

## Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2017

Filière : PT

Épreuve : Sciences Industrielles A

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

# Banque PT SI A 2017

## Direction automobile découplée – Corrigé UPSTI

### Question 1

Fonction : distribuer l'énergie disponible

Nom : préactionneur

### Question 2

Flux 1 : information

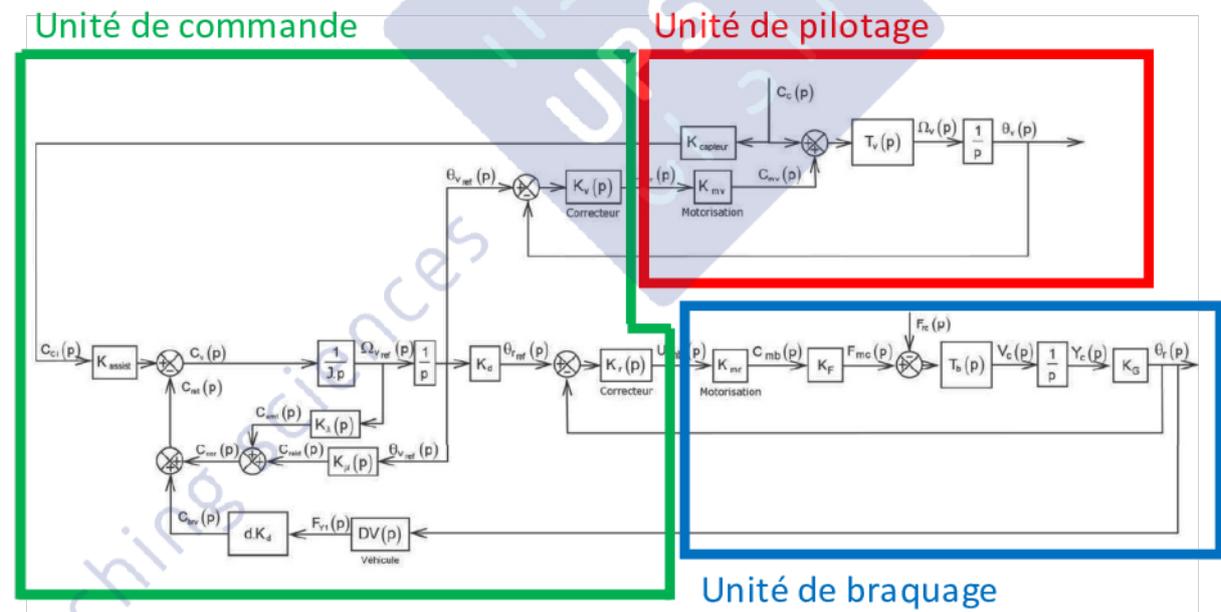
Flux 2 : information

Flux 3 : information

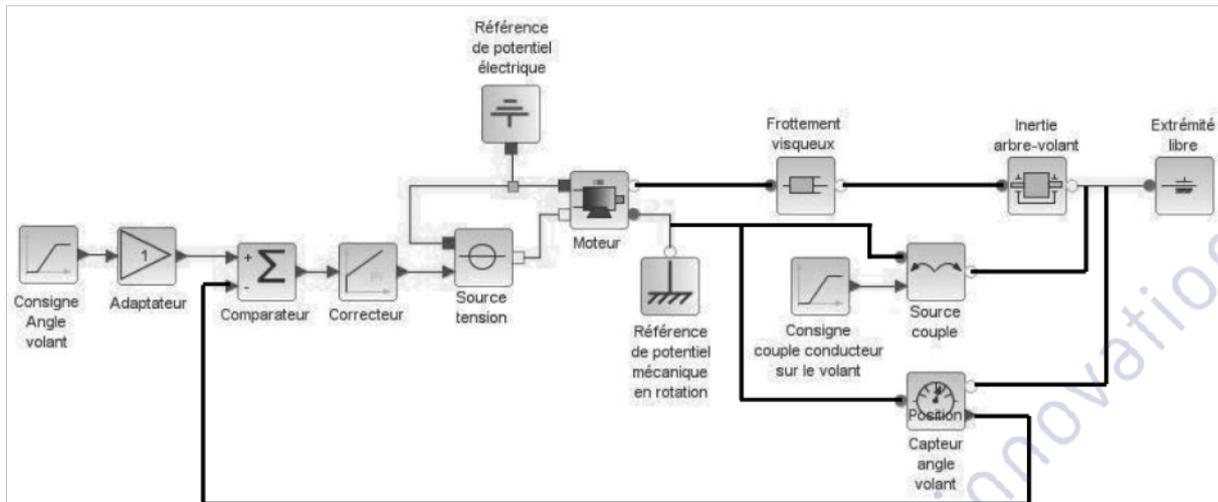
Flux 4 : information

Flux 5 : énergie

### Question 3



#### Question 4



#### Question 5

Le théorème du moment dynamique suivant l'axe  $(G_v, \vec{x}_v)$  permet d'écrire

$$C_c(t) + C_{mv}(t) - f_v \cdot \dot{\theta}_v(t) = J_v \cdot \ddot{\theta}_v(t)$$

#### Question 6

L'équation de la question 5 peut également s'écrire sous cette forme :

$$C_c(t) + C_{mv}(t) - f_v \cdot \omega_v(t) = J_v \cdot \dot{\omega}_v(t)$$

soit dans le domaine de Laplace  $C_c(p) + C_{mv}(p) - f_v \cdot \Omega_v(p) = J_v \cdot p \cdot \Omega_v(p)$ .

Donc 
$$T_v(p) = \frac{\Omega_v(p)}{C_c(p) + C_{mv}(p)} = \frac{1}{f_v + J_v \cdot p} = \frac{1/f_v}{1 + J_v \cdot p/f_v} = \frac{g_v}{1 + \tau_v \cdot p}$$

avec 
$$g_v = \frac{1}{f_v} \quad \text{et} \quad \tau_v = \frac{J_v}{f_v}$$

#### Question 7

**Justification pour les consignes angulaires :** Avec un correcteur proportionnel, la FTBO est de classe 1 donc l'écart statique de position est nul et l'écart statique de vitesse est non nul mais fini. Un réglage sur le gain du correcteur doit permettre de satisfaire le cahier des charges.

**Justification pour les perturbations de couple :** La FTBO est de classe 1 mais l'intégrateur est situé en aval de la perturbation donc l'écart statique à une perturbation de type échelon est non nul. Le cahier des charges n'est pas respecté.

**Conséquences :** Un correcteur proportionnel-intégral va rajouter un intégrateur en amont de la perturbation et va ainsi permettre de satisfaire toutes les exigences de précision. Cependant, la phase va diminuer risquant de dégrader les marges de stabilité.

### Question 8

On peut écrire directement :  $FTBO_{v1}(p) = \frac{\theta_v(p)}{\varepsilon_{\theta v}(p)} = K_i \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{\tau_i \cdot p} \cdot K_{mv} \cdot \frac{g_v}{1 + \tau_v \cdot p} \cdot \frac{1}{p}$

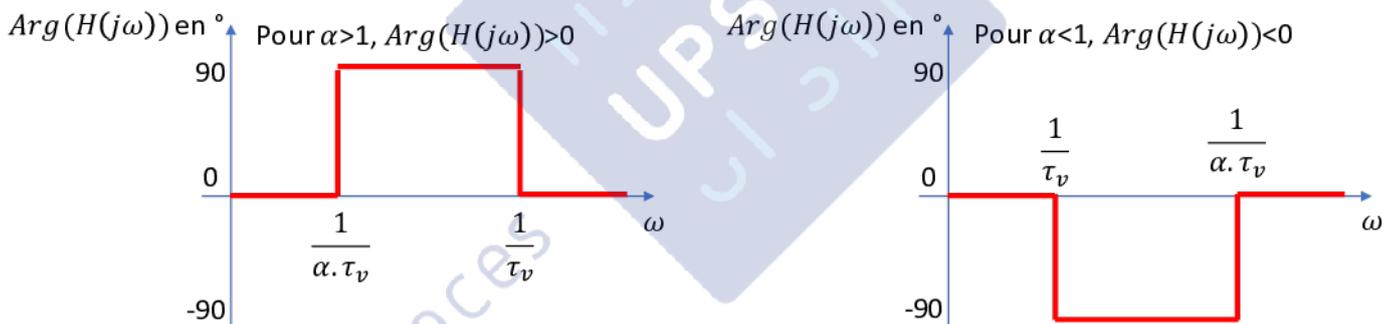
En prenant  $\tau_i = \alpha \cdot \tau_v$ , on obtient :

$$FTBO_{v1}(p) = \frac{K_i \cdot K_{mv} \cdot g_v}{\alpha \cdot \tau_v} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_v \cdot p}{1 + \tau_v \cdot p} = K_{BOv1} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot H(p)$$

avec  $K_{BOv1} = \frac{K_i \cdot K_{mv} \cdot g_v}{\alpha \cdot \tau_v}$  et  $H(p) = \frac{1 + \alpha \cdot \tau_v \cdot p}{1 + \tau_v \cdot p}$

Pour que le système soit stable, il faut que  $\text{Arg}(FTBO_{v1}(j\omega_{0dB})) > -180^\circ$ . La présence du double intégrateur impose que  $\text{Arg}(H(j\omega_{0dB})) > 0$ .

Il faut donc  $\frac{1}{\alpha \cdot \tau_v} < \frac{1}{\tau_v}$  soit  $\alpha > 1$ .



