

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2021

Filière : TSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Train grande vitesse de 4^{ème} génération : l'AGV

Corrigé UPSTI

I - Vérification des performances de l'AGV

I.1 - Vérification des performances de l'AGV au démarrage

Objectif : vérifier le bon dimensionnement de la motorisation de l'AGV au démarrage.

I.1.a - Validation de la capacité moteur en mode démarrage normal et dégradé

Objectif : déterminer le couple à fournir par chaque moteur au démarrage dans les conditions décrites dans l'exigence référencée id = "1.1.2.1".

Question 1 Isoler l'AGV, effectuer le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures et appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique. Écrire les expressions littérales de la totalité des efforts de traction F_t et F_{tp} appliquées aux roues motrices nécessaires au démarrage, respectivement sur le plat et pour une rampe de 2,1 % en fonction des données d'entrée du **tableau 1**. En déduire les valeurs numériques des efforts à produire par essieu moteur (somme des efforts au niveau des roues) notées respectivement F_{je} et F_{jpe} dans les conditions du cahier des charges.

L'AGV est soumis à trois actions mécaniques extérieures :

- son poids, de résultante $\vec{P} = M_t \vec{g} = -M_t g \vec{z}_0$;
- la réaction des rails, de résultante $\vec{R} = R \vec{z}$;
- l'effort de traction, de résultante $\vec{F}_t = F_t \vec{x}$;
- l'effort résistant à l'avancement, de résultante $\vec{F}_{rav} = -(A + Bv + Cv^2) \vec{x}$.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique en résultante, on obtient :

$$-M_t g \vec{z}_0 + R \vec{z} + F_t \vec{x} - (A + Bv + Cv^2) \vec{x} = M_t a \vec{x}$$

D'où, en projetant cette équation sur $\vec{x}$:

$$\begin{aligned} -M_t g \sin(\alpha) + F_t - (A + Bv + Cv^2) &= M_t a \\ \text{donc } F_t &= M_t a + M_t g \sin(\alpha) + A + Bv + Cv^2 \end{aligned}$$

Par définition de la pente, $p = \tan(\alpha)$. Or, celle-ci est très faible, donc $p = \tan(\alpha) \approx \alpha \approx \sin(\alpha)$. D'où finalement :

$$\text{Démarrage sur le plat : } F_t = M_t a + A + Bv + Cv^2 = 227 \text{ kN}$$

$$\text{Démarrage en rampe : } F_{tp} = M_t a_p + M_t g p + A + Bv + Cv^2 = 156 \text{ kN}$$

En gardant à l'esprit que deux bogies moteurs sont inopérants en fonctionnement dégradé, et en supposant que l'effort de traction est équiréparti entre tous les essieux, on obtient donc :

$$F_j = \frac{F_t}{N_{bm} \cdot N_{es/b}} = 23 \text{ kN}$$

$$F_{jp} = \frac{F_{tp}}{(N_{bm} - 2) \cdot N_{es/b}} = 26 \text{ kN}$$

Question 2 À l'aide de la figure 6 et du tableau 2, calculer les couples moteurs C_m et C_{mp} à fournir respectivement sur le plat et pour une rampe de 2,1 % au démarrage.

Par définition du rendement :

$$\eta_r = \frac{P_{roue}}{P_m} = \frac{C_{roue} \Omega_{roue}}{C_m \Omega_m} = \frac{C_{roue}}{C_m} \frac{1}{k_g}$$

D'où :

$$C_m = \frac{1}{\eta_r k_g} C_{roue} = \frac{1}{\eta_r k_g} F_j \frac{D_{roue}}{2} = \frac{F_j D_{roue}}{2 \eta_r k_g}$$

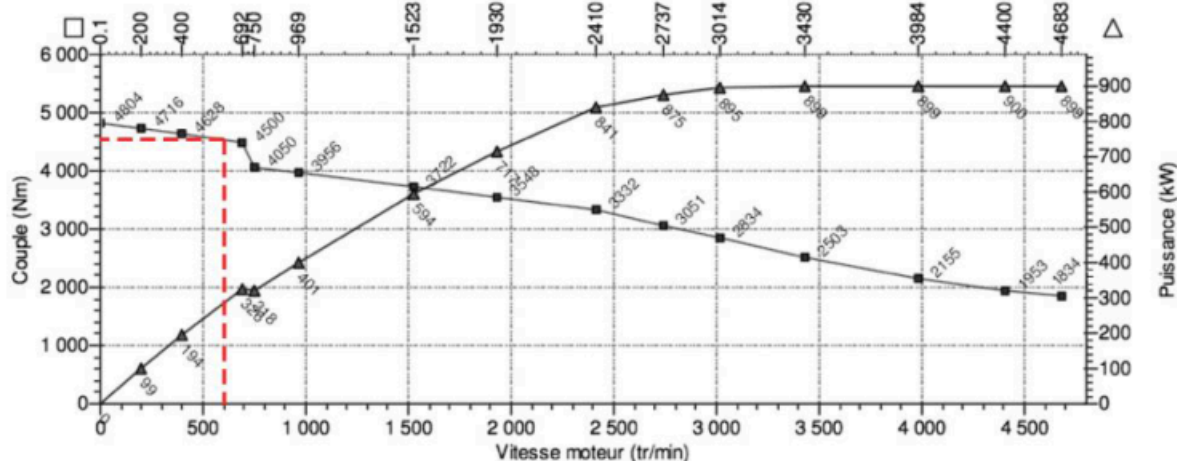
On en déduit numériquement :

$$C_m = 4,1 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad C_{mp} = 4,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Question 3 En exploitant les courbes de la figure 7, conclure quant à la capacité des moteurs à fournir les couples nécessaires pour atteindre la vitesse v de $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

On constate sur la figure 7 que le couple moteur décroît lorsque la vitesse augmente. En supposant que l'effort de traction reste constant tout au long de l'accélération de l'AGV, la situation est donc la plus défavorable lorsque le train atteint la vitesse $v = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. À cette vitesse, en prenant garde aux unités, le moteur tourne à la vitesse :

$$\Omega_m = k_g \Omega_{roue} = \frac{2k_g v}{D_{roue}} = 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{donc} \quad N_m = 6.0 \cdot 10^2 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$



Les moteurs peuvent alors fournir un couple d'environ $C_{m,max} \approx 4,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$. On a donc :

$$C_m < C_{m,max} < C_{mp}$$

Les moteurs sont donc bien dimensionnés en couple pour un démarrage normal, mais légèrement insuffisants en démarrage dégradé en rampe.

I.1.b - Vérification de la condition d'adhérence au démarrage

Objectif : vérifier si l'effort à fournir au démarrage en mode normal peut se transmettre sans perte d'adhérence.

Question 4 Par application du Principe Fondamental de la Dynamique au train isolé, écrire en fonction des données d'entrée décrites dans le **tableau 1**, l'expression littérale de l'effort normal du rail sur une roue, noté : $\overrightarrow{F_{n_{rail/roue}}}$ représenté en **figure 8**.

Le principe fondamental de la dynamique écrit à la question 1 reste valable :

$$-M_t g \vec{z}_0 + R \vec{z} + F_t \vec{x} - (A + Bv + Cv^2) \vec{x} = M_t a \vec{x}$$

Cependant, la masse de l'AGV étant équirépartie entre tous les essieux, avec deux roues par essieu, on peut lui rajouter l'équation :

$$R = 2N_{bt} N_{es/b} F_{n_{rail/roue}}$$

D'où, en projetant l'équation sur $\vec{z} = \vec{z}_0$ (démarrage à plat), on obtient :

$$-M_t g + 2N_{bt} N_{es/b} F_{n_{rail/roue}} = 0$$

D'où :

$$\overrightarrow{F_{n_{rail/roue}}} = \frac{M_t g}{2N_{bt} N_{es/b}} \vec{z}$$

Question 5 En vous aidant de vos réponses aux questions Q1 et Q4, déterminer la valeur de μ , coefficient de frottement au niveau du contact roue-rail. Conclure quant à la capacité de l'AGV à respecter l'adhérence limite lors de la phase de démarrage.

En supposant que l'effort de traction est équiréparti entre les deux roues d'un même essieu, on a donc :

$$F_{t_{rail/roue}} = \frac{F_j}{2}$$

D'où, à la limite du glissement :

$$\mu = \tan(\varphi) = \frac{F_{t_{rail/roue}}}{F_{n_{rail/roue}}} = \frac{F_j N_{bt} N_{es/b}}{M_t g} = 0.13$$

On a bien $\mu < \mu_{max}$: l'AGV respecte donc l'adhérence limite lors de la phase de démarrage en mode normal.

I.2 - Vérification des performances de l'AGV à vitesse maximale

Objectif : montrer que la chaîne de traction permet à l'AGV d'assurer sa mission sur le secteur où le train est à sa vitesse maximale sur le plat.

