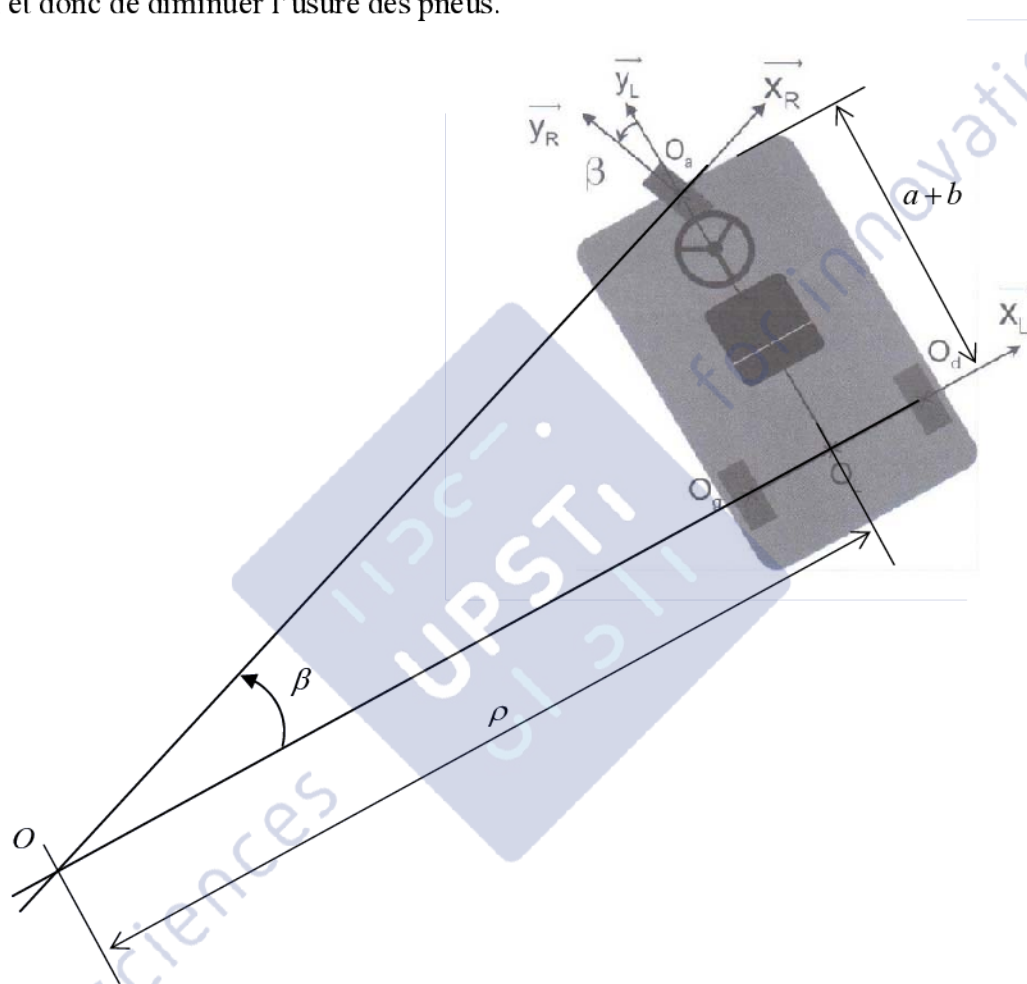
Partie 2 : étude de la laveuse en fonctionnement

Q8. Les courbes de l'annexe 1 nous montrent que les vitesses de rotation des roues arrière sont différentes : la roue extérieure a une vitesse de rotation plus importante que la roue intérieure car elle doit parcourir une distance plus grande. La stratégie à adopter pour commander les moteurs sur la nouvelle version est de déterminer les lois de commande en vitesse des moteurs arrière en fonction de l'angle de rotation du volant et d'assurer l'asservissement en vitesse des roues arrière.

Q9. La force de réaction du sol sur la roue avant suivant \vec{z}_d sans loi de commande est de 600N, elle est de 170N avec les lois de commande. L'intérêt d'imposer ces lois de commande est donc de diminuer cette force de réaction et donc de diminuer l'usure des pneus.

Q10.

$$\tan \beta = \frac{a+b}{\rho}$$



Q11. Si la laveuse tourne sur elle-même alors : $\rho = \frac{e}{2}$ et $\omega_g = -\omega_d$

Si la laveuse va en ligne droite alors : $\rho = +\infty$ et $\omega_g = \omega_d$

Si la laveuse tourne autour de la roue gauche : $\rho = e$ et $\omega_g = 0$

Q12.

• Condition de roulement sans glissement en I_g : $\overline{V_{I_g \in R_g / R_0}} = \vec{0}$

$$\overline{V_{O_L \in R_L / R_0}} = \overline{V_{O_g \in R_g / R_0}} + \overline{O_L O_g} \wedge \overline{\Omega_{R_L / R_0}} = \overline{V_{O_g \in R_L / R_g}} + \overline{V_{O_g \in R_g / R_0}} + \overline{O_L O_g} \wedge \overline{\Omega_{R_L / R_0}}$$

Or $\overline{V_{O_g \in R_L / R_g}} = \vec{0}$ car O_g est sur l'axe de la liaison pivot entre la roue arrière gauche et le châssis

$$\text{Et } \overline{V_{O_g \in R_g / R_0}} = \overline{V_{I_g \in R_g / R_0}} + \overline{O_g I_g} \wedge \overline{\Omega_{R_g / R_0}} = \vec{0} - r \vec{z}_L \wedge (\overline{\Omega_{R_g / R_L}} + \overline{\Omega_{R_L / R_0}}) = -r \omega_g \vec{y}_L$$

Donc $\overline{V_{O_L \in R_L / R_0}} = -r \omega_g \vec{y}_L - \frac{e}{2} \vec{x}_L \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 = -r \omega_g \vec{y}_L + \frac{e}{2} \dot{\alpha} \vec{y}_L$: $\overline{V_{O_L \in R_L / R_0}} = - \left(r \omega_g - \frac{e}{2} \dot{\alpha} \right) \vec{y}_L$