### Question 9

Par lecture directe, on peut écrire que :

$$\varepsilon_{\theta v}(p) = \theta_{v\_ref}(p) - \frac{g_v}{p \cdot (1 + \tau_v \cdot p)} \left( C_c(p) + K_i \cdot K_{mv} \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{\tau_i \cdot p} \cdot \varepsilon_{\theta v}(p) \right)$$

D'où :  $\varepsilon_{\theta v}(p) \cdot (1 + FTBO_{v1}(p)) = \theta_{v\_ref}(p) - \frac{g_v}{p \cdot (1 + \tau_v \cdot p)} \cdot C_c(p)$

Ou encore  $\varepsilon_{\theta v}(p) = \frac{\theta_{v\_ref}(p)}{1 + FTBO_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p \cdot (1 + \tau_v \cdot p)} \cdot \frac{C_c(p)}{1 + FTBO_{v1}(p)}$

**Ecart statique en réponse à une consigne d'angle en échelon :**

$$\boxed{\varepsilon_{\theta v}(t \rightarrow +\infty) = 0} \text{ puisque la FTBO est de classe 2.}$$

**Ecart statique en réponse à une consigne d'angle en rampe :**

$$\boxed{\varepsilon_{\theta v}(t \rightarrow +\infty) = 0} \text{ puisque la FTBO est de classe 2.}$$

**Ecart statique en réponse à une perturbation de couple en échelon :**

$$\boxed{\varepsilon_{\theta v}(t \rightarrow +\infty) = 0} \text{ puisqu'il y a un intégrateur en amont de la perturbation.}$$

**Ecart statique en réponse à une perturbation de couple en rampe :**

$$C_c(t) = C_{c0} \cdot t \cdot u(t) \quad \text{et} \quad C_c(p) = \frac{C_{c0}}{p^2} \quad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta v}(t \rightarrow +\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_{\theta v}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \cdot \frac{g_v}{p \cdot (1 + \tau_v \cdot p)} \cdot \frac{\frac{C_{c0}}{p^2}}{1 + FTBO_{v1}(p)} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} - \frac{g_v}{(1 + \tau_v \cdot p)} \cdot \frac{C_{c0}}{p^2 + K_{BOv1} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_v \cdot p}{1 + \tau_v \cdot p}} = - \frac{g_v \cdot C_{c0}}{K_{BOv1}} = - \frac{g_v \cdot C_{c0} \cdot \alpha \cdot \tau_v}{K_i \cdot K_{mv} \cdot g_v} \\ &= - \frac{C_{c0} \cdot \alpha \cdot \tau_v}{K_i \cdot K_{mv}} \end{aligned}$$

Or, on souhaite  $|\varepsilon_{\theta v}(t \rightarrow +\infty)| \leq \frac{C_{c0}}{10}$  donc

$$\boxed{K_i \geq 10 \cdot \alpha \cdot \frac{\tau_v}{K_{mv}}}$$

L'application numérique donne  $\boxed{K_i \geq 25 \text{ V/rad}}$ .

### Question 10

$$FTBO_{v1}(p) = K_{BOv1} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_v \cdot p}{1 + \tau_v \cdot p}$$

Les deux pulsations de cassure sont  $\frac{1}{\alpha \cdot \tau_v} = 1 \text{ rad/s}$  et  $\frac{1}{\tau_v} = 10 \text{ rad/s}$ .

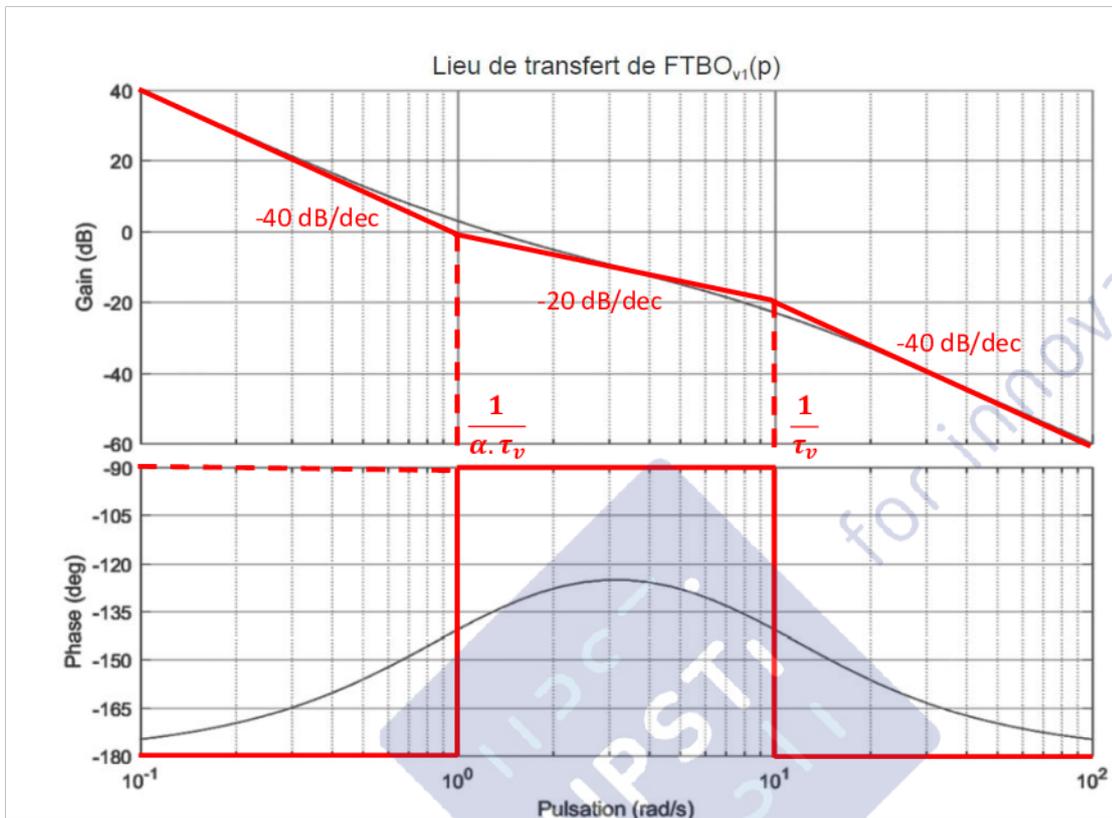
A basse fréquence,  $FTBO_{v1}(p) \approx K_{BOv1} \cdot \frac{1}{p^2}$  donc  $Arg(FTBO_{v1}(j\omega)) \approx -180^\circ$  et

$|FTBO_{v1}(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(K_{BOv1}) - 40 \cdot \log(\omega)$  d'où une pente de  $-40 \text{ dB/dec}$  et qui coupe l'axe des abscisses pour  $\omega^2 = K_{BOv1}$  soit  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ .

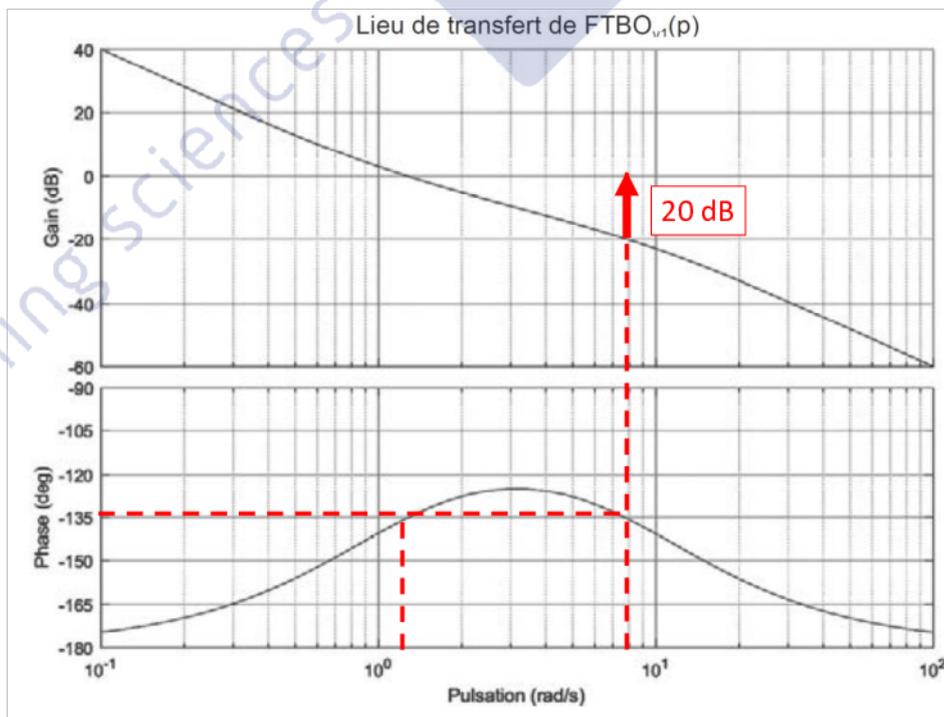
A moyenne fréquence entre les deux pulsations de cassure,  $FTBO_{v1}(p) \approx K_{BOv1} \cdot \frac{\alpha \cdot \tau_v}{p}$  donc

$Arg(FTBO_{v1}(j\omega)) \approx -90^\circ$  et  $|FTBO_{v1}(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(\alpha \cdot K_{BOv1}) - 20 \cdot \log(\omega)$  d'où une pente de  $-20 \text{ dB/dec}$ .

A haute fréquence,  $FTBO_{v1}(p) \approx K_{BOv1} \cdot \frac{\alpha}{p^2}$  donc  $Arg(FTBO_{v1}(j\omega)) \approx -180^\circ$  et  $|FTBO_{v1}(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(\alpha \cdot K_{BOv1}) - 40 \cdot \log(\omega)$  d'où une pente de  $-40$  dB/dec.



### Question 11



La marge de phase de  $45^\circ$  peut être obtenue pour deux pulsations : 1,2 rad/s ou 8 rad/s. D'après le sujet, on retient donc la pulsation de 8 rad/s. A cette pulsation, on doit donc remonter la courbe de gain de 20 dB, donc multiplier le gain  $K_i$  par  $10^{20/20} = 10$ . Au final la valeur de  $K_i = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ V/rad}$  permet d'avoir une marge de phase de  $45^\circ$ .

### Question 12

Le cahier des charges impose que la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_{0dB} \geq 30 \text{ rad/s}$ . Or si on veut que la marge de phase  $M_\varphi \geq 45^\circ$ , il faut également que  $\omega_l \geq 30 \text{ rad/s}$  car  $\omega_l$  est la pulsation à laquelle on souhaite la marge de phase. Or la figure B1 de l'annexe 5 montre clairement que  $\omega_l < 10 \text{ rad/s}$ . On ne peut donc pas satisfaire en même temps  $\omega_{0dB} \geq 30 \text{ rad/s}$  et  $M_\varphi \geq 45^\circ$ .