I.2.a - Détermination de la puissance moteur pour le point de fonctionnement considéré

Objectif : calculer la puissance nécessaire aux roues (contact roue-rail) pour atteindre la vitesse maximale v_{max} de $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur le plat avec l'accélération résiduelle de $0,08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et vérifier que la motorisation de l'AGV est en capacité de tenir cette contrainte

Question 6 Déterminer la puissance de traction totale P_T à fournir aux roues des essieux motorisés et en déduire la puissance de traction par essieu moteur P_{TEM} .

La puissance de traction totale à fournir aux roues est :

$$P_T = F_T \cdot v = (F_{rav} + M_t a_{res})v$$

Cette puissance est maximale à v_{max} , avec $F_{rav} = A + B v_{max} + C v_{max}^2 = 57 \text{ kN}$. D'où :

$$P_T = (F_{rav} + M_t a_{res})v_{max} = 7,6 \text{ MW}$$

Par conséquent :

$$P_{TEM} = \frac{P_T}{N_{bt} N_{es/b}} = 7,6 \cdot 10^2 \text{ kW}$$

Question 7 En déduire alors le couple moteur C_m nécessaire et conclure quant à la possibilité du moteur à pouvoir fournir le couple et la puissance P_m au regard des courbes données à la figure 7.

À une vitesse $v = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, en prenant garde aux unités, le moteur tourne à la vitesse :

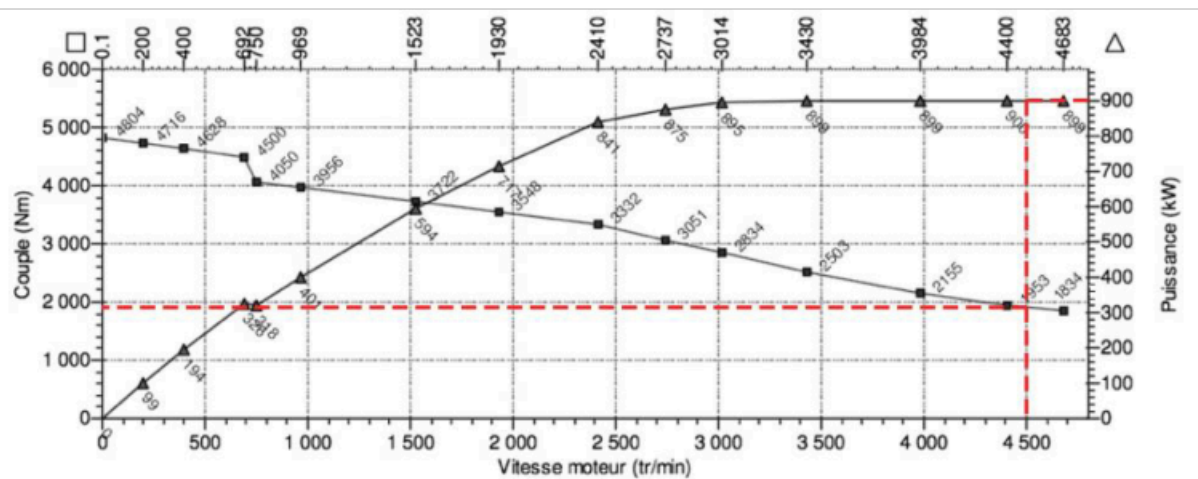
$$\Omega_m = k_g \Omega_{roue} = \frac{2k_g v}{D_{roue}} = 4,7 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{donc} \quad N_m = 4,5 \cdot 10^3 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

On a dès lors :

$$P_m = \frac{P_{TEM}}{\eta_r} = 7,9 \cdot 10^2 \text{ kW}$$

$$C_m = \frac{P_m}{\Omega_m} = 1,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

D'après la figure 7, à cette vitesse, $P_{m,max} \approx 900 \text{ kW}$ et $C_{m,max} \approx 1,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Les moteurs sont donc bien capables de fournir le couple et la puissance nécessaires à ce point de fonctionnement.

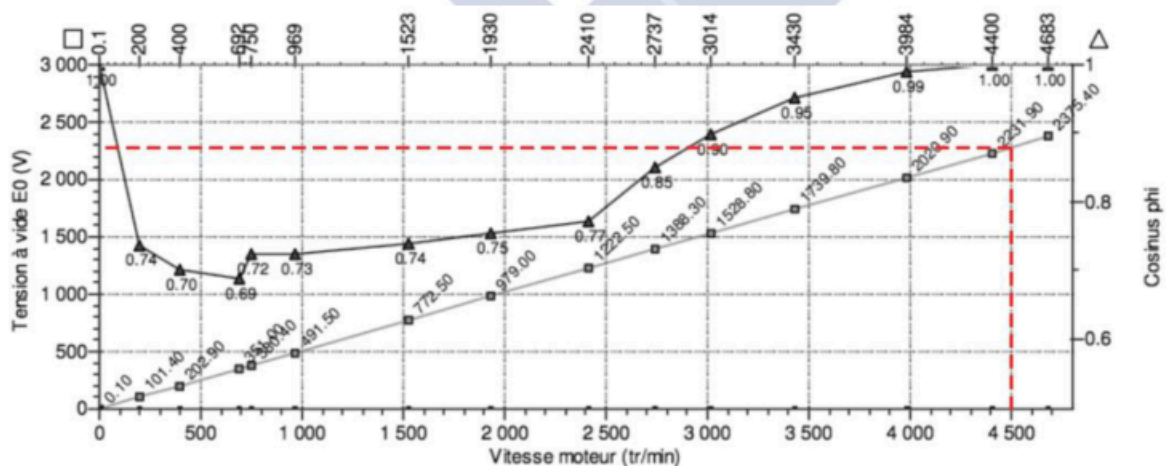


1.2.b - Calcul de la valeur efficace du courant dans une phase du moteur

Objectif : évaluer la valeur efficace I_s du courant $i_{s1}(t)$ dans une phase d'un des moteurs de traction au point de fonctionnement considéré et vérifier qu'il est bien inférieur au courant de démarrage.

Question 8 En exploitant la figure 11, donner la valeur efficace E_v de la f.é.m. pour la vitesse du train roulant à v_{max} de $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Après avoir écrit la relation $e_{v1}(t) = \frac{d\phi_r(t)}{dt}$ en complexe et y avoir introduit le nombre de paires de pôles p , en déduire la valeur efficace du flux ϕ_r .

Comme déterminé à la question précédente, pour $v = v_{max} = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $N_m = 4,5 \cdot 10^3 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. On en déduit avec la figure 11 que $E_v = 2,3 \text{ kV}$.



Par ailleurs, l'équation $e_{v1}(t) = \frac{d\phi_r(t)}{dt}$ devient en notation complexe :

$$\underline{E_{v1}} = j\omega \underline{\phi_r} = jp\Omega_m \underline{\phi_r}$$

D'où :

$$\phi_r = |\phi_r| = \left| \frac{\underline{E_{v1}} p}{j\Omega_m} \right| = \frac{E_v p}{\Omega_m} = 0.81 \text{ Wb}$$

Question 9 Après analyse des caractéristiques « moteur » du constructeur représentées dans la figure 12, donner et justifier le choix de la stratégie de pilotage (1 ou 2) à $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

On constate sur la figure 12 qu'à la vitesse $v = v_{\max} = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et donc $N_m = 4,5 \cdot 10^3 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, on a $V_s = V_{s\max} = 1\,605 \text{ V}$. Il faut donc choisir la stratégie de pilotage 2.

Question 10 Dédurre de la Q9, la valeur de δ_c pour obtenir le couple $C_{emc} = 1\,655 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Avec ce choix de stratégie de pilotage, on a :

$$C_{emc} = 3 \frac{V_{s\max} \phi_r}{\Omega_m L_s} \sin(\delta_c)$$

Donc :

$$\delta_c = \text{Arcsin} \left(\frac{C_{emc} \Omega_m L_s}{3 V_{s\max} \phi_r} \right) = 35^\circ$$

Question 11 Exprimer littéralement la loi des mailles complexe dans le modèle monophasé proposé sur la figure 10. Rappel : on négligera la chute de tension $R_s I_{s1}$.