- Condition de roulement sans glissement en I_d : $\overrightarrow{V_{I_d \in R_d / R_0}} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{V_{O_L \in R_L / R_0}} = \overrightarrow{V_{O_d \in R_L / R_0}} + \overrightarrow{O_L O_d} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_L / R_0}} = \overrightarrow{V_{O_d \in R_L / R_d}} + \overrightarrow{V_{O_d \in R_d / R_0}} + \overrightarrow{O_L O_d} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_L / R_0}}$$

Or $\overrightarrow{V_{O_d \in R_L / R_d}} = \vec{0}$ car O_d est sur l'axe de la liaison pivot entre la roue arrière droite et le châssis

$$\text{Et } \overrightarrow{V_{O_d \in R_d / R_0}} = \overrightarrow{V_{I_d \in R_d / R_0}} + \overrightarrow{O_d I_d} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_d / R_0}} = \vec{0} - r \vec{z}_L \wedge (\overrightarrow{\Omega_{R_d / R_L}} + \overrightarrow{\Omega_{R_L / R_0}}) = -r \omega_d \vec{y}_L$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V_{O_L \in R_L / R_0}} = -r \omega_d \vec{y}_L + \frac{e}{2} \vec{x}_L \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 = -r \omega_d \vec{y}_L - \frac{e}{2} \dot{\alpha} \vec{y}_L : \overrightarrow{V_{O_L \in R_L / R_0}} = -\left(r \omega_d + \frac{e}{2} \dot{\alpha}\right) \vec{y}_L$$

- En fonction de ρ et $\dot{\alpha}$:

$$\overrightarrow{V_{O_L \in R_L / R_0}} = \overrightarrow{V_{O \in R_L / R_0}} + \overrightarrow{O_L O} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_L / R_0}} = \vec{0} - \rho \vec{x}_L \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 \text{ donc } \overrightarrow{V_{O_L \in R_L / R_0}} = \rho \dot{\alpha} \vec{y}_L$$

Q13. $\overrightarrow{V_{O_L \in R_L / R_0}} = -\left(r \omega_g - \frac{e}{2} \dot{\alpha}\right) \vec{y}_L$ et $\overrightarrow{V_{O_L \in R_L / R_0}} = \rho \dot{\alpha} \vec{y}_L$ donc $-r \omega_g + \frac{e}{2} \dot{\alpha} = \rho \dot{\alpha} : \omega_g = -\left(\rho - \frac{e}{2}\right) \frac{\dot{\alpha}}{r}$

$$\overrightarrow{V_{O_L \in R_L / R_0}} = \rho \dot{\alpha} \vec{y}_L = V \vec{y}_L \text{ donc } \dot{\alpha} = \frac{V}{\rho} \text{ d'où : } \omega_g = -\left(\rho - \frac{e}{2}\right) \frac{V}{r \rho}$$

De la même manière, $\omega_d = -\left(\rho + \frac{e}{2}\right) \frac{V}{r \rho}$

Q14. D'après la Q10, $\tan \beta = \frac{a+b}{\rho}$ donc $\rho = \frac{a+b}{\tan \beta}$

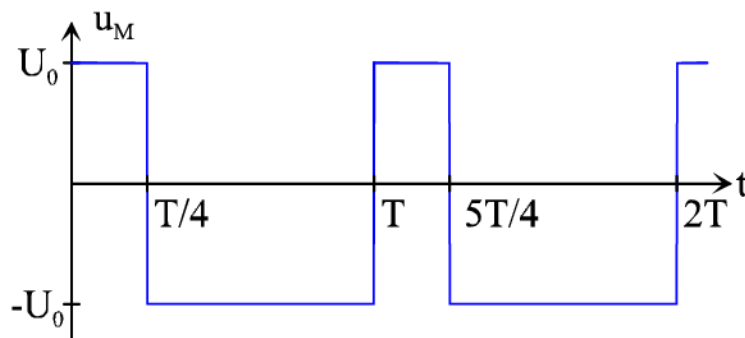
$$\text{D'où } \omega_g = -\left(\frac{a+b}{\tan \beta} - \frac{e}{2}\right) \frac{V}{r(a+b)} \tan \beta : \omega_g = -\frac{V}{r} \left(1 - \frac{e}{2(a+b)} \tan \beta\right)$$

$$\text{Et } \omega_d = -\left(\frac{a+b}{\tan \beta} + \frac{e}{2}\right) \frac{V}{r(a+b)} \tan \beta : \omega_d = -\frac{V}{r} \left(1 + \frac{e}{2(a+b)} \tan \beta\right)$$

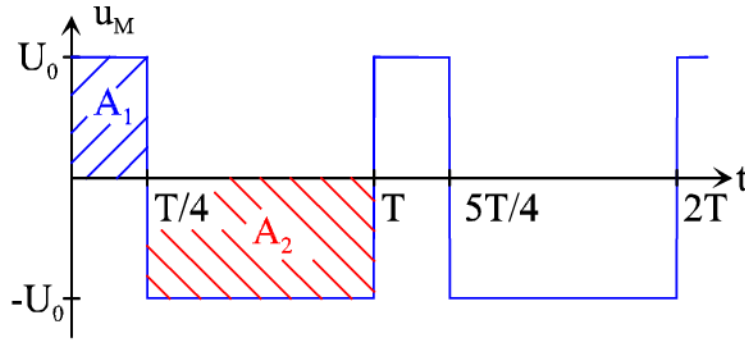
Partie 3 : étude de la commande des moteurs

Q15 : La laveuse doit pouvoir avancer et reculer avec une pente, la machine à courant continu doit fonctionner en génératrice et en moteur dans les quatre quadrants. Le convertisseur doit être réversible en courant et en tension.