### Question 13

Exigences	Satisfaction
Pulsation de coupure à 0dB en boucle ouverte $\omega_{0dB} \geq 30 \text{ rad/s}$	D'après la Q12, cette exigence peut être satisfaite mais pas sans celle sur la marge de phase.
Temps de réponse à 5% (boucle fermée) : $t_{r5\%} = 0,1 \text{ s} \pm 20 \text{ ms}$ .	Cette exigence n'est pas satisfaite puisque d'après la figure B2 de l'annexe 5 $t_{r5\%} > 0,5 \text{ s}$ .
Ecart statique en réponse à une consigne d'angle en échelon.	Cette exigence est satisfaite d'après Q9.
Ecart statique en réponse à une consigne d'angle en rampe.	Cette exigence est satisfaite d'après Q9.
Ecart statique en réponse à une perturbation de couple en échelon.	Cette exigence est satisfaite d'après Q9.
Ecart statique en réponse à une perturbation de couple en rampe.	Cette exigence est satisfaite d'après Q9 si $K_i \geq 25 \text{ V.s/rad}$ .
Marge de phase.	D'après la Q11, cette exigence peut être satisfaite mais pas sans celle sur la pulsation de coupure.
Marge de gain.	Cette exigence est satisfaite puisqu'elle vaut $+\infty$
1 <sup>er</sup> dépassement en réponse indicielle.	Cette exigence n'est pas satisfaite puisque d'après la figure B2 de l'annexe 5 $d_{1\%} > 22\%$ .

### Question 14

Avec cette nouvelle correction, on cherche à augmenter la bande passante tout en décalant pour des pulsations plus élevées la « cloche » de phase ce qui permettra d'améliorer la rapidité, de satisfaire en même temps la pulsation de coupure et la marge de phase.

### Question 15

On peut écrire directement :  $T_{vrt}(p) = \frac{T_v(p)}{1 + K_{rt} \cdot T_v(p)}$  avec  $T_v(p) = \frac{g_v}{1 + \tau_v \cdot p}$

Soit

$$\begin{aligned} \frac{T_{vrt}(p)}{T_v(p)} &= \frac{1}{1 + K_{rt} \cdot T_v(p)} = \frac{1}{1 + K_{rt} \cdot \frac{g_v}{1 + \tau_v \cdot p}} = \frac{1 + \tau_v \cdot p}{1 + \tau_v \cdot p + K_{rt} \cdot g_v} \\ &= \frac{1}{1 + K_{rt} \cdot g_v} \cdot \frac{1 + \tau_v \cdot p}{1 + \frac{\tau_v}{1 + g_v \cdot K_{rt}} \cdot p} = \beta \cdot \frac{1 + \tau_v \cdot p}{1 + \beta \cdot \tau_v \cdot p} \end{aligned}$$

Donc  $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} \cdot g_v}$

### Question 16

On peut écrire directement :

$$\begin{aligned} FTBO_{v2}(p) &= K_i \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_v \cdot p}{\alpha \cdot \tau_v \cdot p} \cdot K_{mv} \cdot T_{vrt}(p) \cdot \frac{1}{p} \\ &= K_i \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_v \cdot p}{\alpha \cdot \tau_v \cdot p} \cdot K_{mv} \cdot \beta \cdot \frac{1 + \tau_v \cdot p}{1 + \beta \cdot \tau_v \cdot p} \cdot T_v(p) \cdot \frac{1}{p} \\ &= K_i \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_v \cdot p}{\alpha \cdot \tau_v \cdot p} \cdot K_{mv} \cdot \beta \cdot \frac{1 + \tau_v \cdot p}{1 + \beta \cdot \tau_v \cdot p} \cdot \frac{g_v}{1 + \tau_v \cdot p} \cdot \frac{1}{p} \\ &= \frac{K_i \cdot K_{mv} \cdot \beta \cdot g_v}{\alpha \cdot \tau_v} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_v \cdot p}{1 + \beta \cdot \tau_v \cdot p} = K_{BOv2} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \tau_v \cdot p}{1 + \beta \cdot \tau_v \cdot p} \end{aligned}$$

D'où :  $K_{BOv2} = \frac{K_i \cdot K_{mv} \cdot \beta \cdot g_v}{\alpha \cdot \tau_v}$

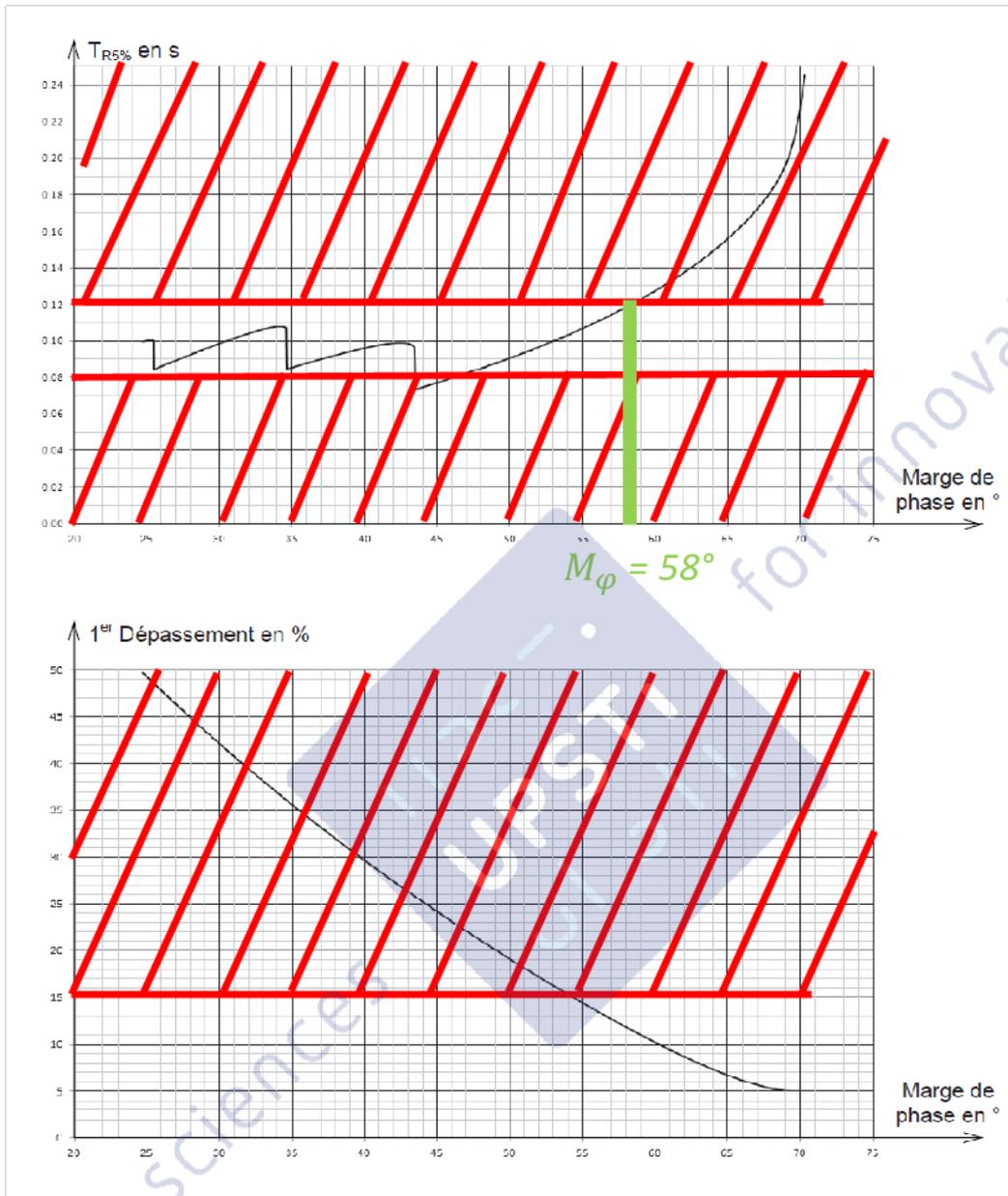
### Question 17

La  $FTBO_{v2}(p)$  a une seconde pulsation de cassure différente de la  $FTBO_{v1}(p)$ , soit  $\frac{1}{\beta \cdot \tau_v}$  au

lieu de  $\frac{1}{\tau_v}$ . En prenant  $\beta < 1$ , on a  $\frac{1}{\beta \cdot \tau_v} > \frac{1}{\tau_v}$ , ce qui permet de respecter la marge de phase

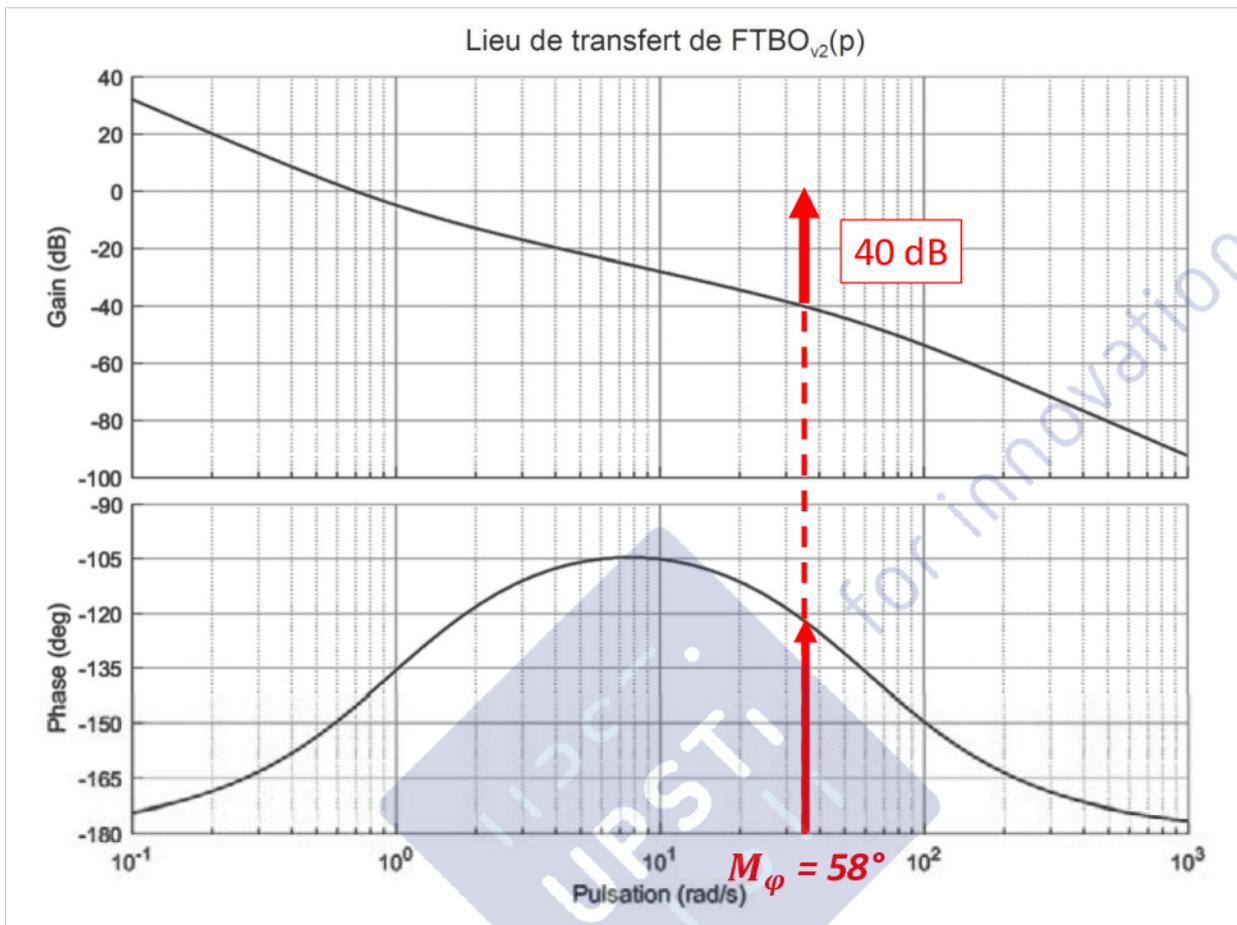
de  $45^\circ$  a une pulsation plus importante et ainsi de respecter en même temps la marge de phase et la pulsation de coupure.