En négligeant la chute de tension aux bornes de la résistance, on a :

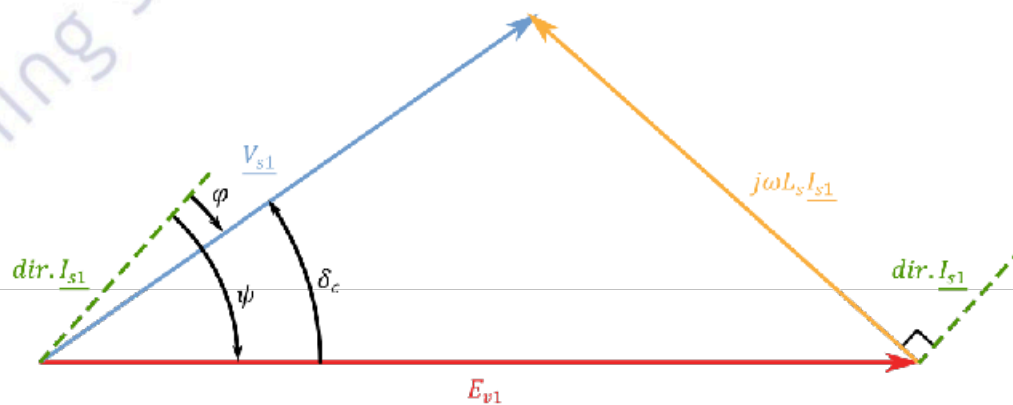
$$\underline{V_{s1}} = j\omega_s L_s \underline{I_{s1}} + \underline{E_{v1}}$$

Question 12 En tenant compte des hypothèses de travail et en choisissant $\underline{E_{v1}}$ comme référence des phases, construire le diagramme vectoriel associé à la loi des mailles en prenant une échelle correspondant à 5 cm pour $1\,000 \text{ V}$. Placer alors $\underline{V_{s1}}$ en vous aidant de la Q10, puis $j \cdot X_s \cdot \underline{I_{s1}}$ et faire apparaître alors les différents angles ψ , δ et φ .

On place, dans l'ordre :

- $\underline{E_{v1}}$, à l'horizontal (référence des phases) avec une longueur de $11,5 \text{ cm}$ correspondant à $2\,300 \text{ V}$;
- $\underline{V_{s1}}$, formant un angle $\delta_c = 35^\circ$ avec $\underline{E_{v1}}$ et ayant une longueur de 8 cm correspondant à $1\,605 \text{ V}$;
- $j\omega_s L_s \underline{I_{s1}}$, complétant le triangle de sorte à respecter la loi des mailles établis précédemment ;
- la direction de $\underline{I_{s1}}$, en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur $j\omega_s L_s \underline{I_{s1}}$.

On peut alors faire apparaître les différents angles caractéristiques du problème.



Question 13 À partir du diagramme vectoriel précédemment établi, mesurer la chute de tension $L_s \omega I_s$. En déduire la valeur efficace I_s du courant dans une phase du stator du moteur. La comparer alors à la valeur efficace maximale admissible par le moteur obtenue au démarrage.

On mesure sur le diagramme vectoriel précédent une longueur de 6,8 cm pour le vecteur représentant $j\omega L_s I_{s1}$. Par conséquent :

$$L_s \omega I_s = 1,4 \text{ kV}$$

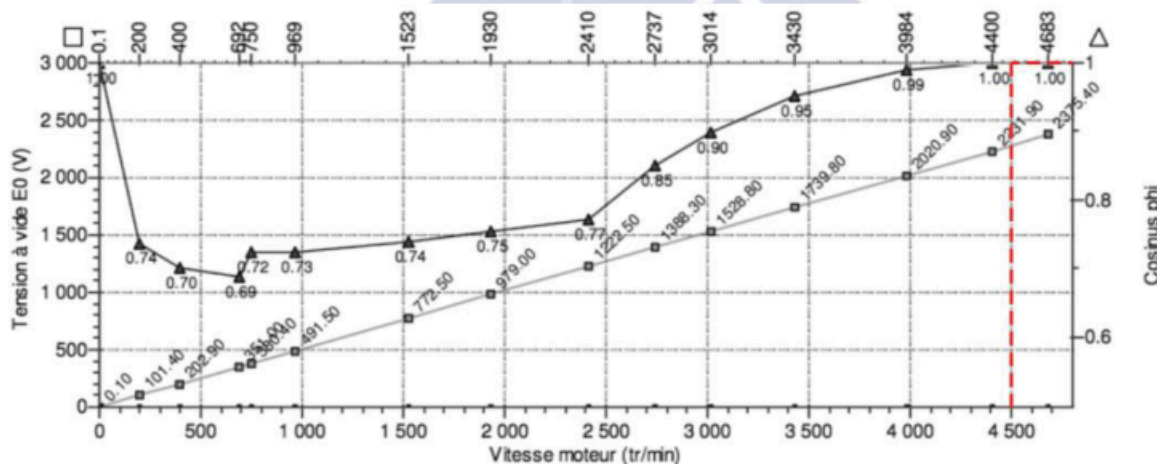
Donc :

$$I_s = \frac{(L_s \omega I_s)}{L_s \omega} = \frac{(L_s \omega I_s)}{L_s p \Omega_m} = 1,7 \cdot 10^2 \text{ A}$$

D'après la figure 12, au démarrage (lorsque $N_m = 0$), le moteur tolère une intensité $I_{s0} = 335 \text{ A}$. On a donc bien $I_s < I_{s0}$.

Question 14 À partir du diagramme vectoriel, déterminer le facteur de puissance $\cos(\varphi)$ au point de fonctionnement. Est-il conforme à celui donné sur la courbe constructeur de la figure 11 ?

On mesure sur le diagramme vectoriel $\varphi = -13^\circ$ et donc $\cos(\varphi) = 0,97$. Le résultat est très proche du $\cos(\varphi) = 1,00$ visible sur la figure 11.



I.2.c - Calcul de la valeur efficace du courant dans un transistor IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor) de l'onduleur et de sa tenue en tension

Objectif : vérifier que les IGBT de l'onduleur sont bien dimensionnés pour le point de fonctionnement considéré, c'est-à-dire pour le moteur fonctionnant à la vitesse maximale v_{max} de $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

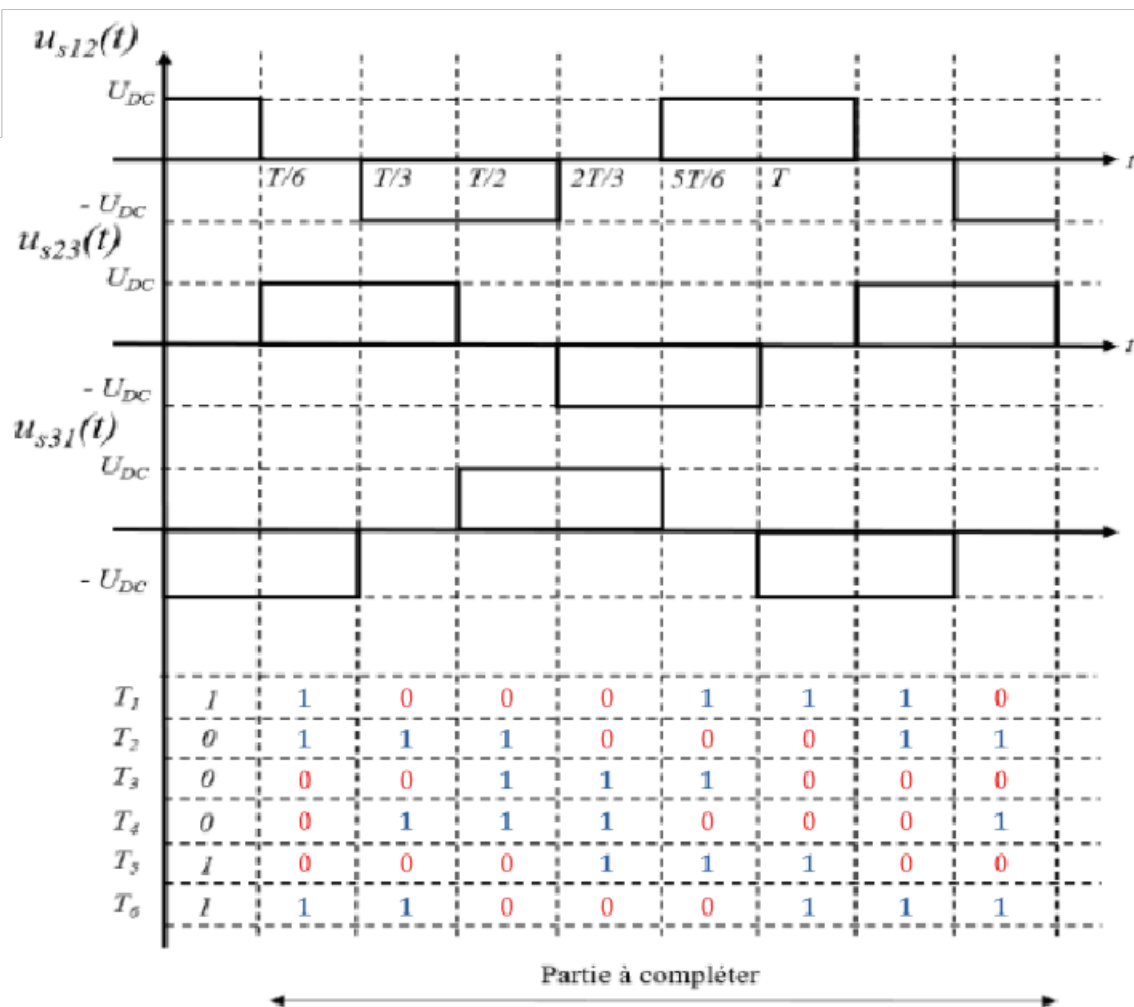
Question 15 À l'aide de la vitesse du rotor N_m et du nombre de paires de pôles p , donner la fréquence F_s des grandeurs électriques statoriques du moteur. En déduire parmi les stratégies de commande présentées sur la figure 13, celle utilisée pour le point de fonctionnement considéré.