Q16 :



Q17 : On utilise la méthode des aires pour le calcul de $\langle u_M \rangle$.



$$\langle u_M \rangle \cdot T = A_1 + A_2 = \alpha TU_0 - (1 - \alpha)TU_0 = (2\alpha - 1)TU_0 \Leftrightarrow \langle u_M \rangle = (2\alpha - 1)U_0$$

Ω_{moteur}	α
0	$\alpha = 0,5$
> 0	$0,5 < \alpha \leq 1$
< 0	$0 \leq \alpha < 0,5$

Q18 : On suppose que le moteur tourne à sa vitesse maximale pour une tension de $24V$.
 On obtient une vitesse de 6 km/h pour $\alpha = 1$. Pour obtenir une vitesse de 3 km/h , il faut que $\alpha = 0,75$.
 Le rapport cyclique étant codé sur un octet (8 bits), il y a 256 valeurs possibles.
 On suppose que le codage est le suivant :

α	0	0,5	1			
$alpha$	0	126	127	128	254	255

La valeur donnée dans le programme n'est pas correcte.

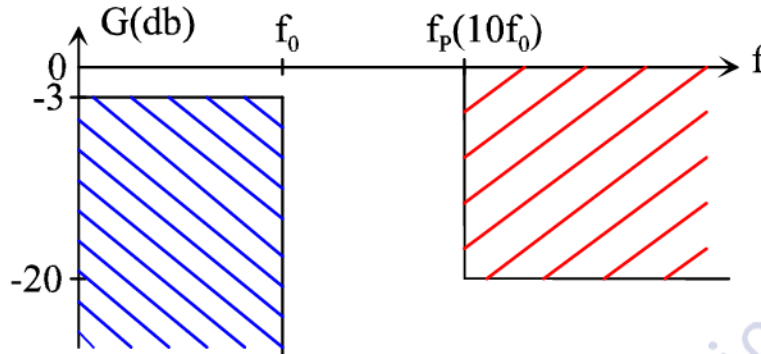
$$alpha = E(254\alpha)$$

Pour $\alpha = 0,75 \Rightarrow alpha = 190$.

Partie 4 : étude de la chaîne d'acquisition

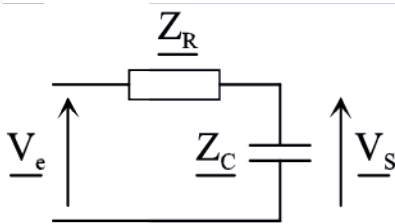
Q19 : La fréquence maximale de rotation du moteur est $n_{max} = \frac{5836}{60} = 97,27 \text{ tr/s}$ et le collecteur possède 14 lames. La fréquence fondamentale des parasites est donc $f_p = 14n_{max} = 1361,7 \text{ Hz}$.

Q20 :



Remarque : on a tracé le gabarit complet en supposant une bande passante à -3 dB (aucune indication n'est donnée pour les basses fréquences).

Q21 : On utilise la notation complexe ainsi que les impédances complexes.



Les deux impédances étant en série, on applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{V}_S(j\omega) = \left[\frac{\underline{Z}_C(j\omega)}{\underline{Z}_R(j\omega) + \underline{Z}_C(j\omega)} \right] \underline{V}_e(j\omega) \Leftrightarrow \frac{\underline{V}_S(j\omega)}{\underline{V}_e(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\frac{\underline{V}_S(j\omega)}{\underline{V}_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

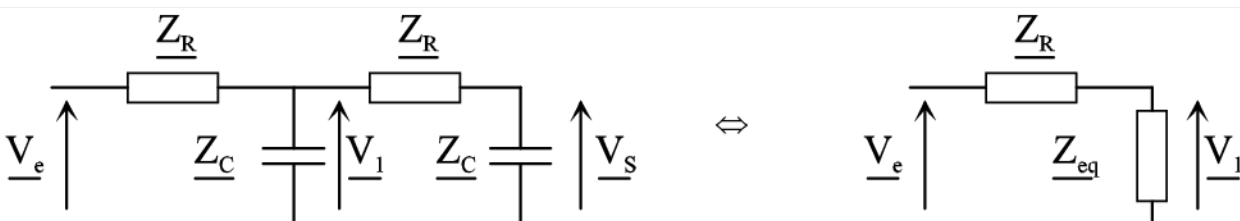
On obtient un filtre passe-bas du 1^{er} ordre de fréquence de coupure $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Calculons le gain de ce filtre lorsque l'on se place à une décade après la pulsation de coupure.

$$G(10\omega_0) = 20 \log |H(j10\omega_0)| = 20 \log \left| \frac{1}{1 + 10j} \right| = 20 \log \sqrt{101} = 10 \log(101) \Rightarrow G(10\omega_0) = 20,0432 \text{ dB}$$

Nous trouvons un gain inférieur à -20 dB , ce filtre convient à l'atténuation demandée.

Q22 : On utilise le schéma-équivalent suivant :



Z_{eq} est l'impédance équivalente à l'association série de la résistance R et du condensateur C en parallèle avec le condensateur C .

$$\underline{Z}_{eq}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_C(j\omega)(\underline{Z}_R(j\omega) + \underline{Z}_C(j\omega))}{\underline{Z}_C(j\omega) + \underline{Z}_R(j\omega) + \underline{Z}_C(j\omega)} = \frac{\frac{1}{jC\omega} \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)}{\frac{1}{jC\omega} + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jC\omega} \frac{(1 + jRC\omega)}{(2 + jRC\omega)}$$

On utilise la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{V}_1(j\omega) = \left[\frac{\underline{Z}_{eq}(j\omega)}{\underline{Z}_R(j\omega) + \underline{Z}_{eq}(j\omega)} \right] \underline{V}_e(j\omega) \Leftrightarrow \frac{\underline{V}_1(j\omega)}{\underline{V}_e(j\omega)} = \frac{\frac{1}{jC\omega} (1 + jRC\omega)}{R + \frac{1}{jC\omega} (1 + jRC\omega)} = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega + jRC\omega(2 + jRC\omega)}$$

$$\frac{\underline{V}_1(j\omega)}{\underline{V}_e(j\omega)} = \frac{1 + jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

$$\frac{\underline{V}_s(j\omega)}{\underline{V}_e(j\omega)} = \frac{\underline{V}_s(j\omega)}{\underline{V}_1(j\omega)} \times \frac{\underline{V}_1(j\omega)}{\underline{V}_e(j\omega)} = \left[\frac{1 + jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 + jRC\omega} \right] \Leftrightarrow \frac{\underline{V}_s(j\omega)}{\underline{V}_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

On obtient un filtre passe-bas du second ordre, atténuation de -40 dB/dec en hautes fréquences. Ce filtre satisfait aux exigences.