### Question 18



A partir de l'annexe 6, on trouve  $M_\phi = 58^\circ$  la plus grande marge de phase garantissant  $d_{1\%} < 15\%$  et  $t_{r5\%} \in [80 \text{ ms}; 120 \text{ ms}]$ .

### Question 19



La marge de phase de  $58^\circ$  peut être obtenue pour deux pulsations : 1,8 rad/s ou 35 rad/s. Comme à la question 11, on retient la pulsation la plus élevée. A cette pulsation, on doit donc remonter la courbe de gain de 40 dB, donc multiplier le gain  $K_i$  par  $10^{40/20} = 100$ . Au final la valeur de  $K_i = 1,2 \cdot 100 = 120 \text{ V/rad}$  permet d'avoir une marge de phase de  $58^\circ$ .

### Question 20

Exigences	Satisfaction
Pulsation de coupure à 0dB en boucle ouverte $\omega_{0dB} \geq 30$ rad/s	D'après la Q19, cette exigence est satisfaite puisque $\omega_0 = 35$ rad/s.
Temps de réponse à 5% (boucle fermée) : $t_{r5\%} = 0,1 \text{ s} \pm 20$ ms.	Cette exigence est satisfaite d'après la Q18. On doit avoir $t_{r5\%} = 0,12$ s puisque l'on a choisi $M_\varphi = 58^\circ$
Ecart statique en réponse à une consigne d'angle en échelon.	Cette exigence est satisfaite d'après Q9.
Ecart statique en réponse à une consigne d'angle en rampe.	Cette exigence est satisfaite d'après Q9.
Ecart statique en réponse à une perturbation de couple en échelon.	Cette exigence est satisfaite d'après Q9.
Ecart statique en réponse à une perturbation de couple en rampe.	Cette exigence est satisfaite d'après Q9 si $K_i \geq 25$ V.s/rad. Cette condition est toujours vraie et est satisfaite d'après Q19.
Marge de phase.	D'après la Q19, cette exigence est satisfaite puisque $M_\varphi = 58^\circ$ .
Marge de gain.	Cette exigence est satisfaite puisqu'elle vaut $+\infty$
1 <sup>er</sup> dépassement en réponse indicielle.	Cette exigence est satisfaite d'après Q18. On doit avoir $d_{1\%} = 12$ % puisque l'on a choisi $M_\varphi = 58^\circ$ .

### Question 21

Le réglage effectué pourrait entraîner un courant moteur élevé ce qui pourrait faire surchauffer et endommager le moteur. On pourrait donc limiter le courant ou réaliser une boucle de courant. Ces solutions engendreraient des performances moins élevées notamment la rapidité.

### Question 22

En prenant uniquement les solides 1, 5, 6 et 7, on a avec la formule globale  $h = m + I_s - E_s$ :

$$I_s = 3 (\text{sphérique en } D) + 4(\text{pivot glissant } 6/7) + 3(\text{sphérique en } C) \\ + 4(\text{pivot glissant } 1/5) + 3(\text{sphérique en } E) = 17$$

$$m = m_u + m_i \quad \text{avec } m_u = 2 : \text{translation de } 7/6 \text{ et rotation de } (7+6)/1 ;$$

$$\text{et } m_i = 1 : \text{ rotation de } 7/1.$$

$$E_s = 6. (N_p - 1) = 18$$

$$\text{Donc } \boxed{h = 2}.$$

Les mobilités utiles sont pilotées par la crémaillère pour la rotation de 7/6 et par l'amortisseur pour la translation de 7/6.

### Question 23

Le sujet impose  $\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

Or  $\overrightarrow{CM} = x.\vec{x}_1 + y.\vec{y}_1 + z.\vec{z}_1$  et  $\overrightarrow{CD} = x_D.\vec{x}_1 + y_D.\vec{y}_1 + z_D.\vec{z}_1$

Donc  $\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{CD} = (y.z_D - z.y_D).\vec{x}_1 + (z.x_D - x.z_D).\vec{y}_1 + (x.y_D - y.x_D).\vec{z}_1 = \vec{0}$ .

$$\text{Donc } \begin{cases} y.z_D - z.y_D = 0 & (1) \\ z.x_D - x.z_D = 0 & (2) \\ x.y_D - y.x_D = 0 & (3) \end{cases}$$

Seules 2 équations sont indépendantes puisque  $\frac{(1).x_D - (2).y_D}{z_D} = (3)$ .

### Question 24

Le point I est à l'intersection de la droite (CD) et du plan d'équation  $z = -h$ .

Donc d'après (1) :  $y = -h.y_D/z_D$  et (2) :  $x = -h.x_D/z_D$ .

Or d'après la figure C2 de l'annexe 7, on constate que  $\overrightarrow{IQ}.\vec{x}_1 = \overrightarrow{CQ}.\vec{x}_1 = -h.x_D/z_D$ .

D'où : 
$$d = -h.\frac{x_D}{z_D} = 20 \text{ mm}$$

### Question 25

D'après le sujet, on peut écrire  $M_{rp} = \vec{M}_{C,sol \rightarrow roue} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|}$ .

Or  $\vec{M}_{C,sol \rightarrow roue} = \overrightarrow{CI} \wedge (F_{t1}.\vec{y}_1 + F_{n1}.\vec{z}_1) = (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QI}) \wedge (F_{t1}.\vec{y}_1 + F_{n1}.\vec{z}_1)$

Donc

$$\begin{aligned} M_{rp} &= \left( (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QI}) \wedge (F_{t1}.\vec{y}_1 + F_{n1}.\vec{z}_1) \right) \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} \\ &= \left( \overrightarrow{CQ} \wedge (F_{t1}.\vec{y}_1 + F_{n1}.\vec{z}_1) \right) \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} + \left( \overrightarrow{QI} \wedge (F_{t1}.\vec{y}_1 + F_{n1}.\vec{z}_1) \right) \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} \end{aligned}$$

Le premier terme est nul puisque  $\overrightarrow{CQ}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

Or  $\overrightarrow{QI} = -d.\vec{x}_1$  et  $\overrightarrow{CD} = x_D.\vec{x}_1 + y_D.\vec{y}_1 + z_D.\vec{z}_1$

Donc 
$$M_{rp} = (-d.\vec{x}_1 \wedge (F_{t1}.\vec{y}_1 + F_{n1}.\vec{z}_1)) \cdot \frac{x_D.\vec{x}_1 + y_D.\vec{y}_1 + z_D.\vec{z}_1}{\sqrt{x_D^2 + y_D^2 + z_D^2}}$$

soit 
$$M_{rp} = \frac{d.F_{n1}.y_D - d.F_{t1}.z_D}{\sqrt{x_D^2 + y_D^2 + z_D^2}}$$

### Question 26

Avec les hypothèses du sujet, on a  $d \cdot F_{n1} \cdot y_D - d \cdot F_{t1} \cdot z_D \approx -d \cdot F_{t1} \cdot z_D$

$$\text{Et } \sqrt{x_D^2 + y_D^2 + z_D^2} \approx |z_D|$$

Or  $z_D > 0$  donc  $M_{rp} \approx -d \cdot F_{t1}$

### Question 27

La pièce 8 est soumise à 2 glisseurs  $\vec{R}_{4 \rightarrow 8}$  en  $A_1$  et  $\vec{R}_{6 \rightarrow 8}$  en  $B$ , donc à l'équilibre ces deux glisseurs sont opposés de même support ( $A_1 B$ ). Donc  $\vec{R}_{4 \rightarrow 8}$  est suivant ( $A_1 B$ ) soit selon les hypothèses ( $A_1, \vec{y}_1$ ). Au final, on a bien la forme  $\mathcal{F}_{4 \rightarrow 8} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{48} \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A_1}$ .