Comme précédemment, à la vitesse $v = v_{max} = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, on a $N_m = 4,5 \cdot 10^3 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. D'où :

$$F_s = \frac{p N_m}{60} = 450 \text{ Hz}$$

D'après la figure 13, cette fréquence implique une commande pleine onde.

Question 16 En vous appuyant sur les figures 14 et 15, donner pour les 6 phases de fonctionnement sur une période T , la séquence d'ouverture et de fermeture des différents IGBT en complétant le chronogramme sur le Document Réponse DR1 par des « 0 » et des « 1 ».



Question 17 Quelle est la valeur de la tension $v_{CE}(t)$ aux bornes d'un IGBT lorsque ce dernier est bloqué ?

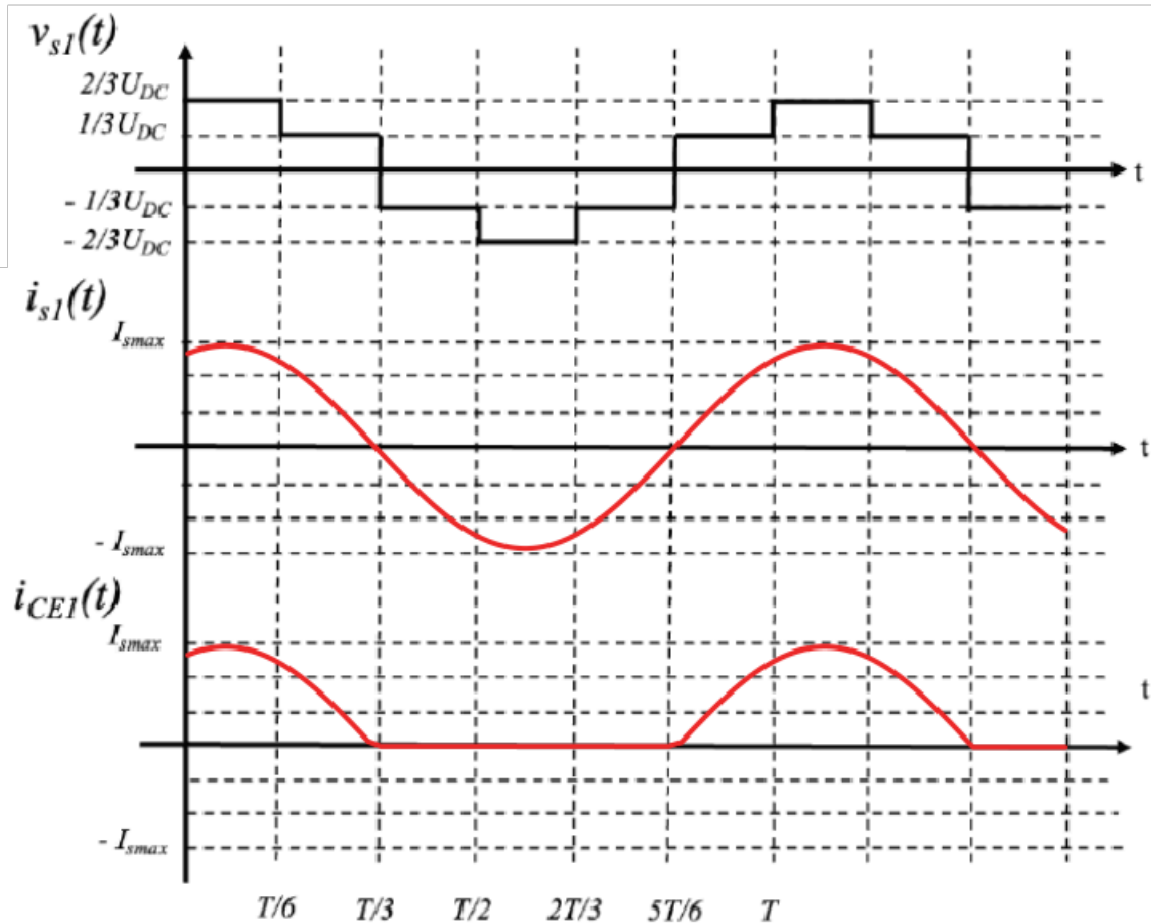
Les transistors d'une même branche sont commandés de façon complémentaire : lorsque l'un est passant, l'autre est bloqué. Par conséquent, lorsqu'un IGBT est bloqué, alors :

$$v_{CE}(t) = U_{DC}$$

Question 18 En prenant un facteur de puissance unitaire et en supposant le courant $i_{s1}(t)$ sinusoïdal de valeur efficace I_s trouvée à la Q13, tracer l'allure de ce dernier sur le DR2 en précisant la valeur de I_{smax} .

Le facteur de puissance étant unitaire, on a $\cos(\varphi) = 1$ et donc $\varphi = 0$: la tension et l'intensité sont en phase. Notons que :

$$I_{smax} = \sqrt{2}I_s = 2,4 \cdot 10^2 \text{ A}$$



Question 19 En vous aidant des résultats des Q16 et Q18, tracer sur ce DR2 l'allure du courant $i_{CE1}(t)$ dans le transistor T1. Calculer alors la valeur efficace I_{CE} du courant dans le transistor.

Il y a deux situations possibles :

- lorsque le transistor T_1 est bloqué, $i_{CE1}(t) = 0$;
- lorsque le transistor T_1 est passant, le transistor T_4 est alors bloqué et donc $i_{CE1}(t) = i_{s1}(t)$.

On remarque alors que le signal correspond à la partie positive d'un sinus. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 I_{CE} &= \sqrt{\langle i_{CE1}(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_{CE1}(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_{smax}^2 \sin^2(\omega t) dt} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_{smax}^2 \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt} \\
 &= \sqrt{\frac{I_{smax}^2}{2T} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^{T/2}} \\
 &= \sqrt{\frac{I_{smax}^2}{2T} \left(\frac{T}{2} - \frac{\sin(\omega T)}{2\omega} \right)}
 \end{aligned}$$

Or, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ donc $\omega T = 2\pi$. D'où :

$$I_{CE} = \frac{I_{smax}}{2} = \frac{I_s}{\sqrt{2}} = 1,2 \cdot 10^2 \text{ A}$$

Question 20 Conclure quant à la capacité de l'IGBT à tenir le point de fonctionnement étudié en termes de tension et de courant.

Les IGBT tolèrent une tension de $6,5 \text{ kV}$ supérieure à la tension maximale $V_{CE} = U_{DC} = 3\,600 \text{ V}$ déterminée à la question 17, et une intensité de 400 A supérieure à l'intensité maximale $I_{CE} = \frac{I_s}{\sqrt{2}} = 1,2 \cdot 10^2 \text{ A}$ déterminée à la question 19. Les IGBT sont donc capables de tenir le point de fonctionnement étudié.

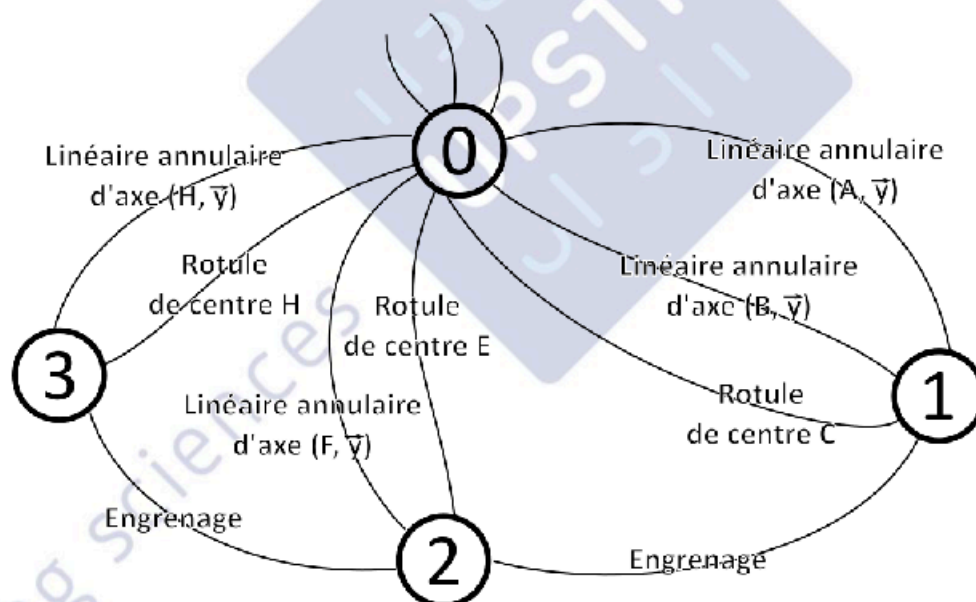
II - Étude du réducteur

Objectif : valider le choix du réducteur assurant la transmission de puissance du moteur à l'essieu au regard des éléments du cahier des charges.