Q23 : On désire obtenir $f_0 = 0,1 f_p \approx 136 \text{ Hz}$ avec $RC = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi f_0} = 1,17 \text{ ms}$

On choisit $R = 12 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \mu\text{F}$ comme valeurs normalisées, ce qui donne $f_0 = 132,6 < 136 \text{ Hz}$.

Q24 :

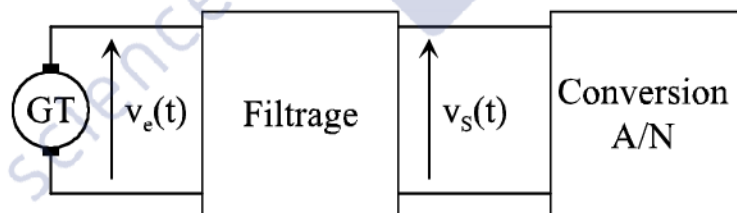


Figure 12 : chaîne d'acquisition de la vitesse des roues

Sur la figure 12, on constate que la tension délivrée par la génératrice tachymétrique $v_e(t)$ est convertie après filtrage.

Cette tension pouvant être positive ou négative (la vitesse de la laveuse peut varier de -2 km/h à 6 km/h), le convertisseur A/N est un convertisseur bipolaire. Le mot binaire de 5 bits ($N_{vitesse}$) est un nombre binaire signé. On considère que la pleine échelle du convertisseur est obtenu pour une vitesse de 6 km/h .

La plus petite variation de vitesse est donc $\frac{6}{2^4} = 0,375 \text{ km/h}$.

Le cahier des charges n'est pas respecté pour ce critère.

Partie 5 : dimensionnement des moteurs

Q25. $V = r.\omega_r = r.k.\omega_m$ donc $\omega_m = \frac{V}{r.k}$

Q26. Energie cinétique du châssis de la laveuse avec le conducteur : $T_1 = \frac{1}{2}M_S V^2$ (car solide en translation) donc $T_1 = \frac{1}{2}M_S k^2 r^2 \omega_m^2$

Energie cinétique du rotor de l'arbre moteur : $T_2 = \frac{1}{2}J_m \omega_m^2$

Energie cinétique des trois roues de la laveuse : $T_3 = 3 \times \frac{1}{2}J_r \omega_r^2$ donc $T_3 = \frac{3}{2}J_r k^2 \omega_m^2$

Q27. L'énergie cinétique de l'ensemble vaut : $T = \frac{1}{2}M_S k^2 r^2 \omega_m^2 + \frac{1}{2}J_m \omega_m^2 + \frac{3}{2}J_r k^2 \omega_m^2 = \frac{1}{2}J_{\text{éq}} \omega_m^2$
soit $T = \frac{1}{2}(M_S k^2 r^2 + J_m + 3J_r k^2) \omega_m^2$ donc $J_{\text{éq}} = M_S k^2 r^2 + J_m + 3J_r k^2$

Q28. Théorème de l'énergie cinétique appliqué au véhicule complet noté E : $\left[\frac{d}{dt} T_{E/0} \right] = P_{E \rightarrow E} + P_{\text{int}}$

- Puissances extérieures :

Pesanteur : $P_{\text{pes} \rightarrow E} = \vec{P} \cdot \vec{V} = -M_S g \vec{z}_0 \cdot V \vec{y}_L = -M_S g V \sin \varphi_L$

Frottement sec (brosses et raclette) : $P_f = -F_f \cdot V$

Frottement de roulement : $P_{\text{roul}} = -T_{\text{roul}} \cdot V = -f_r \cdot M_S \cdot g \cdot V$

Roulement sans glissement de la roue avant sur le sol donc pas de puissance perdue : $P = 0$

- Puissances intérieures :

Moteur (rendement de la chaîne de transmission : η) : $P_{\text{moteur}} = \eta C_m \omega_m$

Donc : $J_{\text{éq}} \omega_m \dot{\omega}_m = -M_S g V \sin \varphi_L - F_f \cdot V - f_r \cdot M_S \cdot g \cdot V + \eta C_m \omega_m$

$J_{\text{éq}} \omega_m \dot{\omega}_m = \eta C_m \omega_m - (M_S g \sin \varphi_L + F_f + f_r \cdot M_S \cdot g) k \cdot r \omega_m$

D'où : $J_{\text{éq}} \dot{\omega}_m = \eta C_m - k \cdot r (M_S g (\sin \varphi_L + f_r) + F_f)$

Q29. $C_m = \frac{J_{\text{éq}} \dot{\omega}_m + k \cdot r (M_S g (\sin \varphi_L + f_r) + F_f)}{\eta}$

Applications numériques :

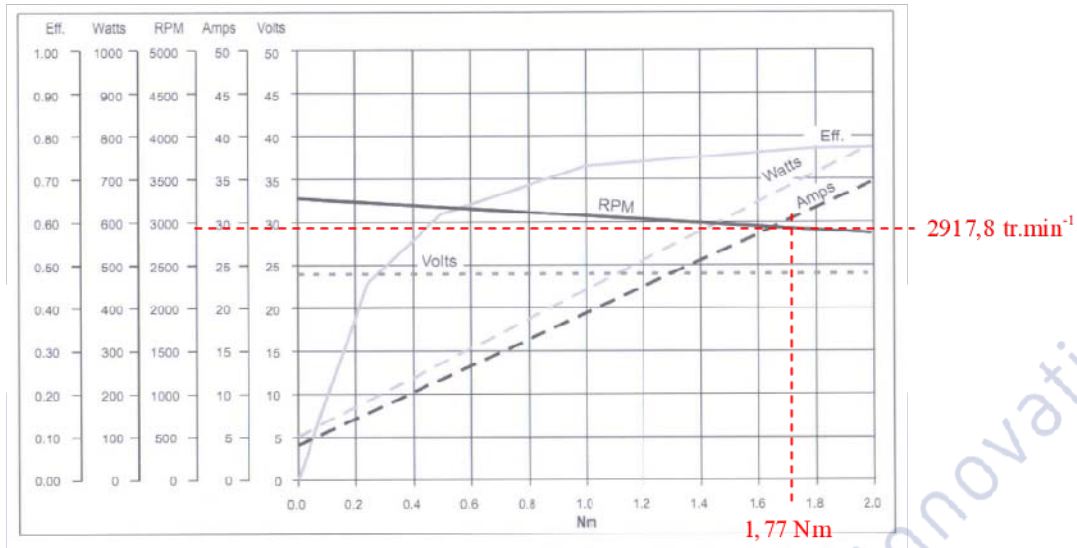
$J_{\text{éq}} = 500 \times 0,15^2 \times \frac{1}{55^2} + 15 \times 10^{-3} + 3 \times 25 \times 10^{-3} \times \frac{1}{55^2} = 18,7 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$