### Question 28

On isole l'ensemble  $\Sigma = \{6,7,8, \text{Roue}\}$  et on fait le bilan des actions mécaniques extérieures :

- $\mathcal{F}_{4 \rightarrow 8} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{48} \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A_1}$
- $\mathcal{F}_{5 \rightarrow 6} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{5 \rightarrow 6} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$
- $\mathcal{F}_{sol \rightarrow roue} = \left\{ \begin{array}{c} F_{t1} \cdot \vec{y}_1 + F_{n1} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$
- $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 7} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1 \rightarrow 7} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$

D'après le théorème du moment statique en  $C$  dans la direction  $\overline{CD}$ , on obtient :

$$(\vec{M}_{C,4 \rightarrow 8} + \vec{M}_{C,5 \rightarrow 6} + \vec{M}_{C,sol \rightarrow roue} + \vec{M}_{C,1 \rightarrow 7}) \cdot \frac{\overline{CD}}{\|\overline{CD}\|} = 0$$

- $\vec{M}_{C,4 \rightarrow 8} \cdot \frac{\overline{CD}}{\|\overline{CD}\|} \approx x_B \cdot Y_{48}$  avec les hypothèses du sujet.
- $\vec{M}_{C,5 \rightarrow 6} \cdot \frac{\overline{CD}}{\|\overline{CD}\|} = 0$
- $\vec{M}_{C,sol \rightarrow roue} \cdot \frac{\overline{CD}}{\|\overline{CD}\|} = M_{rp}$
- $\vec{M}_{C,1 \rightarrow 7} \cdot \frac{\overline{CD}}{\|\overline{CD}\|} = (\overline{CD} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow 7}) \cdot \frac{\overline{CD}}{\|\overline{CD}\|} = 0$

D'où  $x_B \cdot Y_{48} - d \cdot F_{t1} = 0$  soit  $-x_B \cdot \frac{F_{rc}}{2} - d \cdot F_{t1} = 0$

Donc  $F_{rc} = -2 \cdot d \cdot \frac{F_{t1}}{x_B} = d \cdot K_{G1} \cdot F_{t1}$

Ainsi  $K_{G1} = -\frac{2}{x_B} = -10^{-2} \text{ mm}^{-1}$

### Question 29

Champ des vecteurs vitesses :

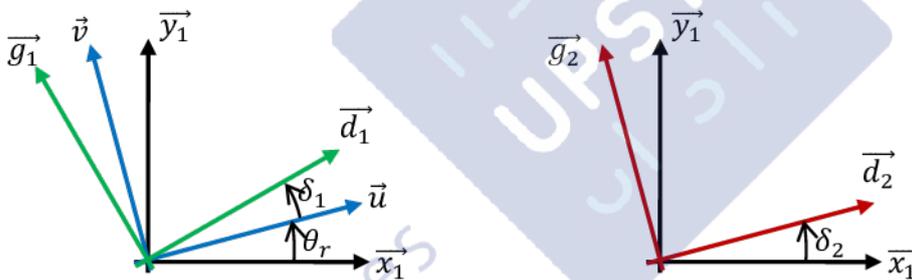
$$\vec{V}(I_1, 1/0) = \vec{V}(G, 1/0) + \overline{I_1 G} \wedge \overline{\Omega}(1/0) = \vec{V}(G, 1/0) + (R\vec{z}_1 - l_1\vec{x}_1) \wedge \dot{\psi}(t)\vec{z}_1$$

$$\vec{V}(I_1, 1/0) = V \cos \alpha(t) \vec{x}_1 + V \sin \alpha(t) \vec{y}_1 + l_1 \dot{\psi}(t) \vec{y}_1$$

$$\vec{V}(I_2, 1/0) = \vec{V}(G, 1/0) + \overline{I_2 G} \wedge \overline{\Omega}(1/0) = \vec{V}(G, 1/0) + (R\vec{z}_1 + l_2\vec{x}_1) \wedge \dot{\psi}(t)\vec{z}_1$$

$$\vec{V}(I_2, 1/0) = V \cos \alpha(t) \vec{x}_1 + V \sin \alpha(t) \vec{y}_1 - l_2 \dot{\psi}(t) \vec{y}_1$$

### Question 30



$$\vec{g}_1 = -\sin(\theta_r + \delta_1) \vec{x}_1 + \cos(\theta_r + \delta_1) \vec{y}_1$$

$$\vec{g}_2 = -\sin(\delta_2) \vec{x}_1 + \cos(\delta_2) \vec{y}_1$$

$\vec{V}(I_1, 1/0) = \vec{V}(M_1, 1/0)$  et  $\vec{V}(M_1, 1/0)$  est colinéaire à  $\vec{d}_1$  (par définition de  $\vec{d}_1$ )

donc  $\vec{V}(M_1, 1/0) \cdot \vec{g}_1 = \vec{V}(I_1, 1/0) \cdot \vec{g}_1 = 0$

De même :  $\vec{V}(M_2, 1/0) \cdot \vec{g}_2 = \vec{V}(I_2, 1/0) \cdot \vec{g}_2 = 0$

$$\vec{V}(I_1, 1/0) \cdot \vec{g}_1 = [V \cos \alpha(t) \vec{x}_1 + V \sin \alpha(t) \vec{y}_1 + l_1 \dot{\psi}(t) \vec{y}_1] \cdot [-\sin(\theta_r + \delta_1) \vec{x}_1 + \cos(\theta_r + \delta_1) \vec{y}_1] = 0$$

Donc :  $[V \cos \alpha(t)][-\sin(\theta_r + \delta_1)] + [V \sin \alpha(t) + l_1 \dot{\psi}(t)][\cos(\theta_r + \delta_1)] = 0$

Et  $\vec{V}(I_2, 1/0) \cdot \vec{g}_2 = 0$  donne :

$$[V \cos \alpha(t)][-\sin(\delta_2)] + [V \sin \alpha(t) - l_2 \dot{\psi}(t)][\cos(\delta_2)] = 0$$

### Question 31

On obtient des 2 équations obtenues à la question précédente :

$$\tan(\theta_r + \delta_1) = \frac{\sin(\theta_r + \delta_1)}{\cos(\theta_r + \delta_1)} = \frac{V \sin \alpha(t) + l_1 \dot{\psi}(t)}{V \cos \alpha(t)} = \tan \alpha(t) + \frac{l_1 \dot{\psi}(t)}{V \cos \alpha(t)}$$

$$\tan(\delta_2) = \frac{\sin(\delta_2)}{\cos(\delta_2)} = \frac{V \sin \alpha(t) - l_2 \dot{\psi}(t)}{V \cos \alpha(t)} = \tan \alpha(t) - \frac{l_2 \dot{\psi}(t)}{V \cos \alpha(t)}$$

### Question 32

$\alpha$ ,  $\theta_r$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  restent faibles donc  $\cos \alpha(t) \approx 1$ ,  $\tan \alpha(t) \approx \alpha$ ,  $\tan(\theta_r + \delta_1) \approx \theta_r + \delta_1$  et  $\tan(\delta_2) \approx \delta_2$

D'après la question précédente :  $\theta_r + \delta_1 = \alpha + \frac{l_1 \dot{\psi}(t)}{V}$  soit  $\delta_1 = -\theta_r + \alpha + \frac{l_1 \dot{\psi}(t)}{V}$

et  $\delta_2 = \alpha - \frac{l_2 \dot{\psi}(t)}{V}$

### Question 33

Accélération  $\vec{a}(G, 1/0)$  du point  $G$  du solide 1 dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  :

$$\vec{a}(G, 1/0) = \left. \frac{d\vec{V}(G, 1/0)}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d[V \cos \alpha(t) \vec{x}_1 + V \sin \alpha(t) \vec{y}_1]}{dt} \right|_{R_0}$$

Or :  $\left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{R_0} = \dot{\psi}(t) \vec{y}_1$  et  $\left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{R_0} = -\dot{\psi}(t) \vec{x}_1$

$$\vec{a}(G, 1/0) = -V\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \vec{x}_1 + V\dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \vec{y}_1 + V\dot{\psi}(t) \cos \alpha(t) \vec{y}_1 - V\dot{\psi}(t) \sin \alpha(t) \vec{x}_1$$

$$\vec{a}(G, 1/0) = V (\dot{\alpha}(t) + \dot{\psi}(t)) (-\sin \alpha(t) \vec{x}_1 + \cos \alpha(t) \vec{y}_1)$$

Résultante dynamique  $\vec{R}_d(1/0)$  :

$$\vec{R}_d(1/0) = M\vec{a}(G, 1/0) = MV (\dot{\alpha}(t) + \dot{\psi}(t)) (-\sin \alpha(t) \vec{x}_1 + \cos \alpha(t) \vec{y}_1)$$

### Question 34

Moment dynamique  $\vec{\delta}(G, 1/0)$  du point  $G$  du solide 1 dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  en projection sur  $\vec{z}_0$  :

$$\vec{\delta}(G, 1/0) \cdot \vec{z}_0 = J_{zz} \ddot{\psi}(t)$$

car le solide 1 tourne autour d'un axe dont la direction reste fixe par rapport au repère galiléen  $O$ .

### Question 35

On isole le solide 1 (avec les roues solidaires de 1) et on effectue le bilan des actions mécaniques qui lui sont appliquées :

- Poids en  $G$  :  $\mathcal{F}(\text{pesanteur} \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} -Mg\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$
- Action du sol sur la roue avant en  $I_1$  :  $\mathcal{F}(0 \rightarrow R_1) = \begin{Bmatrix} F_{Y1}\vec{v} + F_{Z1}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_1}$
- Action du sol sur la roue arrière en  $I_2$  :  $\mathcal{F}(0 \rightarrow R_2) = \begin{Bmatrix} F_{Y2}\vec{y}_1 + F_{Z2}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_2}$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à 1, en projection sur  $\vec{y}_1$  :

$$-Mg\vec{z}_0 \cdot \vec{y}_1 + F_{Y1}\vec{v} \cdot \vec{y}_1 + F_{Z1}\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_1 + F_{Y2}\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 + F_{Z2}\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_1 = \vec{R}_d(1/0) \cdot \vec{y}_1$$

$$F_{Y1} \cos \theta_r + F_{Y2} = MV(\dot{\alpha}(t) + \dot{\psi}(t)) \cos \alpha(t)$$

Pour appliquer le théorème du moment dynamique appliqué à 1, en projection sur  $\vec{y}_1$ , et exprimé en  $G$ , on calcule les moments en ce point :

$$\vec{M}(G, 0 \rightarrow R_1) \cdot \vec{z}_0 = [\vec{GI}_1 \wedge (F_{Y1}\vec{v} + F_{Z1}\vec{z}_1)] \cdot \vec{z}_0 = [-(R\vec{z}_1 - l_1\vec{x}_1) \wedge (F_{Y1}\vec{v} + F_{Z1}\vec{z}_1)] \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{M}(G, 0 \rightarrow R_1) \cdot \vec{z}_0 = l_1 F_{Y1} \cos(\theta_r)$$

$$\vec{M}(G, 0 \rightarrow R_2) \cdot \vec{z}_0 = [\vec{GI}_2 \wedge (F_{Y2}\vec{y}_1 + F_{Z2}\vec{z}_1)] \cdot \vec{z}_0 = [-(R\vec{z}_1 + l_2\vec{x}_1) \wedge (F_{Y2}\vec{y}_1 + F_{Z2}\vec{z}_1)] \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{M}(G, 0 \rightarrow R_2) \cdot \vec{z}_0 = -l_2 F_{Y2}$$