II.1 - Modélisation de l'architecture du réducteur

Objectif : appréhender et justifier la modélisation proposée de l'architecture du réducteur et valider les choix effectués d'un point de vue cinématique.

Question 21 Réaliser le graphe des liaisons du modèle cinématique de l'architecture du réducteur sans détailler les éléments caractéristiques des liaisons en D et en G. Déterminer le degré d'hyperstatisme h de la boucle bâti (0) - arbre d'entrée (1) en détaillant les étapes de calcul. Justifier le recours à une solution technologique hyperstatique dans notre cas d'application.



La boucle entre le bâti et l'arbre d'entrée constitue une liaison pivot. Il n'y a donc qu'une seule mobilité possible : $m = 1$.

Elle est constituée de 2 liaisons linéaires annulaires (avec 2 inconnues statiques chacune) et d'une liaison rotule (avec 3 inconnues statiques). Le nombre d'inconnues statiques total est donc $I_s = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$.

On ne s'intéresse qu'à 2 pièces, dont le bâti, dans un problème spatial. On dispose donc de $E_s = 1 \cdot 6 = 6$ équations de la statique.

Par conséquent :

$$h = I_s - E_s + m = 2$$

Au vu des efforts importants que doit transmettre le réducteur, une solution hyperstatique qui augmente la rigidité de l'ensemble semble préférable à une solution isostatique.

Les efforts radiaux importants imposent des roulements à fortes capacités de charge, à rouleaux, qui sont peu adaptés aux charges axiales. Un roulement à quatre points de contact est ajouté pour encaisser les efforts axiaux créés par les dentures hélicoïdales. Notons que sur l'arbre intermédiaire, les efforts axiaux se compensent et les roulements à rouleaux suffisent. Sur l'arbre de sortie des roulements à rouleaux coniques montés en X sont prévus pour encaisser les charges axiales.

Question 22 Donner l'expression du rapport de réduction du réducteur $k_g = \frac{N_{mot}}{N_{essieu}}$, rapport des vitesses de rotation de l'arbre moteur et de l'essieu exprimées en $tr \cdot min^{-1}$, en fonction du nombre de dents des arbres du réducteur, puis calculer sa valeur. Calculer alors la vitesse du train théorique $V_{max th}$ correspondant au régime moteur maximal $N_{mot max}$ sur la figure 7 dans le cas de roues mises tel qu'indiqué dans le tableau 2 et la comparer à la vitesse d'exploitation à atteindre $v_{v_{max}}$ de $300 km \cdot h^{-1}$ sur le parcours, puis conclure.

Le rapport de réduction est :

$$k_g = (-1)^{\text{nombre contacts extérieurs}} \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}} = (-1)^2 \frac{Z_3 Z_2}{Z_2 Z_1} = \frac{Z_3}{Z_1} = 2,522$$

On retrouve bien la valeur fournie dans le tableau 2. Or, la figure 7 indique la valeur de $N_{mot max} = 4\,683 tr \cdot min^{-1}$ et donc $\Omega_{mot max} = 490 rad \cdot s^{-1}$. On a alors :

$$v_{max th} = \frac{D_{roue} \Omega_{mot max}}{2k_g} = 310 km \cdot h^{-1}$$

On a bien $v_{max th} > v_{max}$, sans en être trop éloigné pour autant : le rapport de réduction est donc bien choisi.

II.2 - Dimensionnement de l'arbre d'entrée (1)

Objectif : valider le bon dimensionnement des dents du pignon de l'arbre d'entrée au regard du couple maximal à transmettre.

Question 23 Isoler l'arbre d'entrée (1) et effectuer le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures appliquées à celui-ci. Pour les liaisons considérées, écrire leurs torseurs des actions mécaniques transmissibles en leurs points d'application respectifs. Les composantes de l'action de l'arbre intermédiaire (2) sur l'arbre d'entrée (1) ne seront pas développées.

L'arbre d'entrée est soumis à cinq actions mécaniques extérieures :

- le couple moteur : $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{mot max} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$;
- l'action de l'arbre intermédiaire : $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}^D\}$;
- l'action du bâti due à la liaison linéaire annulaire en A : $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^A\} = \begin{Bmatrix} X_{A_{01}} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{A_{01}} & 0 \end{Bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$;
- l'action du bâti due à la liaison linéaire annulaire en B : $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^B\} = \begin{Bmatrix} X_{B_{01}} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{B_{01}} & 0 \end{Bmatrix}_{(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$;
- l'action du bâti due à la liaison ponctuelle en C : $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{C_{01}} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$.

Question 24 Préciser l'équation du Principe Fondamental de la Dynamique à écrire pour déterminer l'expression de la composante tangentielle de l'effort appliqué par l'arbre intermédiaire sur l'arbre d'entrée en D noté $\overrightarrow{F_{D_2 \rightarrow 1}}$ en fonction du couple moteur C_{moteur} et des paramètres du système présentés dans le tableau 4. Déterminer cette expression et faire l'application numérique pour le couple moteur maximal.

La composante tangentielle de l'effort appliqué par l'arbre intermédiaire sur l'arbre d'entrée s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique en moment, au point A, projeté sur $\vec{y}$.

En effet, cet effort s'appliquant le long de la droite d'action, on peut écrire pour un pignon à denture hélicoïdale :

$$\overrightarrow{F_{D_2 \rightarrow 1}} = F_{radial_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{x} + F_{axial_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{y} + F_{tangential_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{z}$$

D'où, en supposant la vitesse de rotation de l'arbre constante puis en projetant sur $\vec{y}$:

$$\begin{aligned} 0 &= C_{mot\ max} + (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{F_{D_2 \rightarrow 1}}) \cdot \vec{y} \\ &= C_{mot\ max} + (\vec{y} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{F_{D_2 \rightarrow 1}} \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}D_1\vec{x} + L\vec{y}$ avec $D_1 = mZ_1$ le diamètre primitif de la roue dentée de l'arbre d'entrée et L une longueur inconnue. Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 &= C_{mot\ max} + \left(-\frac{1}{2}D_1\vec{z}\right) \cdot \overrightarrow{F_{D_2 \rightarrow 1}} \\ &= C_{mot\ max} + \frac{1}{2}D_1 F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} \end{aligned}$$

Donc :

$$F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} = -\frac{2C_{mot\ max}}{mZ_1} = -59,6\ kN$$

Question 25 Écrire la forme du torseur de cohésion de la poutre $\{\mathcal{T}_{cohésion}\}$ en $G(x)$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en détaillant l'expression de ses composantes en fonction du paramétrage proposé en figure 17. En déduire le type de sollicitation auquel la poutre est soumise.

Soit S_- la partie gauche $[OG]$ de la poutre et S_+ la partie droite $[GD]$. Appliquons le principe fondamental de la statique à S_2 , qui est soumis à deux actions mécaniques extérieures :

$$\{\mathcal{F}_{S_- \rightarrow S_+}\} + \{\mathcal{F}_{2 \rightarrow 1}^T\} = \{0\}$$

Or, par définition du torseur de cohésion :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{cohésion}\} &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{F}_{S_+ \rightarrow S_-}\} = -\{\mathcal{F}_{S_- \rightarrow S_+}\} = \{\mathcal{F}_{2 \rightarrow 1}^T\} = \begin{Bmatrix} F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{z}_1 \\ \vec{0} + \overrightarrow{GD} \wedge F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_{G(x)} \\ &= \begin{Bmatrix} F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{z}_1 \\ (l-x)\vec{x}_1 \wedge F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_{G(x)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\{\mathcal{T}_{cohésion}\} = \begin{Bmatrix} F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{z}_1 \\ -(l-x)F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_{G(x)}$$

Le torseur de cohésion possède une composante de force suivant $\vec{z}_1$ et une composante de moment suivant $\vec{y}_1$: la poutre est donc soumise à de la flexion simple.