Phase d'accélération donc : $a = \frac{V_{\text{max}}}{5}$ et $\dot{\omega}_m = \frac{a}{k \cdot r} = \frac{V_{\text{max}}}{5 \times k \times r} = \frac{3}{5 \times \frac{1}{55} \times 0,15 \times 3,6} = 61,1 \text{ rad.s}^{-2}$

D'où $C_m = 3,2 \text{ Nm}$

Q30. Calcul du couple moteur en phase uniforme : $C_m = \frac{k \cdot r (M_S g (\sin \varphi_L + f_r) + F_f)}{\eta} = 1,77 \text{ Nm}$

Calcul de la vitesse angulaire : $\omega_m = \frac{V_{max}}{k.r} = 305,6 \text{ rad.s}^{-1} = 2917,8 \text{ tr.min}^{-1}$



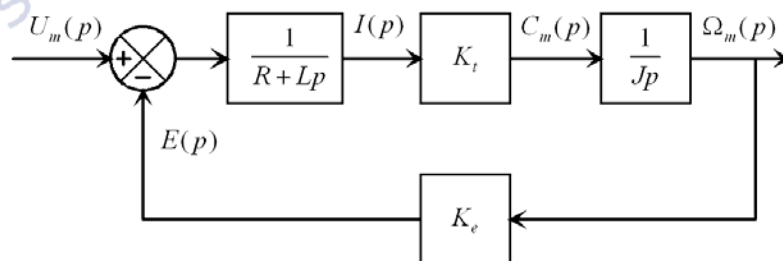
Le moteur convient pour la phase uniforme.

Partie 6 : asservissement des moteurs

Q31 : On applique la transformée de Laplace aux équations du moteur en supposant nulles les conditions initiales.

$$\begin{cases} u_M(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \\ e(t) = K_e \cdot \omega_m(t) \\ c_M(t) = K_t \cdot i(t) \\ J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_M(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_m(p) = (R + Lp) \cdot I(p) + E(p) \\ E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p) \\ C_m(p) = K_t \cdot I_m(p) \\ Jp\Omega_m(p) = C_m(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I(p) = \left(\frac{1}{R + Lp} \right) [U_m(p) - E(p)] \\ E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p) \\ C_m(p) = K_t \cdot I_m(p) \\ \Omega_m(p) = \frac{1}{Jp} C_m(p) \end{cases}$$

On peut compléter le schéma-bloc :



Q32 : On applique la formule de Black-Nichols.

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{K_t}{Jp(R+Lp)}}{1 + \frac{K_e K_t}{Jp(R+Lp)}} = \frac{K_t}{K_e K_t + RJp + LJp^2} \Leftrightarrow H_m(p) = \frac{1/K_e}{1 + \frac{RJ}{K_e K_t} p + \frac{LJ}{K_e K_t} p^2}$$

Q33 : On a $H_m(p) = \frac{1/K_e}{1 + \tau_{em}p + \tau_e \tau_{em} p^2}$

On développe $\frac{B_0}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_{em} p)}$.

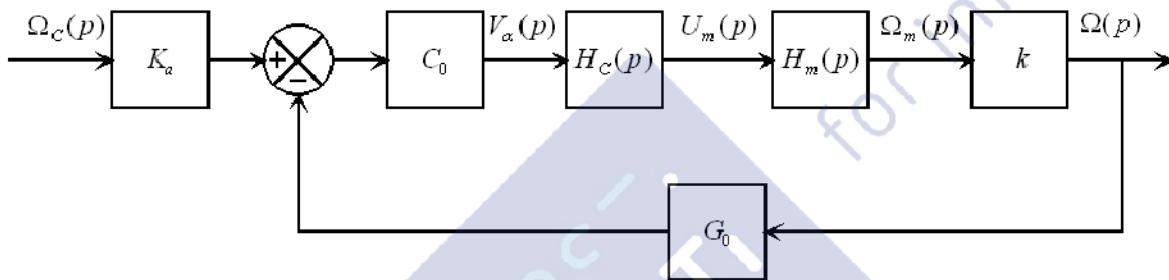
$$\frac{B_0}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_{em} p)} = \frac{B_0}{[1 + (\tau_e + \tau_{em})p + \tau_e \tau_{em} p^2]}$$

Pour justifier que $H_m(p) = \frac{1/K_e}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_{em} p)}$, il faut que $\tau_e + \tau_{em} \sim \tau_{em}$, autrement dit $\tau_e \ll \tau_{em}$.