Le TMD s'écrit donc :

$$\vec{M}(G, \text{pesanteur} \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}(G, 0 \rightarrow R_1) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}(G, 0 \rightarrow R_2) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}(G, 1/0) \cdot \vec{z}_0$$

$$l_1 F_{Y1} \cos(\theta_r) - l_2 F_{Y2} = J_{zz} \ddot{\psi}(t)$$

### Question 36

$\alpha$  et  $\theta_r$  sont petits donc  $\cos \alpha(t) \approx 1$  et  $\cos(\theta_r) \approx 1$

Les 2 équations issues du PFD deviennent :

$$\begin{cases} F_{Y1} + F_{Y2} = MV (\dot{\alpha}(t) + \dot{\psi}(t)) \\ l_1 F_{Y1} - l_2 F_{Y2} = J_{zz} \ddot{\psi}(t) \end{cases}$$

Or :  $F_{Y1} = -D \cdot \delta_1$  et  $F_{Y2} = -D \cdot \delta_2$ . Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} -D(\delta_1 + \delta_2) = MV (\dot{\alpha}(t) + \dot{\psi}(t)) \\ -D(l_1 \delta_1 - l_2 \delta_2) = J_{zz} \ddot{\psi}(t) \end{cases}$$

Et en utilisant les résultats de la question 32 :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\theta_r + \alpha + \frac{l_1 \dot{\psi}(t)}{V} & \text{et} & & \delta_2 &= \alpha - \frac{l_2 \dot{\psi}(t)}{V} \\ \begin{cases} -\theta_r + \alpha + \frac{l_1 \dot{\psi}(t)}{V} + \alpha - \frac{l_2 \dot{\psi}(t)}{V} = -\frac{MV}{D} (\dot{\alpha}(t) + \dot{\psi}(t)) \\ l_1 \left( -\theta_r + \alpha + \frac{l_1 \dot{\psi}(t)}{V} \right) - l_2 \left( \alpha - \frac{l_2 \dot{\psi}(t)}{V} \right) = -\frac{J_{zz}}{D} \ddot{\psi}(t) \end{cases} \\ \begin{cases} \theta_r - \alpha - \frac{l_1 \dot{\psi}(t)}{V} - \alpha + \frac{l_2 \dot{\psi}(t)}{V} = \frac{MV}{D} (\dot{\alpha}(t) + \dot{\psi}(t)) \\ \theta_r - \alpha - \frac{l_1 \dot{\psi}(t)}{V} + \frac{l_2}{l_1} \left( \alpha - \frac{l_2 \dot{\psi}(t)}{V} \right) = \frac{J_{zz}}{D l_1} \ddot{\psi}(t) \end{cases} \\ \begin{cases} \left( \frac{MV}{D} + \frac{l_1 - l_2}{V} \right) \dot{\psi}(t) = -\frac{MV}{D} \dot{\alpha}(t) - 2\alpha + \theta_r \\ \frac{J_{zz}}{D l_1} \ddot{\psi}(t) + \left( \frac{l_1^2 + l_2^2}{V l_1} \right) \dot{\psi}(t) = \left( \frac{l_2}{l_1} - 1 \right) \alpha + \theta_r \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui correspond à la forme donnée :

$$\begin{cases} A \dot{\psi}(t) = B_1 \dot{\alpha}(t) + B_2 \alpha + \theta_r \\ C \ddot{\psi}(t) + E \dot{\psi}(t) = F \alpha + \theta_r \end{cases}$$

avec :

$$A = \frac{MV}{D} + \frac{l_1 - l_2}{V}$$

$$B_1 = -\frac{MV}{D}$$

$$B_2 = -2$$

$$C = \frac{J_{zz}}{D l_1}$$

$$E = \frac{l_1^2 + l_2^2}{V l_1}$$

$$F = \frac{l_2}{l_1} - 1$$

### Question 37

Rapport de réduction du réducteur :  $r_2 = \frac{\dot{\theta}_3}{\dot{\theta}_m}$

Pignon crémaillère (roulement sans glissement) :  $\dot{y}_c = R_{PC}\dot{\theta}_3$

Donc : 
$$K_F = \frac{\dot{\theta}_m}{\dot{y}_c} = \frac{\dot{\theta}_m \dot{\theta}_3}{\dot{\theta}_3 \dot{y}_c} = \frac{1}{r_2 R_{PC}}$$

### Question 38

On détermine l'énergie cinétique  $E_C(E/1)$  de l'ensemble E par rapport au châssis 1 considéré comme galiléen, en calculant l'énergie cinétique de chacun des éléments qui la composent :  $E_C(E/1) = E_C(2/1) + E_C(3/1) + E_C(4/1)$

$$E_C(2/1) = \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_m^2 \quad E_C(3/1) = \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 \quad E_C(4/1) = \frac{1}{2}M_C\dot{y}_c^2$$

$$E_C(E/1) = \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}M_C\dot{y}_c^2 = \frac{1}{2}M_{eq}\dot{y}_c^2$$

$$J_2 \left( \frac{\dot{y}_c}{r_2 R_{PC}} \right)^2 + J_3 \left( \frac{\dot{y}_c}{R_{PC}} \right)^2 + M_C \dot{y}_c^2 = M_{eq} \dot{y}_c^2$$

$$M_{eq} = \frac{J_2}{(r_2 R_{PC})^2} + \frac{J_3}{(R_{PC})^2} + M_C$$

### Question 39

On isole l'ensemble E et on effectue le bilan des puissances extérieures :

- Couple moteur :  $P_{mb} = C_{mb}\dot{\theta}_m$
- Efforts bielles sur crémaillère :  $P_{rc} = -F_{rc}\dot{y}_c$
- Frottement visqueux équivalent  $f_{eq}$  :  $P_{ef} = -f_{eq}\dot{y}_c^2$
- Liaisons 2/1, 3/1 et 4/1 parfaites hormis  $f_{eq}$  :  $P_{l/1} = 0$

Il n'y a pas de puissance intérieure (liaisons parfaites et pas de pertes énergétiques dans le réducteur) :  $P_{int} = 0$ .

On applique le théorème de l'énergie puissance à l'ensemble E dans le repère lié à 1 supposé galiléen :

$$\left. \frac{dE_C(E/1)}{dt} \right|_{R_1} = P_{mb} + P_{rc} + P_{ef} + P_{l/1} + P_{int}$$

$$\frac{1}{2} M_{eq} \cdot 2 \cdot \dot{y}_c \ddot{y}_c = C_{mb} \dot{\theta}_m - F_{rc} \dot{y}_c - f_{eq} \dot{y}_c^2 = C_{mb} \frac{\dot{y}_c}{r_2 R_{PC}} - F_{rc} \dot{y}_c - f_{eq} \dot{y}_c^2$$

$$M_{eq} \ddot{y}_c + f_{eq} \dot{y}_c = \frac{C_{mb}}{r_2 R_{PC}} - F_{rc} = C_{mb} K_F - F_{rc}$$

#### Question 40

On a  $C_{mb} K_F = F_{mc}$  et  $\dot{y}_c = v_c$  donc  $M_{eq} \dot{v}_c + f_{eq} v_c = F_{mc} - F_{rc}$

Après passage dans le domaine de Laplace (CI nulles) :

$$M_{eq} p V_c(p) + f_{eq} V_c(p) = F_{mc}(p) - F_{rc}(p)$$

$$V_c(p) = \frac{1}{f_{eq} + M_{eq} p} [F_{mc}(p) - F_{rc}(p)] = T_b(p) [F_{mc}(p) - F_{rc}(p)]$$

avec 
$$T_b(p) = \frac{1}{f_{eq} + M_{eq} p} = \frac{\frac{1}{f_{eq}}}{1 + \frac{M_{eq}}{f_{eq}} p} = \frac{g_b}{1 + \tau_b p}$$

où 
$$g_b = \frac{1}{f_{eq}}$$
 et 
$$\tau_b = \frac{M_{eq}}{f_{eq}}$$

#### Question 41

$$I_{MCC\_avg} = \frac{C_{mb\_avg}}{k_t}$$

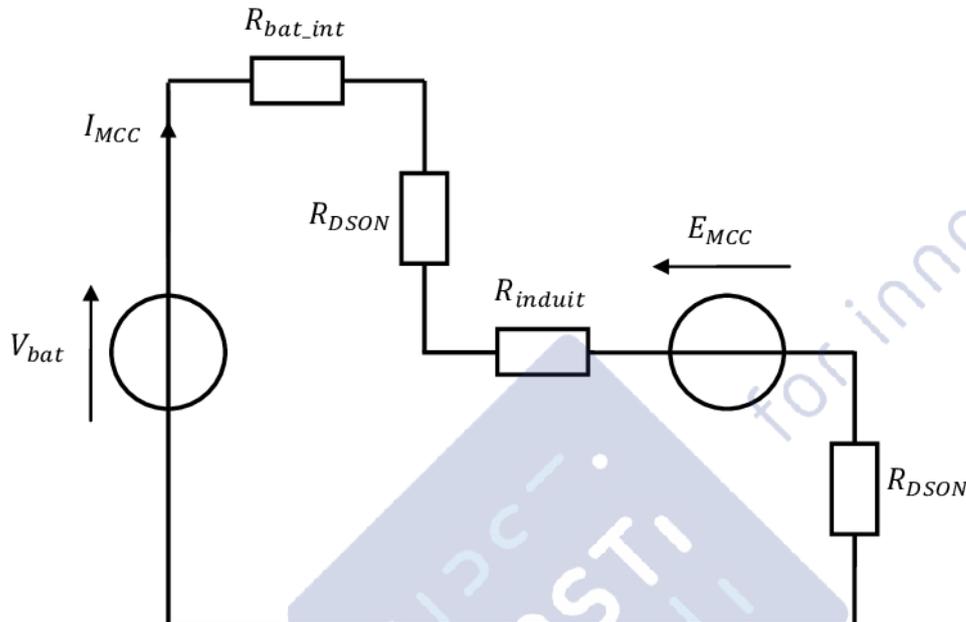
$C_{mb\_avg} = 1,25 \text{ N.m}$  est obtenu lors du braquage pour  $F_{mc} = 2500 \text{ N}$ , donc pour cette valeur :

$$I_{MCC\_avg} = \frac{1,25}{0,01} = 125 \text{ A}$$

### Question 42

Le courant maximal  $I_{MCC\_max}$  s'obtient pour un rapport cyclique  $\alpha_c$  maximal soit  $\alpha_c = 1$ .