Question 26 Pour quel point de la poutre la contrainte est-elle maximale ? Donner l'expression de cette contrainte maximale en fonction de k , m et $\|\overrightarrow{F_{T_{D_2 \rightarrow 1}}}\|$, puis faire l'application numérique pour $\|\overrightarrow{F_{T_{D_2 \rightarrow 1}}}\| = 59\,600\text{ N}$, en considérant les valeurs caractéristiques des engrenages présentées dans le **tableau 4** et conclure.

La poutre étant de section rectangulaire constante, la contrainte est maximale lorsque M_{fy} est maximale (c'est-à-dire lorsque $x = 0$) et que z est maximale (c'est-à-dire lorsque $z = \frac{h}{2}$). Les points de la poutre les plus contraints sont donc les points à la surface de la poutre, à l'aplomb du point O . On a alors :

$$\sigma_{x,max} = \frac{12 \cdot l \cdot F_{T_{D_2 \rightarrow 1}} \frac{h}{2}}{bh^3} = \frac{54 \cdot F_{T_{D_2 \rightarrow 1}}}{k\pi^2 m^2} = 605\text{ MPa}$$

On constate que $\sigma_{x,max} < \sigma_e$: la tenue des dents du pignon sous sollicitation maximale est donc assurée avec un coefficient de sécurité $\frac{\sigma_e}{\sigma_{x,max}} = 1.38$.

11.3 - Détermination de la durée de vie des roulements de l'arbre de sortie (3)

Objectif : valider le bon dimensionnement des roulements de l'arbre de sortie du réducteur au regard de la fréquence des opérations de maintenance prévue par le constructeur et associée à l'exigence id = "1.3".

Question 27 Au moyen du dessin d'ensemble du réducteur présenté en **annexe2** et de la **figure 16** pour le roulement à rouleaux cylindriques de l'arbre de sortie (3) du réducteur en I :

- calculer les valeurs maximale et minimale du jeu entre l'essieu et la bague intérieure ;
- en déduire la nature du montage (serré ou glissant) entre l'essieu et la bague intérieure du roulement.

On lit sur le plan l'ajustement suivant :

- pour l'arbre : $\varnothing 218^{+0.309}_{+0.089}$, donc $d_{min} = 218.089\text{ mm}$ et $d_{max} = 218.309\text{ mm}$;
- pour la bague intérieure : $\varnothing 218^{-0.03}_{-0.08}$, donc $D_{min} = 217.92\text{ mm}$ et $D_{max} = 217.97\text{ mm}$.

On a donc :

- un jeu minimal $j_{min} = D_{min} - d_{max} = -0.389\text{ mm}$;
- un jeu maximal $j_{max} = D_{max} - d_{min} = -0.119\text{ mm}$.

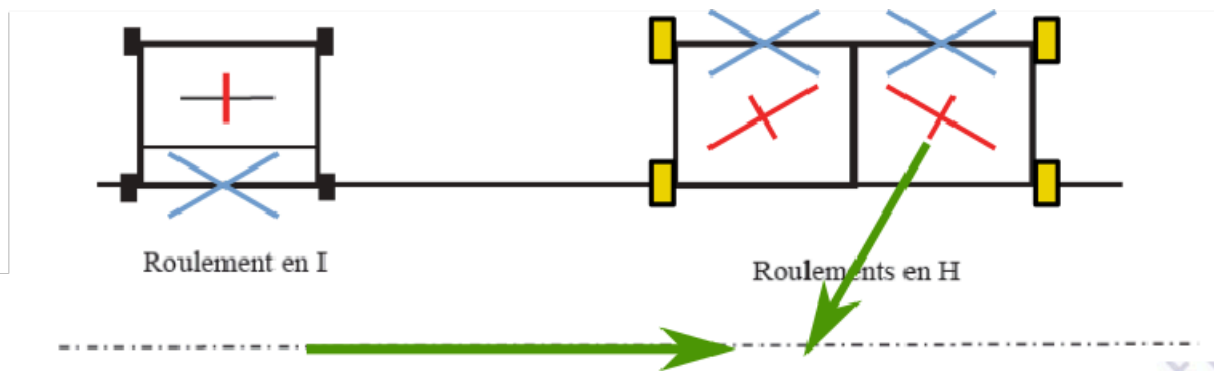
Les deux jeux étant négatifs, le montage entre l'essieu et la bague intérieure du roulement est serré.

Question 28 En vous aidant de l'**annexe 3** et de la **figure 16**, compléter la représentation simplifiée en demi-vue de la liaison entre l'essieu et le corps du réducteur donnée en **DR3**, en y faisant figurer les informations suivantes :

- le type de roulement représenté par son symbole simplifié ;
- la position des arrêts axiaux représentés par des rectangles verticaux indépendamment de la solution technologique utilisée ;
- une croix pour une bague ajustée serrée par rapport à son logement.

Valider ce montage en termes de transmission d'efforts axiaux, en représentant par des flèches le cheminement de ceux auxquels est soumis l'essieu et qui sont repris par le corps du réducteur.

On constate sur le dessin d'ensemble que la liaison en **I** est réalisé avec des roulements à rouleaux cylindriques, et celle en **H** avec deux roulements à rouleaux coniques, opposés l'un à l'autre. Toutes les bagues sont arrêtés axialement dans les deux sens.



Question 29 En vous aidant de la démarche décrite dans la documentation technique présentée en **annexe 4**, déterminer la durée de vie des paliers en I puis en H, exprimée en millions de kilomètres, dans l'hypothèse de roues mi-usées tel qu'indiqué dans le **tableau 2**. Le cahier des charges impose une inspection des roulements tous les 4,5 millions de kilomètres. Comparer les valeurs obtenues avec les exigences du cahier des charges et conclure

Les roulements à rouleaux cylindriques ne supportent pas d'efforts axiaux, donc $\frac{F_A}{F_R} = 0$. Par conséquent :

$$P_{dyn} = F_R = \sqrt{X_I^2 + Z_I^2} = 20.5 \text{ kN}$$

D'où la durée de vie du roulement en I :

$$L_{10,d}^I = \pi D_{roue} L_{10} = \pi D_{roue} \left(\frac{C}{P_{dyn}} \right)^{\frac{10}{3}} = 39 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Par ailleurs, pour les roulements à rouleaux coniques FC 12241, on lit sur l'annexe 4 que $e = 0.49$ et $y = 1.23$. Or :

$$\frac{F_A}{F_R} = \frac{|Y_H|}{\sqrt{X_H^2 + Z_H^2}} = 1.33$$

On a donc $\frac{F_A}{F_R} > e$, et donc :

$$P_{dyn} = 0.4F_R + y \cdot F_A = 10.1 \text{ kN}$$

D'où la durée de vie du roulement en H :

$$L_{10,d}^H = \pi D_{roue} L_{10} = \pi D_{roue} \left(\frac{C}{P_{dyn}} \right)^{\frac{10}{3}} = 2\,820 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Pour les deux types de roulement, la durée de vie est supérieure aux $4.5 \cdot 10^6 \text{ km}$ exigés par le cahier des charges : les roulements sont donc bien dimensionnés.

III - Asservissement de couple

Objectif : aborder la stratégie d'asservissement de couple des moteurs de l'AGV, hors démarrage, à l'aide d'un modèle analogique élémentaire ainsi que le choix et la mise en œuvre du capteur angulaire associé.

III.1 - Stratégie de l'asservissement

Objectif : valider les performances de l'asservissement en couple des moteurs de l'AGV.

Question 30 En s'appuyant sur l'expression du couple pour la stratégie de pilotage 1 donnée page 10, rappeler quels sont les paramètres du courant à imposer afin d'obtenir un couple constant.