A.N. $\tau_e = \frac{L}{R} = \frac{1,6}{0,55} = 2,91 \text{ ms}$, $\tau_{em} = \frac{JR}{K_e K_t} = \frac{0,015 \times 0,55}{0,06^2} = 2,29 \text{ s} \Rightarrow \frac{\tau_{em}}{\tau_e} \approx 788$

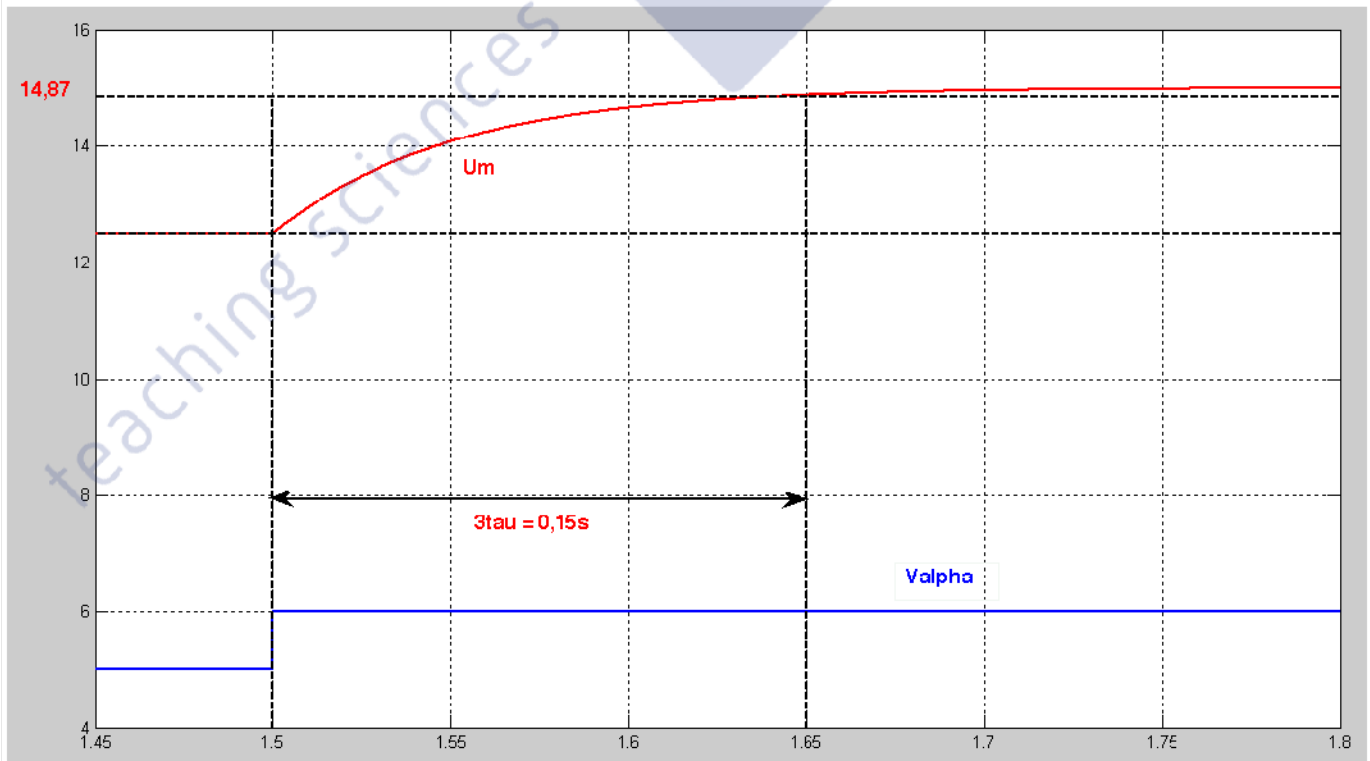
On a bien $\tau_e \ll \tau_{em}$, on peut donc mettre $H_m(p)$ sous la forme $H_m(p) = \frac{1/K_e}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_{em} p)}$.

Q34 :



Q35 : Pour que la vitesse $\omega(t)$ soit correctement asservie, il faut choisir $K_a = G_0$ de manière à obtenir $\omega = \omega_c$ quand l'erreur est nulle (en sortie du comparateur).

Q36 :



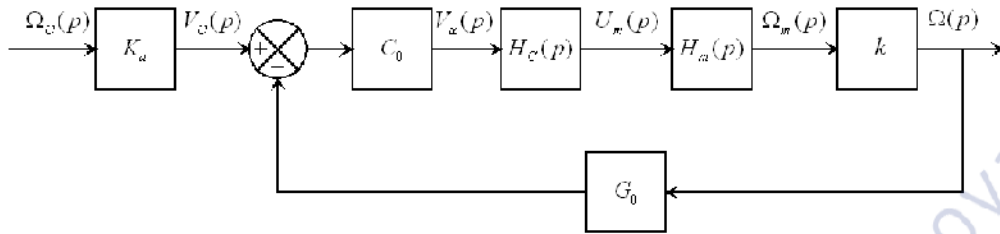
On obtient une variation de $2,5 V$ pour la tension U_m .

Le gain statique vaut donc $A_0 = \frac{2,5}{1} = 2,5$.

Pour le temps de réponse, on se place à $12,5 + 0,95 \times 2,5 = 14,875 V$, on trouve un temps de $1,65 s$.

On a donc $t_{RS\%} = 1,65 - 1,5 = 0,15 s = 3\tau \Leftrightarrow \tau = 0,05 s$.

Q37 : On applique la formule de Black-Nichols.



$$FTBF(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{\Omega_m(p)}{V_c(p)} \times \frac{V_c(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{C_0 H_c(p) H_m(p) k}{1 + C_0 H_c(p) H_m(p) k G_0} K_a = \frac{C_0 k K_a H_c(p) H_m(p)}{1 + C_0 G_0 k H_c(p) H_m(p)}$$

On doit obtenir une fonction de transfert du 2nd ordre or $H_c(p)$ est une fonction du 1^{er} ordre et $H_m(p)$ est une fonction du 2nd ordre. Pour obtenir une fonction du 2nd ordre, il faut simplifier la fonction de transfert $H_m(p)$.