Pour cette valeur, les transistors MOS1 et MOS4 sont commandés en permanence et le schéma électrique équivalent est le suivant, en régime établi :



$$\text{Loi des mailles : } V_{bat} - R_{bat\_int}I_{MCC} - R_{DSON}I_{MCC} - R_{induit}I_{MCC} - E_{MCC} - R_{DSON}I_{MCC} = 0$$

$$\text{avec } I_{MCC} = I_{MCC\_max} \text{ et } E_{MCC} = k_t\omega_{mb\_avg}$$

$$I_{MCC\_max} = \frac{V_{bat} - k_t\omega_{mb\_avg}}{R_{bat\_int} + R_{induit} + 2R_{DSON}}$$

Application numérique :

$$I_{MCC\_max} = \frac{12 - 0,01.480}{(20 + 15 + 2 \times 7,5) \cdot 10^{-3}} = 144 \text{ A}$$

Ce courant de 144 A est supérieur aux 125 A nécessaires pour vérifier les critères 1 et 2.

D'autre part, ce courant de 144 A est inférieur au courant nominal du moteur (150 A), au calibre du variateur (150 A) et au courant de court-circuit batterie (600 A).

L'équipement constitué de la batterie, du variateur et de la MCC est donc compatible avec les critères 1 et 2 du cahier des charges.

### Question 43

$$t \in [0, \alpha_c T[ : V_{MCC} = V_{bat}$$

$$t \in [\alpha_c T, T[ : V_{MCC} = -V_{bat}$$

$$V_{MCC\_max} = \frac{1}{T} \int_0^T V_{MCC} dt = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{\alpha_c T} V_{bat} dt + \int_{\alpha_c T}^T (-V_{bat}) dt \right]$$

$$V_{MCC\_max} = \frac{1}{T} \alpha_C T V_{bat} - \frac{1}{T} (T - \alpha_C T) V_{bat} = (2\alpha_C - 1) V_{bat}$$

$$\boxed{V_{MCC\_max} = (2\alpha_C - 1) V_{bat}}$$

$$t \in [0, \alpha_C T[ \quad V_{bat} = E_{MCC} + L \frac{dI_{MCC}}{dt} \quad \text{donc} \quad \frac{dI_{MCC}}{dt} = \frac{V_{bat} - E_{MCC}}{L}$$

En intégrant et après avoir déterminé la constante d'intégration pour  $t = 0$  :

$$I_{MCC}(t) = \frac{V_{bat} - E_{MCC}}{L} t + I_{mini}$$

$$I_{MCC}(\alpha_C T) = I_{max} = \frac{V_{bat} - E_{MCC}}{L} \alpha_C T + I_{mini}$$

$$\Delta I_{MCC} = I_{max} - I_{mini} = \frac{V_{bat} - E_{MCC}}{L} \alpha_C T$$

Or  $E_{MCC} = V_{MCC\_max} = (2\alpha_C - 1) V_{bat}$

$$\Delta I_{MCC} = \frac{V_{bat} - (2\alpha_C - 1) V_{bat}}{L} \alpha_C T = \frac{2(1 - \alpha_C) V_{bat}}{L} \alpha_C T = \frac{2V_{bat} T}{L} \alpha_C (1 - \alpha_C)$$

Avec  $T = 1/f$  :  $\boxed{\Delta I_{MCC} = \frac{2V_{bat}}{Lf} \alpha_C (1 - \alpha_C)}$

L'ondulation de courant maximale  $\Delta I_{MCC\_max}$  s'obtient pour  $\alpha_C = 0,5$ .

$$\boxed{\Delta I_{MCC\_max} = \frac{2V_{bat}}{Lf} 0,5(1 - 0,5) = \frac{V_{bat}}{2Lf}}$$

#### Question 44

$C_{mb\_avg} = 1,25$  N.m est obtenu lors du braquage pour  $F_{mc} = 2500$  N :

$$\frac{F_{mc}}{C_{mb\_avg}} = \frac{2500}{1,25} = 2000 \text{ m}^{-1}$$

Cette grandeur, correspond au coefficient  $K_F$  déterminé question 37, et correspond bien à la valeur de  $K_F$  donnée dans la suite du sujet.

$$\Delta F_{mc} = 2000 \Delta C_{mb} = 2000 k_t \Delta I_{MCC} = 2000 k_t \frac{2V_{bat}}{Lf} \alpha_C (1 - \alpha_C)$$

$$\boxed{\Delta F_{mc\_max} = 2000 k_t \Delta I_{MCC\_max} = 2000 k_t \frac{V_{bat}}{2Lf}}$$

Application numérique :  $\boxed{\Delta F_{mc\_max} = 2000 \times 0,01 \cdot \frac{12}{2 \times 500 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^3} = 24 \text{ N}}$

Le critère 3 du cahier des charges indique un  $\Delta F_{mc\_max}$  de  $25 \text{ N} > 24 \text{ N}$  : le critère est validé.

### Question 45

$$K_r(p) = KP + \frac{KI}{p} + \frac{KD \cdot p}{1 + \tau_f p} = \frac{Kp(1 + \tau_f p) + KI(1 + \tau_f p) + KDp^2}{p(1 + \tau_f p)}$$

$$K_r(p) = \frac{KI \left[ 1 + \left( \tau_f + \frac{KP}{KI} \right) p + \left( \frac{KP}{KI} \tau_f + \frac{KD}{KI} \right) p^2 \right]}{p(1 + \tau_f p)} = KI \left[ \frac{1 + c_1 p + c_2 p^2}{p(1 + \tau_f p)} \right]$$

avec :  $\boxed{c_1 = \tau_f + \frac{KP}{KI} = \tau_f + \tau_i}$  et  $\boxed{c_2 = \frac{KP}{KI} \tau_f + \frac{KD}{KI} = \tau_i \tau_f + \frac{KD}{KI}}$

### Question 46

$$FTBO_b(p) = K_r(p) \frac{K}{1 + \frac{2\xi_0}{\omega_{n0}} p + \frac{1}{\omega_{n0}^2} p^2} = \frac{K \cdot KI}{p(1 + \tau_f p)} \frac{1 + c_1 p + c_2 p^2}{1 + \frac{2\xi_0}{\omega_{n0}} p + \frac{1}{\omega_{n0}^2} p^2}$$

Pour compenser le terme

$$\frac{1}{1 + \frac{2\xi_0}{\omega_{n0}} p + \frac{1}{\omega_{n0}^2} p^2}$$

on prend  $c_1 = \frac{2\xi_0}{\omega_{n0}}$  et  $c_2 = \frac{1}{\omega_{n0}^2}$

Soit :  $\tau_f + \tau_i = \frac{2\xi_0}{\omega_{n0}}$  et  $\tau_i \tau_f + \frac{KD}{KI} = \frac{1}{\omega_{n0}^2}$

Donc :  $\boxed{\tau_i = \frac{2\xi_0}{\omega_{n0}} - \tau_f}$  et  $\boxed{KD = KI \left( \frac{1}{\omega_{n0}^2} - \tau_i \tau_f \right) = KI \left( \frac{1}{\omega_{n0}^2} - \frac{2\xi_0}{\omega_{n0}} \tau_f + \tau_f^2 \right)}$

On a alors :

$$\boxed{FTBO_b(p) = \frac{K \cdot KI}{p(1 + \tau_f p)}}$$

### Question 47

Système à retour unitaire :  $FTBF_b(p) = \frac{FTBO_b(p)}{1 + FTBO_b(p)} = \frac{\frac{K \cdot KI}{p(1 + \tau_f p)}}{1 + \frac{K \cdot KI}{p(1 + \tau_f p)}}$

$$\boxed{FTBF_b(p) = \frac{K \cdot KI}{K \cdot KI + p + \tau_f p^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K \cdot KI} p + \frac{\tau_f}{K \cdot KI} p^2}}$$

Cette fonction de transfert est du 2<sup>nd</sup> ordre, et peut se mettre sous la forme canonique :

$$FTBF_b(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} \quad \text{avec} \quad \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{K \cdot KI} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{\tau_f}{K \cdot KI}$$

$$\text{Soit : } \omega_n = \sqrt{\frac{K \cdot KI}{\tau_f}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\omega_n}{2} \frac{1}{K \cdot KI} = \frac{1}{2K \cdot KI} \sqrt{\frac{K \cdot KI}{\tau_f}} = \frac{1}{2\sqrt{K \cdot KI \cdot \tau_f}}$$

Soit  $T_{r5\%}$  le temps de réponse à 5% du système. Pour un système du second ordre le produit  $T_{r5\%} \cdot \omega_n$  est minimal pour  $\xi = 0,69$ .

$$\text{Soit : } 0,69 = \frac{1}{2\sqrt{K \cdot KI \cdot \tau_f}} \quad \text{d'où} \quad KI = \frac{1}{(2 \times 0,69)^2 \cdot K \cdot \tau_f}$$

$$\text{En prenant } 0,69^2 \approx 0,5 : \quad KI = \frac{1}{4 \times 0,5 \times 10^{-1} \times 0,01} = 500 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Le temps de réponse vaut alors : } T_{r5\%} = \frac{3}{\omega_n} = 3 \sqrt{\frac{\tau_f}{K \cdot KI}}$$

$$\text{Application numérique : } T_{r5\%} = 3 \sqrt{\frac{0,01}{10^{-1} \times 500}} = 3 \sqrt{\frac{0,01}{50}} = \frac{0,3}{\sqrt{50}} \approx \frac{0,3}{7} \approx 0,042 \text{ s}$$

$$\text{Le temps de poursuite vaut : } \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{K \cdot KI} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{10^{-1} \times 500} = 0,020 \text{ s}$$