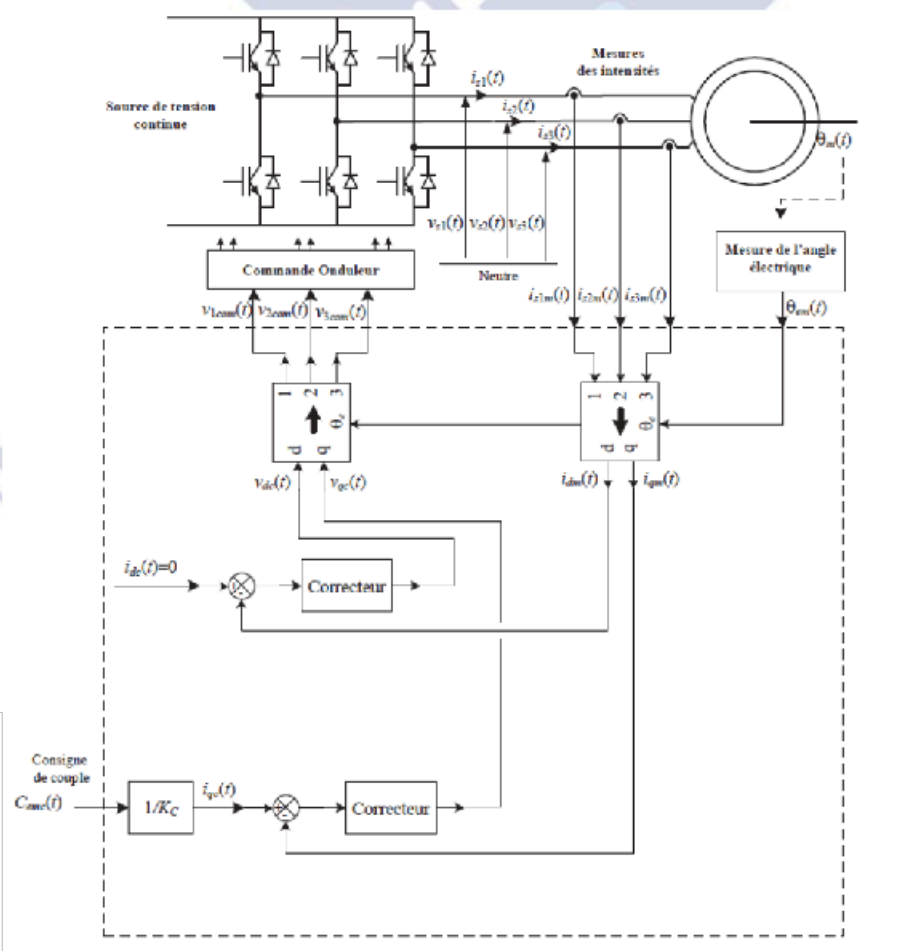
Dans la stratégie de pilotage 1, pour maintenir un couple constant, il faut imposer :

- un déphasage nul entre le courant instantané et la force électromotrice $\psi = 0$;
- un produit $\phi_r \cdot I_{sc}$, entre le flux et la valeur efficace du courant statorique, constant.

Question 31 Toujours pour un couple constant, quel est alors l'intérêt d'asservir les courants $i_d(t)$ et $i_q(t)$ dans le domaine de Park ?

Dans le domaine de Park, la commande en couple est réalisée directement, avec un facteur de proportionnalité constant, par l'asservissement du courant $i_q(t)$.

Question 32 À partir des mesures de $i_{dm}(t)$, $i_{qm}(t)$ et des consignes $C_{emc}(t)$ et $i_{dc}(t)$, avec $i_{dc}(t) = 0$, ajouter sur le DR4 deux comparateurs et deux correcteurs pour obtenir l'asservissement de couple voulu.



Question 33 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement de courant en fonction de $C(p)$, K_{ond} , R_s et $L_d p$. Pour deux correcteurs (A et B), de constantes caractéristiques différentes, les diagrammes de Bode relatifs à la fonction de transfert en boucle ouverte sont proposés sur le DR5. Tracer sur ce document, les marges de phase et préciser leurs valeurs. Quel correcteur doit-on retenir pour obtenir l'asservissement « le plus stable » ?

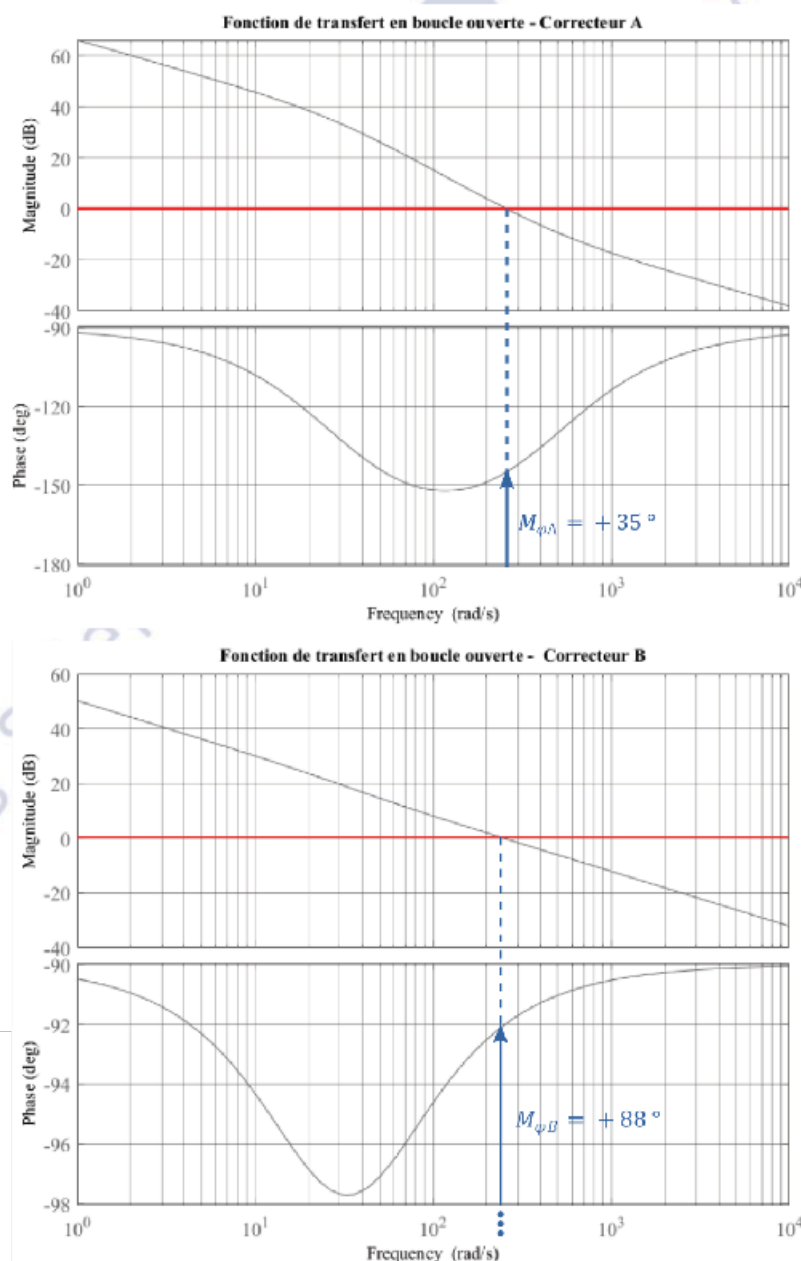
On a :

$$FTBO(p) = C(p) \cdot K_{ond} \cdot \frac{1}{R_s + L_d p}$$

Sur les diagrammes de Bode, en constatant que la valeur de phase de -180° n'est jamais atteinte, on lit :

$$\begin{aligned} M_{GA} &= +\infty & M_{GB} &= +\infty \\ M_{\varphi A} &= +35^\circ & M_{\varphi B} &= +88^\circ \end{aligned}$$

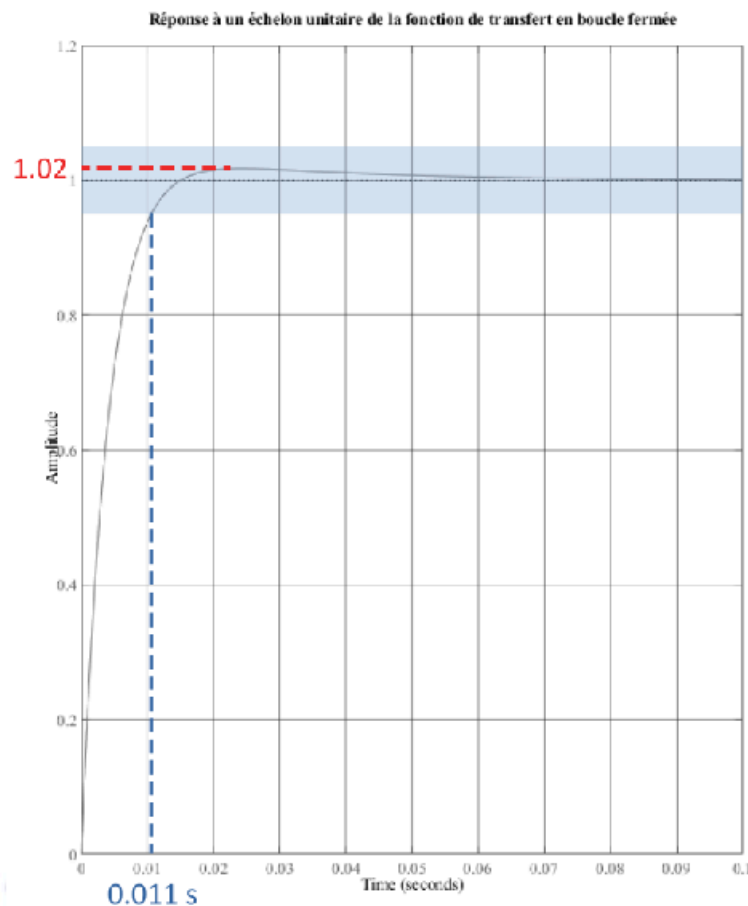
On constate que $M_{\varphi B} > M_{\varphi A}$: le correcteur B permet donc d'avoir un asservissement « plus stable ».