$$H_m(p) = \frac{B_0}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_{em} p)} \text{ avec } \tau_e \ll \tau_{em}, \text{ on peut donc approximer } H_m(p) \text{ par une fonction du 1^{er} ordre.}$$

$$H_m(p) = \frac{B_0}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_{em} p)} \approx \frac{B_0}{(1 + \tau_{em} p)} \text{ (on garde la constante de temps la plus grande).}$$

$$FTBF(p) = \frac{C_0 k K_a \frac{A_0}{(1 + \tau p)} \frac{B_0}{(1 + \tau_{em} p)}}{1 + C_0 G_0 k \frac{A_0}{(1 + \tau p)} \frac{B_0}{(1 + \tau_{em} p)}} = \frac{A_0 B_0 C_0 k K_a}{A_0 B_0 C_0 G_0 k + (1 + \tau p)(1 + \tau_{em} p)} = \frac{A_0 B_0 C_0 k K_a}{[A_0 B_0 C_0 G_0 k + 1 + (\tau + \tau_{em})p + \tau \tau_{em} p^2]}$$

$$FTBF(p) = \frac{\left(\frac{A_0 B_0 C_0 k K_a}{1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k} \right)}{\left[1 + \left(\frac{\tau + \tau_{em}}{1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k} \right) p + \frac{\tau \tau_{em}}{(1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k)} p^2 \right]} = \frac{\alpha}{\left[1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2 \right]}$$

Par identification $\alpha = \left(\frac{A_0 B_0 C_0 k K_a}{1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k} \right), \omega_0 = \sqrt{\frac{1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k}{\tau \tau_{em}}}$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \left(\frac{\tau + \tau_{em}}{1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k} \right) \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2} \frac{(\tau + \tau_{em})}{\sqrt{(1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k) \tau \tau_{em}}}$$

Q38 : On veut un temps de réponse le plus petit possible mais sans dépassement pour un système du 2nd ordre, pour cela il faut que le coefficient d'amortissement soit égal à 1 ($\xi = 1$).

$$1 = \frac{1}{2} \frac{(\tau + \tau_{em})}{\sqrt{(1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k) \tau \tau_{em}}} \Leftrightarrow \frac{4(1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k) \tau \tau_{em}}{(\tau + \tau_{em})^2} = 1 \Leftrightarrow C_0 = \frac{1}{A_0 B_0 G_0 k} \left[\frac{(\tau + \tau_{em})^2}{4\tau \tau_{em}} - 1 \right]$$

$$C_0 = \frac{1}{A_0 B_0 G_0 k} \left[\frac{(\tau - \tau_{em})^2}{4\tau\tau_{em}} \right]$$

A.N. $C_0 = \frac{1}{2,5 \times 16,7 \times 1 \times \frac{1}{55}} \left[\frac{(0,05 - 2,3)^2}{4 \times 0,05 \times 2,3} \right] = 14,5$

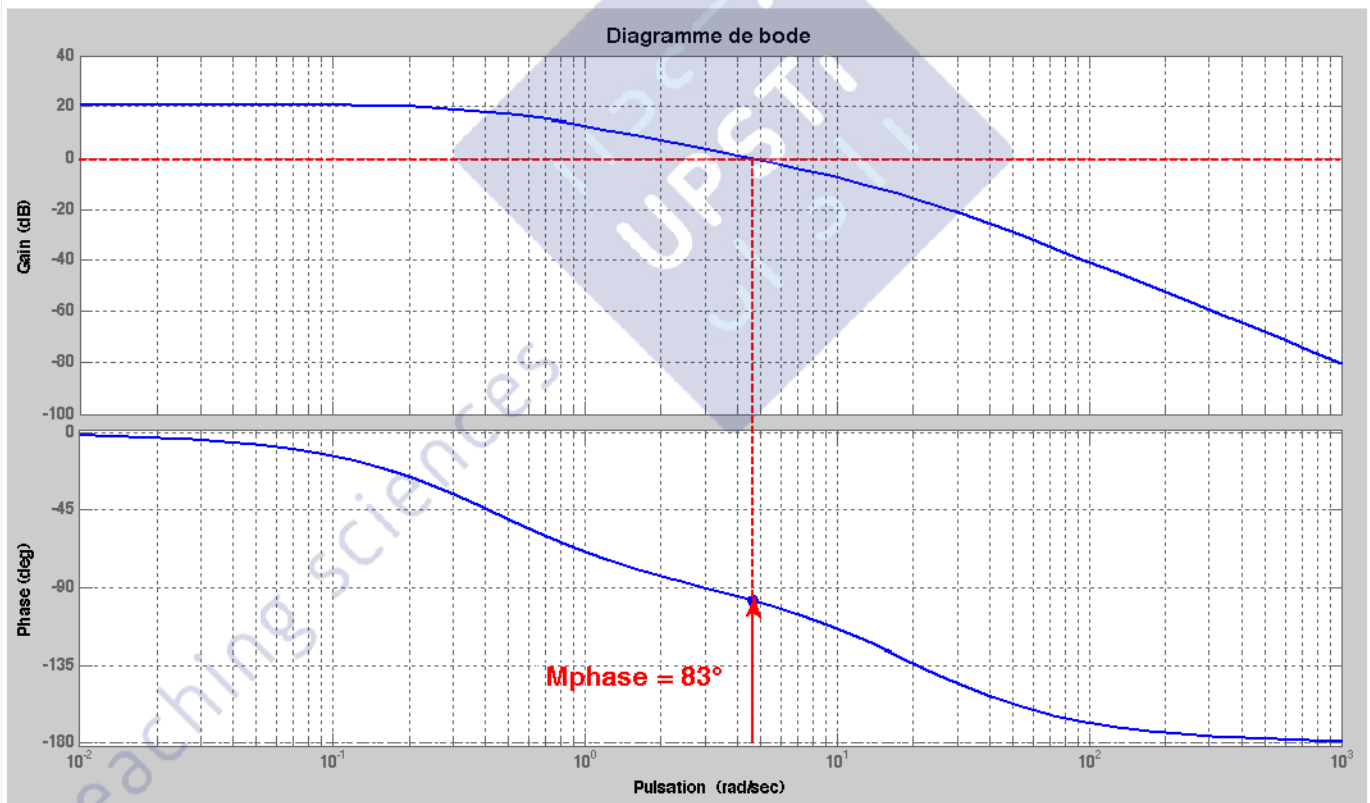
Q39 : D'après l'abaque, on trouve $t_{R5\%} \cdot \omega_0 = 5$.