#### Question 48

$$FTBO_b(p) = \frac{K \cdot KI}{p(1 + \tau_f p)} \quad \text{soit} \quad FTBO_b(j\omega) = \frac{K \cdot KI}{j\omega(1 + \tau_f j\omega)}$$

La pulsation  $\omega_{0dB}$  de coupure à 0 dB s'obtient pour  $|K \cdot KI| = |j\omega_{0dB}(1 + \tau_f j\omega_{0dB})|$  soit :

$$K \cdot KI = \omega_{0dB} \sqrt{1 + (\tau_f \omega_{0dB})^2} \Leftrightarrow K^2 \cdot KI^2 = \omega_{0dB}^2 (1 + \tau_f^2 \omega_{0dB}^2) = \omega_{0dB}^2 + \tau_f^2 \omega_{0dB}^4$$

Avec  $K \cdot KI = 10^{-1} \times 500 = 50$  et  $\tau_f = 0,01$  puis en posant  $X = \omega_{0dB}^2$ , on obtient une équation du second degré :  $0,01^2 X^2 + X - 50^2 = 0$  soit  $X^2 + 10^4 X - 2500 \cdot 10^4 = 0$ .

$$\Delta = (10^4)^2 + 4 \cdot 2500 \cdot 10^4 = 10^8 + 10^4 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^8$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$X_{1,2} = \frac{-10^4 \pm \sqrt{2 \cdot 10^8}}{2} = \frac{-10^4 \pm 10^4 \sqrt{2}}{2} = 5000(-1 \pm \sqrt{2})$$

On ne garde que la solution positive  $5000(-1 + \sqrt{2})$  et donc :

$$\omega_{0dB} = \sqrt{5000(-1 + \sqrt{2})} = \sqrt{\frac{10^4}{2}(\sqrt{2} - 1)} \approx 100 \sqrt{\frac{0,414}{2}} \approx 100 \sqrt{0,207} \approx 100 \times 0,45$$

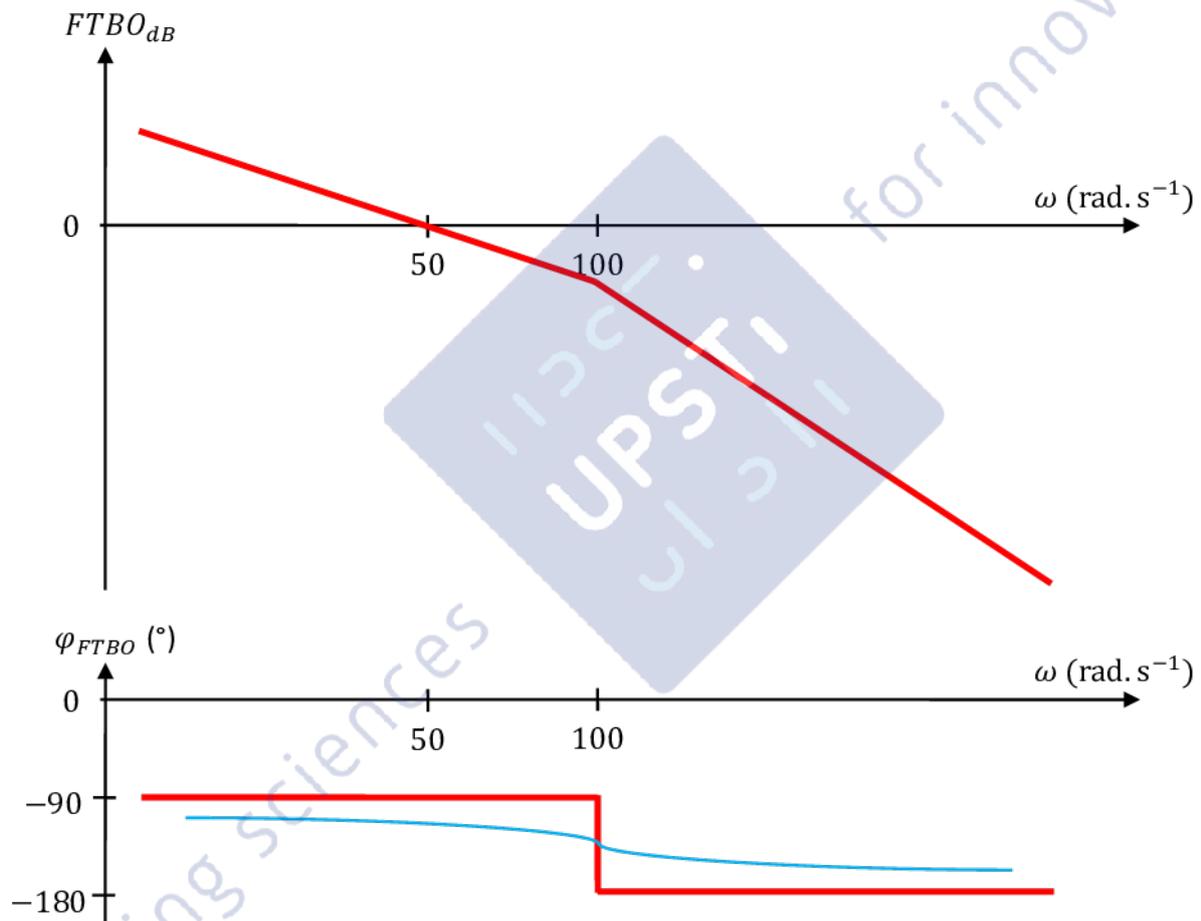
Et finalement  $\omega_{0dB} \approx 45 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Remarque : on peut aussi tracer le diagramme de Bode de :

$$FTBO_b(j\omega) = \frac{50}{j\omega(1 + 0,01j\omega)} = \frac{50}{j\omega} \cdot \frac{1}{(1 + 0,01j\omega)}$$

On a une cassure pour  $\omega_c = 1/\tau_f = 1/0,01 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ . L'intégrateur  $50/j\omega$  coupe l'axe des abscisses pour  $\omega = 50 \text{ rad.s}^{-1} < \omega_c$ . On obtient donc pour le tracé asymptotique  $\omega_{0dB-ass} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$ , valeur proche de  $\omega_{0dB}$ .

La courbe de phase est décroissante entre  $-90^\circ$  et  $-180^\circ$ , et passe par le point  $(100; -135^\circ)$ .

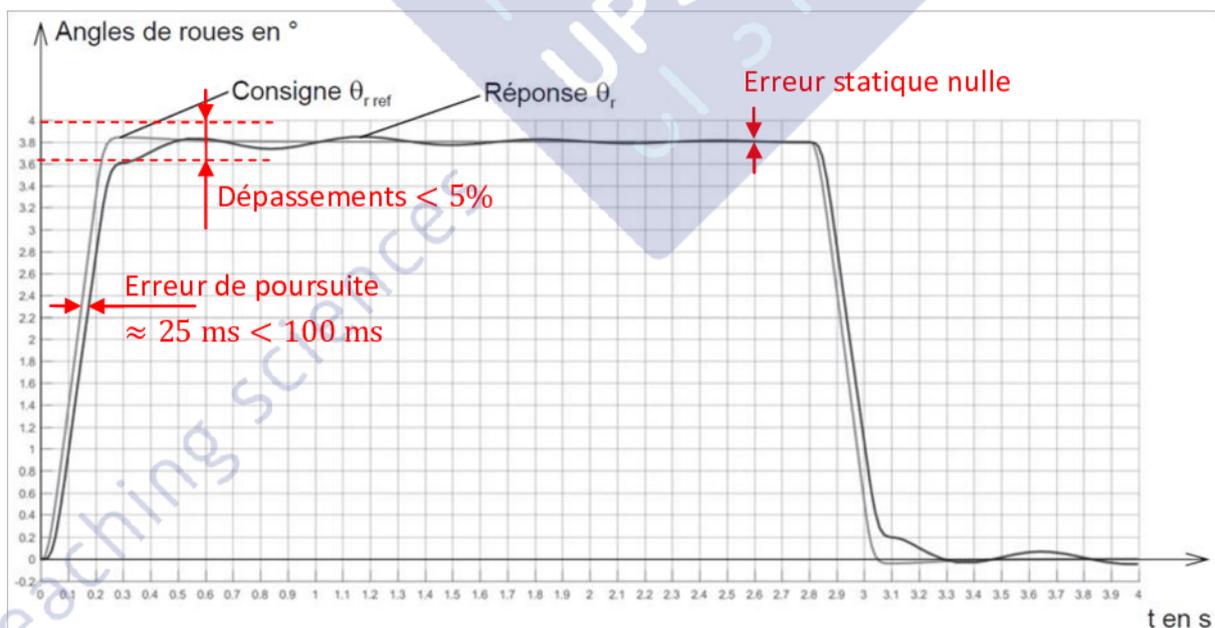


On peut alors vérifier chaque critère de l'exigence Id 1-1.1 :

• Critère 1 :	$\omega_{0dB} \approx 45 \text{ rad. s}^{-1} > 30 \text{ rad. s}^{-1}$	validé
• Critère 2 :	$T_{r5\%} \approx 42 \text{ ms} < 80 \text{ ms}$	validé
• Critère 3 :	retard de poursuite (ou de trainage) : $20 \text{ ms} < 100 \text{ ms}$	validé
• Critère 4 :	$FTBO_b$ est de classe 1 $\Rightarrow$ erreur statique nulle	validé
• Critère 5 :	$FTBO_b$ est d'ordre 2 $\Rightarrow$ marge de gain infinie $> 20 \text{ dB}$ $\omega_c = \frac{1}{\tau_f} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ rad. s}^{-1} > \omega_{0dB}$ et la courbe de phase est décroissante : la phase pour $\omega_{0dB}$ est alors supérieure à $-135^\circ$ donc la marge de phase $> 45^\circ$	validés
• Critère 6 :	On a choisi $\xi = 0,69$ pour optimiser le temps de réponse, donc afin que la réponse à un échelon ne dépasse la valeur finale de plus de 5% : le dépassement est donc de 5% maxi	validé

#### Question 49

On évalue les performances temporelles :



Les critères temporels du cahier des charges sont validés en simulation et correspondent à la modélisation effectuée : la faisabilité d'une direction découplée est validée.