Question 34 Quantifier alors la rapidité, la précision en régime permanent ainsi que la stabilité de l'asservissement de couple en explicitant clairement les critères utilisés. Interpréter vos résultats.

On constate sur l'annexe 5 que :

- le temps de réponse à 5 % de l'asservissement est $t_{5\%} = 11 \text{ ms}$: l'asservissement n'est donc pas suffisamment rapide pour le cahier des charges qui exige un temps de réponse « inférieur à la dizaine de millisecondes » ;
- la réponse tend vers une amplitude de 1, égale à la consigne unitaire : le système a donc une erreur de précision $\varepsilon_p = 0$ et est donc précis ;
- la réponse ne présente pas d'oscillations, et le plus grand dépassement a une amplitude relative $D\% = 2\%$ assez faible : le système est donc bien stable.



III.2 - Étude du capteur angulaire

Objectif : valider le choix du capteur angulaire.

Question 35 Après avoir parcouru les caractéristiques générales « FEATURES » du « Brushless resolver » de l'annexe 7, donner trois arguments justifiant l'adéquation de ce type de capteur avec notre application.

Le capteur possède les caractéristiques suivantes :

- il ne nécessite pas de maintenance, ce qui permet de minimiser le coût de revient du système et donc d'être plus concurrentiel à l'international ;
- il supporte de fortes vibrations, qui sont très importantes lors d'une utilisation ferroviaire ;
- il supporte des vitesses de rotation allant au minimum jusqu'à $6\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, supérieur à la vitesse maximale de $4\,500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ de notre application.

Question 36 Quel est le rôle de l'étage d'entrée constitué d'un ALI et des résistances R_i et R_f ?

Au sein de l'amplificateur opérationnel, $i^+ = i^- = 0$. On a donc, d'après la formule du pont diviseur de tension :

$$V^+ = \frac{R_f}{R_i + R_f} V_{S1}$$

Et :

$$\begin{aligned} V^- - V_{out} &= \frac{R_f}{R_i + R_f} (V_{S2} - V_{out}) \\ V^- - \frac{R_f}{R_i + R_f} V_{S2} &= \left(1 - \frac{R_f}{R_i + R_f}\right) V_{out} \\ (R_i + R_f) V^- - R_f V_{S2} &= R_i V_{out} \\ V_{out} &= \frac{R_i + R_f}{R_i} V^- - \frac{R_f}{R_i} V_{S2} \end{aligned}$$

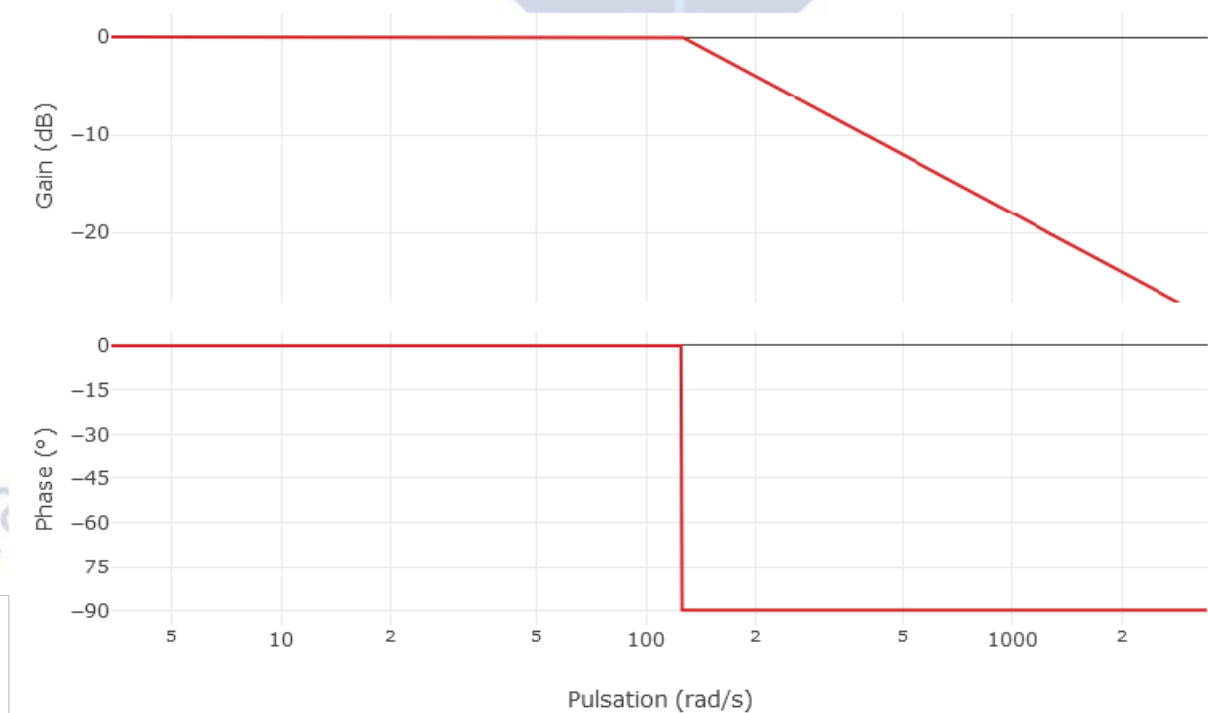
Par ailleurs, il y a une boucle de rétroaction négative : l'amplificateur opérationnel fonctionne donc en régime linéaire et donc $V^+ = V^-$. D'où :

$$V_{out} = \frac{R_i + R_f}{R_i} \frac{R_f}{R_i + R_f} V_{S1} - \frac{R_f}{R_i} V_{S2} = \frac{R_f}{R_i} (V_{S1} - V_{S2})$$

Il s'agit donc d'un montage soustracteur qui permet d'obtenir les différences de tension E_{S1-S2} et E_{S2-S4} .

Question 37 Tracer sur votre copie, les diagrammes asymptotiques de Bode relatifs au filtre 1.

Une bande passante de 20 Hz correspond à une pulsation de cassure $\omega_c = 126 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On en déduit donc les diagrammes asymptotiques de Bode suivant :



Question 38 Estimer alors la grandeur $x_3(t)$, sortie du filtre 1, lorsque le terme $(\theta(t) - \alpha(t))$ est supposé quasi constant et de faible valeur, tel que $\sin(\theta(t) - \alpha(t)) \approx \theta(t) - \alpha(t)$.

On a :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 2x_1(t) \sin(\omega t) \approx 2 \sin(\omega t)^2 (\theta(t) - \alpha(t)) \\ &= (1 - \cos(2\omega t)) (\theta(t) - \alpha(t)) \\ &= (\theta(t) - \alpha(t)) - \cos(2\omega t) (\theta(t) - \alpha(t)) \end{aligned}$$

$x_2(t)$ est donc la somme d'un signal quasi-constant $\theta(t) - \alpha(t)$ et d'un signal à une pulsation $2\omega = 4\pi f = 125 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, très supérieure à la pulsation de cassure du filtre. Celui-ci ne va donc laisser passer que la composante continue, sans la déformer du fait de son gain unitaire. On en déduit donc :

$$x_3(t) = \theta(t) - \alpha(t)$$

Question 39 Montrer que l'ensemble de la figure 20, peut être modélisé par la boucle d'asservissement analogique représentée à la figure 21. Dans l'hypothèse où le moteur tourne à vitesse constante et sachant que le filtre 2 est un correcteur de type PI et que l'ensemble oscillateur et compteur s'apparente à un intégrateur, quelle est la valeur de l'erreur, $\theta(t) - \alpha(t)$ en régime permanent ?

D'après la question 38, l'ensemble du comparateur, du multiplicateur et du filtre 1 de la figure 20 peut bien être modélisé par un simple comparateur, comme illustré sur la figure 21.

Le filtre 1 étant un filtre du premier ordre, le filtre 2 un correcteur PI et l'ensemble oscillateur et compteur un intégrateur, la boucle ouverte est de classe $\alpha = 2$. La vitesse du moteur étant constante, sa position angulaire varie linéairement. Le système est donc soumis à une rampe. Or, un système de classe 2 est parfaitement précis face à une consigne en rampe : l'erreur $\theta(t) - \alpha(t)$ est donc nulle en régime permanent.

Question 40 Pourquoi l'ensemble « Brushless resolver » et « SmartCoder » est-il bien adapté pour notre application ?

Avec l'ajout du coefficient 6, on obtient via la mesure de l'angle moteur $\theta(t)$, directement la valeur de l'angle électrique $\theta_e(t)$ liée par $p = 6$ paires de pôles à $\theta(t)$. Cet angle $\theta_e(t)$ est nécessaire pour la transformation de Park. L'ensemble « Brushless resolver » et « SmartCoder » est donc bien adapté pour cette application.