D'où $t_{5R\%} = 5 \sqrt{\frac{\tau\tau_{em}}{1 + A_0 B_0 C_0 G_0 k}}$ A.N. $t_{5R\%} = 5 \sqrt{\frac{0,05 \times 2,3}{1 + 2,5 \times 16,7 \times 14,4982 \times \frac{1}{55}}} = 0,49 \text{ s} \leq 0,5 \text{ s}$.

Le cahier des charges est bien respecté concernant le temps de réponse.

Remarque : avec la fonction de transfert $FTBO(p)$ donnée, on retrouve les valeurs numériques trouvées du coefficient de la fonction de transfert en boucle fermée.

Q40 : Marge de phase et de gain.



Pour déterminer la marge de phase, on se place à la pulsation ω_{C_0} pour laquelle le gain est nul.

On regarde la valeur de la phase correspondante à cette pulsation et on lui retranche -180° .

$$\Rightarrow M\varphi = \varphi(\omega_{C_0}) - (-180) = 83^\circ.$$

Pour déterminer la marge de gain, on se place à la pulsation ω_{C_π} pour laquelle la phase vaut -180° . Ce

qui correspond à $\omega_{C_\pi} \rightarrow \infty \Rightarrow G(\omega_{C_\pi}) \rightarrow -\infty$.

$$MG = 0 - G(\omega_{C_\pi}) \rightarrow \infty$$

Q41 : L'erreur $\varepsilon(p)$ est donnée par la formule $\varepsilon(p) = \frac{\Omega_c(p)}{1 + FTBO(p)}$.

Pour déterminer l'erreur statique on applique un échelon de vitesse linéaire d'amplitude de 5 km/h , ce qui correspond à un échelon de vitesse angulaire d'amplitude $\frac{5000}{3600 \times 0,15} \text{ rad/s} = 9,26 \text{ rad/s}$ et on applique

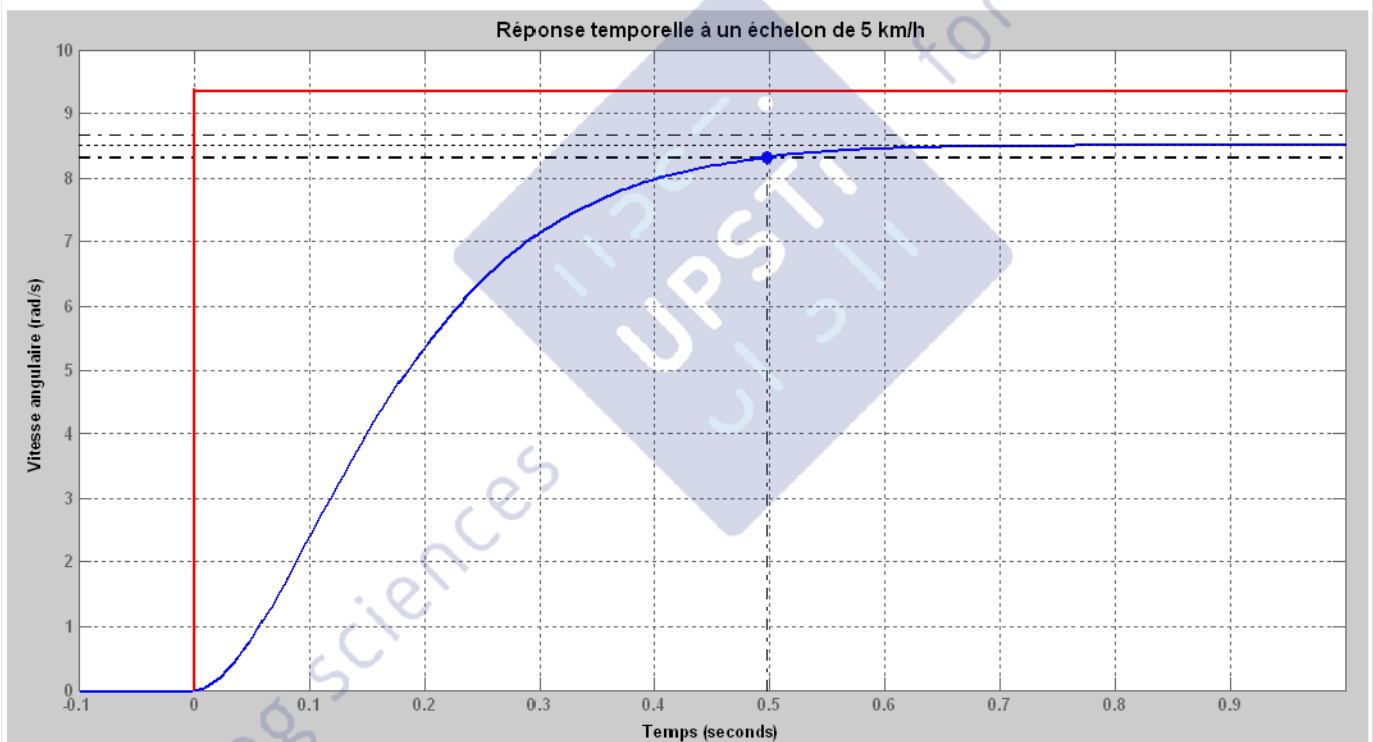
le théorème de la valeur finale avec $\Omega_c(p) = \frac{9,26}{p}$.

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \Omega_c(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{9,26}{1 + FTBO(0)} = \frac{9,26}{1 + 11} = 0,77 \text{ rad/s}.$$

Remarque : on aurait pu directement utiliser la formule de l'erreur statique pour un système de classe 0.

Partie 7 : bilan de l'étude de commande des moteurs

Q42 :



Q43 : Comparaison de la réponse temporelle vis-à-vis du cahier des charges.

On trouve une réponse apériodique critique avec un temps de réponse inférieur à $0,5 \text{ s}$, une erreur statique de $8,33\% (11/12)$. Cette réponse temporelle répond au cahier des charges.

Q44 : On doit s'assurer que le courant absorbé par la machine ne dépasse pas la valeur autorisée sous peine de détérioration du moteur.

Une solution technologique consisterait à placer une saturation après le correcteur.

Remarque : une correction de type cascade (boucle de courant imbriquée dans la boucle de vitesse) permettrait d'améliorer la dynamique.